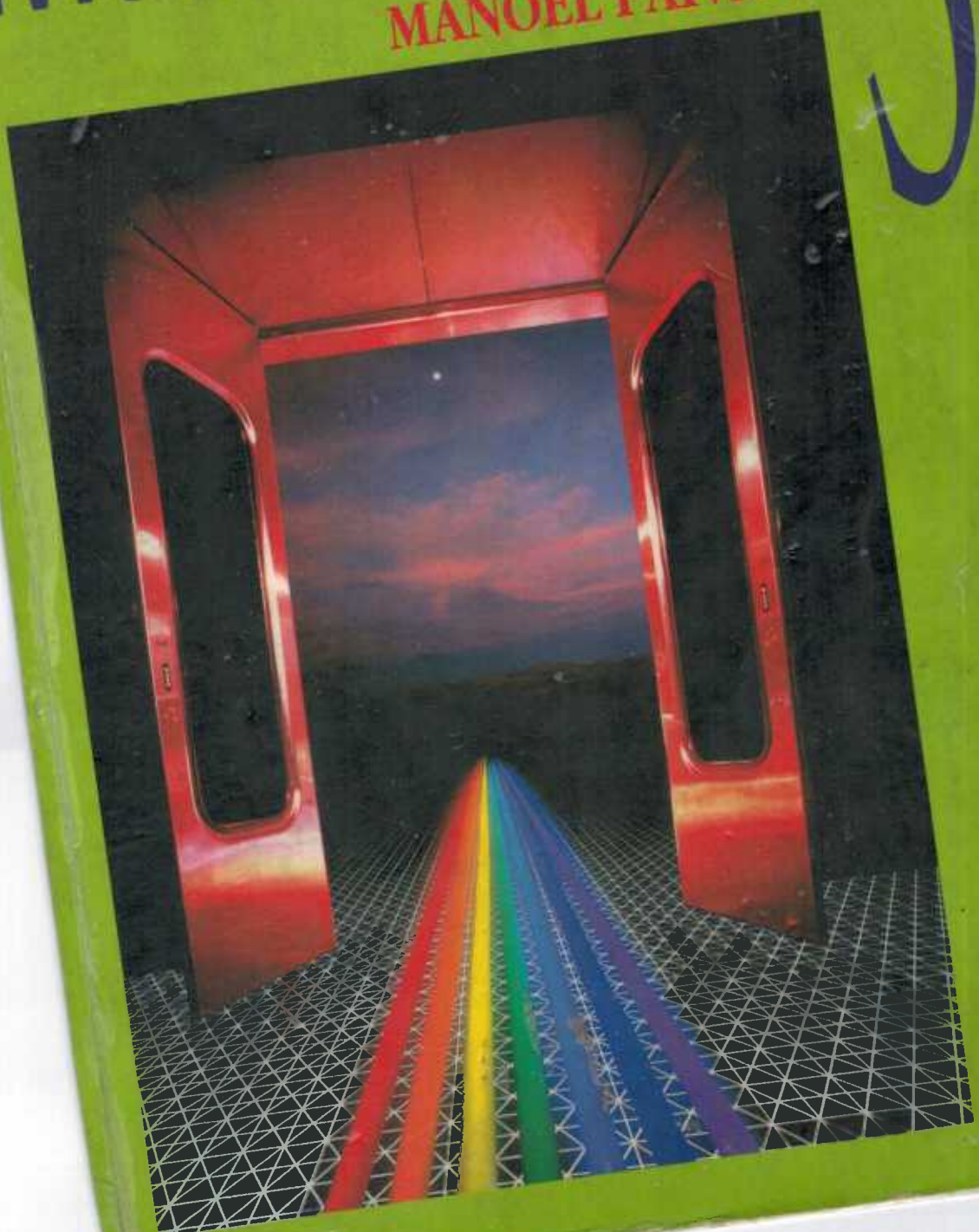
Matemática 3

MANOEL PAIVA



EDITORA MODERNA

O resgate do verdadeiro ensino da matemática

Esta é a proposta de Manoel Rodrigues Paiva, professor com mais de 20 anos de experiência, ao conceber uma obra completa, em que a matemática é enfocada com toda sua amplitude e rigor conceitual.

Ao mesmo tempo em que constrói e orienta a aprendizagem, a obra valoriza o espírito crítico e questionador do aluno, estimulando sua criatividade e raciocínio lógico.

Mais de 1.300 exercícios resolvidos auxiliam na fixação da teoria, assegurando um maior aproveitamento durante o estudo em casa.

O conjunto de atividades da coleção (cerca de 3.800) é estruturado em três séries de exercícios propostos — básicos, complementares e questões dos vestibulares — que objetivam sedimentar o aprendizado e estreitar a relação do estudante com a realidade dos exames vestibulares.

Longe de apresentar um mero manual técnico, o autor oferece a educadores e educandos uma alternativa ao simplismo a que se pode reduzir o estudo da ciência matemática.

EDITORA MODERNA

ISBN 85-16-0128

9 788516 0128

Apresentação

1. A filosofia da obra

A matemática, mais do que nunca, está presente em nosso cotidiano. Com o advento dos computadores, os jovens estudam essa ciência até em jogos de lazer. Por isso é preciso aproveitar esse fato e resgatar o espírito crítico do jovem, essencial ao aprendizado da ciência matemática.

Apresento nesta obra os meus vinte e dois anos de experiência como professor. Hoje, com plena convicção, afirmo que a matemática deve caminhar paralelamente à realidade do nosso dia-a-dia.

Sempre que possível, mostraremos aplicações práticas dos assuntos estudados, sem no entanto nos distanciarmos da precisão dos conceitos.

Os atributos básicos para um bom aprendizado — interpretação de texto, raciocínio e iniciativa — serão constantemente exigidos.

2. A estrutura da obra

Em cada um dos capítulos a teoria vem detalhadamente acompanhada de exercícios resolvidos, de modo que o aluno possa aprender mesmo sem ajuda do professor.

Ao final de cada capítulo apresentamos três séries de exercícios propostos: os básicos, os complementares e as questões dos vestibulares. Os básicos têm como finalidade a fixação do aprendizado. Os complementares exigem criatividade e desembaraço em relação ao assunto estudado. E as questões dos vestibulares mostram como o conhecimento de matemática é exigido dos candidatos às universidades brasileiras.

3. Palavra final

A matemática se revela em mentes sensíveis, capazes de ver uma espiral em um girassol, ângulos em uma estrela e Deus no infinito.

O autor

Ao amor de minha mulher,
Lúcia, e de meus filhos:
Priscilla, Emerson e Ewerton.

Apresentação

Sumário

Capítulo 1 – Introdução à geometria analítica – sistema de coordenadas 1
1. O que é geometria analítica?, 1. 2. O eixo real, 1. 3. Segmento orientado, 2. 4. Divisão de um segmento orientado por um ponto, 4. 5. Comprimento de um segmento, 9. 6. Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, 11.

Capítulo 2 – Comprimento de um segmento de reta contido no plano cartesiano 19
1. Conceituação, 19. 2. Projeções ortogonais de um segmento sobre os eixos coordenados, 19. 3. Distância entre dois pontos, 21. 4. Divisão de um segmento por um ponto, 26.

Capítulo 3 – A equação da reta 38
1. Condição de alinhamento de três pontos por determinante, 38. 2. Equação da reta, 41. 3. Equação geral da reta, 42. 4. Intersecção de duas retas concorrentes, 44.

Capítulo 4 – Equação fundamental da reta 51
1. Inclinação de uma reta, 51. 2. Coeficiente angular de uma reta, 53. 3. Condição de alinhamento de três pontos por coeficiente angular, 56. 4. Equação fundamental da reta, 59.

Capítulo 5 – Equação reduzida da reta 67
1. Conceituação, 67. 2. Cálculo do coeficiente angular e do coeficiente linear de uma reta a partir de sua equação geral, 68. 3. Estudo das posições relativas de duas retas em função de suas inclinações, 70. 4. Retas perpendiculares, 74.

Capítulo 6 – Distância entre ponto e reta 84
1. Cálculo da distância de um ponto a uma reta, 84. 2. Área de um triângulo, 89.

Capítulo 7 – Complementos sobre a equação da reta 95
1. Equação segmentária da reta, 95. 2. Equações paramétricas da reta, 97. 3. Feixe plano de retas paralelas, 99. 4. Feixe plano de retas concorrentes, 102.

Capítulo 8 – Ângulos formados por duas retas e inequações do 1º grau 109
1. Cálculo da medida de um ângulo formado por duas retas, 109. 2. Representação gráfica de uma inequação do 1º grau, 115.

Capítulo 9 – Equação da circunferência 130
1. Introdução, 130. 2. Equação reduzida da circunferência, 130. 3. Equação normal da circunferência, 133. 4. Reconhecimento de uma circunferência, 137.

Capítulo 10 – Algumas posições relativas à circunferência 143
1. Posições relativas de um ponto e uma circunferência, 143. 2. Posições relativas de uma reta e uma circunferência, 148. 3. Posições relativas de duas circunferências, 158.

Capítulo 11 – A elipse 168
1. Introdução, 168. 2. Definição de elipse, 169. 3. Equação da elipse, 173. 4. Posições relativas entre ponto e elipse, 179. 5. Posições relativas entre reta e elipse, 183.

Capítulo 12 – A hipérbole 192
1. Introdução, 192. 2. Definição de hipérbole, 194. 3. Equação da hipérbole, 197. 4. Posições relativas entre ponto e hipérbole, 204. 5. Posições relativas entre reta e hipérbole, 209. 6. As equações das assíntotas de uma hipérbole, 215.

Capítulo 13 – A parábola 223
1. Introdução, 223. 2. Definição de parábola, 225. 3. Equação da parábola, 226. 4. Posições relativas entre ponto e parábola, 234. 5. Posições relativas entre reta e parábola, 238.

Capítulo 14 – Reconhecimento de uma curva através de sua equação 247
1. Equação do 2º grau em duas variáveis, 247.

Capítulo 15 – Lugar geométrico (L.G.) 258

1. Conceituação, 258. **2.** Equação de um lugar geométrico do plano cartesiano, 259. **3.** Inequação de um lugar geométrico do plano cartesiano, 261.

Capítulo 16 – Conjunto dos números complexos 266

1. A insuficiência dos números reais, 266. **2.** A unidade imaginária (i), 266. **3.** Número complexo, 266. **4.** Igualdade entre números complexos, 268. **5.** Números complexos conjugados, 268. **6.** Adição de números complexos, 269. **7.** Subtração de números complexos, 271. **8.** Multiplicação de números complexos, 272. **9.** Divisão de números complexos, 276. **10.** Potências de números complexos com expoentes inteiros, 278. **11.** Propriedades do conjugado de um número complexo, 280.

Capítulo 17 – Representação geométrica e forma trigonométrica de um número complexo 285

1. Plano de Argand-Gauss, 285. **2.** Módulo de um número complexo, 287. **3.** Argumento de um número complexo, 289. **4.** Forma trigonométrica de um número complexo, 294. **5.** Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica, 296. **6.** Divisão de números complexos na forma trigonométrica, 297.

Capítulo 18 – Potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$ 303

1. Potenciação em $\mathbb{C}$, 303. **2.** Radiciação em $\mathbb{C}$, 305. **3.** Resolução de equações do 2º grau em $\mathbb{C}$, 308.

Capítulo 19 – Polinômios em uma variável 311

1. Função polinomial, 311. **2.** Polinômio identicamente nulo, 312. **3.** Identidade de polinômios, 312. **4.** Grau de um polinômio, 313. **5.** Adição de polinômios, 313. **6.** Subtração de polinômios, 316. **7.** Multiplicação de monômios, 317. **8.** Multiplicação de polinômio por polinômio, 317. **9.** Divisão de polinômios, 320. **10.** Valor numérico de um polinômio, 325. **11.** Raiz ou zero de um polinômio, 326. **12.** Fração polinomial, 327.

Capítulo 20 – Generalidades sobre a divisão de um polinômio por um binômio do 1º grau 332

1. Teorema do resto, 332. **2.** Teorema de D'Alembert, 333. **3.** Dispositivo de Briot-Ruffini para a divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$, 334. **4.** Divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$, 336. **5.** Divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x - a)(x - b)$, 340.

Capítulo 21 – Equações polinomiais 346

1. Definição, 346. **2.** Teorema fundamental da álgebra, 347. **3.** Teorema da decomposição, 348. **4.** Raízes imaginárias, 352. **5.** Raízes racionais, 354.

Capítulo 22 – Relações de Girard e o teorema de Bolzano 361

1. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial, 361. **2.** Raízes reais de uma equação polinomial, 368.

Capítulo 23 – Limite de uma função 379

1. Revisão de alguns pré-requisitos para a teoria dos limites, 379. **2.** Vizinhanças em $\mathbb{R}$, 383. **3.** O conceito de limite, 388.

Capítulo 24 – Continuidade de funções e propriedades dos limites 409

1. Função contínua, 409. **2.** Propriedades dos limites, 419. **3.** Cálculo do limite de uma função f, para x tendendo a a, com f descontínua em a ou f não-definida em a, 423. **4.** Limite da função composta, 425.

Capítulo 25 – Limites e continuidade laterais 433

1. Limites laterais (conceituação), 433. **2.** Continuidade lateral, 438. **3.** Propriedades dos limites e continuidade laterais, 441.

Capítulo 26 – Limites infinitos 446

1. O que é um limite infinito?, 446. **2.** Limites laterais infinitos, 451. **3.** Propriedades dos limites infinitos, 455. **4.** Propriedades dos limites laterais infinitos, 457. **5.** Cálculo de $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, dado que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, 462.

Capítulo 27 – Cálculo do limite de $f(x)$ para x tendendo a $+\infty$ ou a $-\infty$ 467

1. Limites finitos para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, 467. **2.** Limites infinitos para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, 472. **3.** Propriedades dos limites para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, 474. **4.** Limite de uma função polinomial $y = P(x)$ para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, 478. **5.** Limite de uma função racional $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, 480. **6.** Cálculo de $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{f(x)}$ e $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{f(x)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, 483.

Capítulo 28 – Cálculo de limites de funções trigonométricas 489

1. Desigualdade básica para o cálculo de limites trigonométricos, 489. **2.** Continuidade de funções trigonométricas, 490. **3.** Teorema do confronto, 492. **4.** Limite trigonométrico fundamental, 493.

Capítulo 29 – Cálculo de limites de funções exponenciais e logarítmicas 500

1. Função exponencial, 500. **2.** Função logarítmica, 506.

Capítulo 30 – Limite de uma função real de variável inteira n, para $n \to +\infty$ ou $n \to -\infty$ 514

1. Conceituação, 514. **2.** Um limite especial: o número e, 515. **3.** Logaritmo neperiano, 520.

Capítulo 31 – Derivada de uma função em um ponto 524

1. Conceituação, 524. **2.** Continuidade de funções, 529. **3.** Função derivada, 531.

Capítulo 32 – Derivadas fundamentais e regras de derivação 535

1. Derivadas fundamentais, 535. **2.** Regras de derivação, 538. **3.** Derivadas sucessivas, 548. **4.** Resumo das derivadas fundamentais e das regras de derivação, 549.

Capítulo 33 – Derivadas de funções inversas e derivação implícita 553

1. Derivadas de funções inversas, 553. **2.** Derivadas de funções circulares inversas, 556. **3.** Derivação implícita, 559.

Capítulo 34 – Estudo da variação de uma função através de sua derivada 565

1. Máximos e mínimos de uma função, 565. **2.** Relação entre o sinal da derivada e a variação de uma função f, 569. **3.** Concavidade, 577. **4.** Ponto de inflexão, 579. **5.** Determinação de extremantes, extremos e pontos de inflexão de uma função através de derivadas sucessivas, 583.

Capítulo 35 – Construção de gráficos e aplicação de derivadas ao estudo do movimento retilíneo 590

1. Assíntota de um gráfico, 590. **2.** Determinação de assíntotas não-verticais, 594. **3.** Esboço do gráfico de uma função, 596. **4.** Aplicação de derivadas ao estudo do movimento retilíneo, 604.

Respostas 609

Capítulo 27 – Cálculo de limite de $f(x)$ para x tendendo a ... ou a ... 307

Capítulo 28 – Cálculo de limites de funções trigonométricas 326

Capítulo 29 – Cálculo de limites de funções exponenciais e logarítmicas 338

Capítulo 30 – Limite de uma função real de variável real no ponto $x = x_0$ ou $x \to \pm\infty$ 344

Capítulo 31 – Derivada de uma função em um ponto 354

Capítulo 32 – Derivadas fundamentais e regras de derivação 370

Capítulo 33 – Derivadas de funções inversa e funções implícitas 383

Capítulo 34 – Estudo da variação de uma função através de sua derivada 394

Capítulo 35 – Construção de gráficos e aplicações de derivadas ao estudo de movimentos retilíneos 410

Exercícios 426

Capítulo 1

Introdução à geometria analítica – sistema de coordenadas

1. O que é geometria analítica?

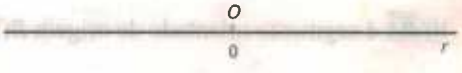
A geometria analítica foi concebida por René Descartes. Aliando a álgebra à geometria, ela possibilita o estudo das figuras geométricas, associando-as a um sistema de coordenadas. Desse modo as figuras podem ser representadas através de pares ordenados, equações ou inequações.

NATIONAL LIBRARY OF MEDICINE/SPL – STOCK PHOTOS

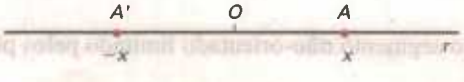
René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês. Rompeu com as tradições clássicas da geometria grega, criando a geometria analítica.

2. O eixo real

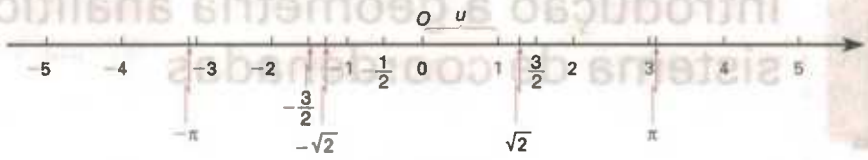
Recordando a construção do eixo real feita no volume 1 desta obra, consideremos uma reta r e associemos a um ponto O de r o número 0 (zero).



O ponto O separa a reta r em duas semi-retas opostas de origem O. A cada ponto A, $A \neq O$, de uma dessas semi-retas, associemos um número real positivo x, que indica a distância de A até O, em uma certa unidade u. A cada ponto A', simétrico de A em relação a O, associemos o oposto do número x.



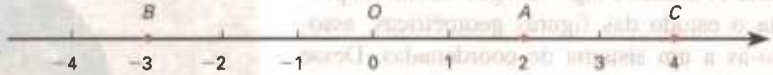
Dizemos que esse sistema é o eixo real, cujo sentido é o que concorda com o crescimento dos valores dos números. Assim, temos:



Se um ponto A do eixo real está associado a um número real x, então dizemos que x é a **abscissa** do ponto A. Indicamos essa associação por $A(x)$.

Exemplo

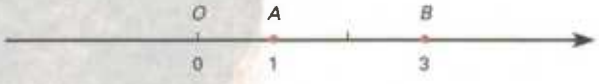
- $A(2)$;
- $B(-3)$;
- $C(4)$.



3. Segmento orientado

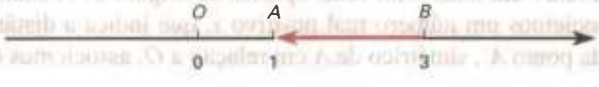
Às vezes há necessidade de orientar um segmento de reta, isto é, distinguir a origem e a extremidade desse segmento. Indicamos o segmento orientado de origem A e extremidade B pelo símbolo $\overrightarrow{AB}$.

Exemplos



a) $\overrightarrow{AB}$ é o segmento orientado de origem $A(1)$ e extremidade $B(3)$.

b) $\overrightarrow{BA}$ é segmento orientado de origem $B(3)$ e extremidade $A(1)$.



Nota: Indicamos por $\overline{AB}$ o segmento **não**-orientado limitado pelos pontos A e B.

3.1. Medida algébrica de um segmento orientado

Definição

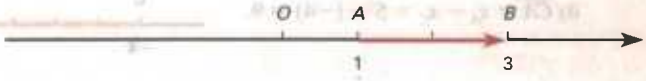
A medida algébrica de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é o número real $x_B - x_A$, onde x_B e x_A são, respectivamente, as abscissas da extremidade e da origem do segmento.

Indicamos a medida algébrica do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ por $\overline{\overrightarrow{AB}}$. Assim, temos:

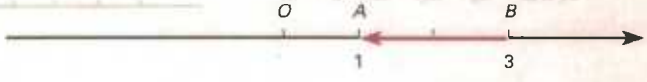
$$\overline{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A.$$

Exemplos

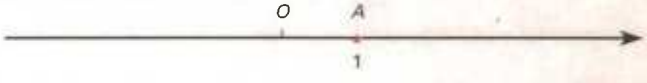
a) $\overline{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 3 - 1 = 2.$



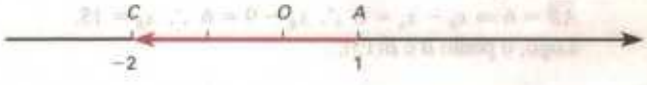
b) $\overline{\overrightarrow{BA}} = x_A - x_B = 1 - 3 = -2.$



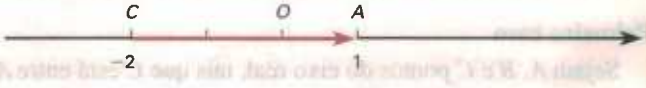
c) $\overline{\overrightarrow{AA}} = x_A - x_A = 1 - 1 = 0.$



d) $\overline{\overrightarrow{AC}} = x_C - x_A = -2 - 1 = -3.$



e) $\overline{\overrightarrow{CA}} = x_A - x_C = 1 - (-2) = 3.$



Note que:

- $\overline{\overrightarrow{AB}} > 0$, logo o sentido de $\overrightarrow{AB}$ **concorda** com o sentido do eixo real;
- $\overline{\overrightarrow{BA}} < 0$, logo o sentido de $\overrightarrow{BA}$ **discorda** do sentido do eixo real;
- se a medida algébrica de um segmento orientado é zero, então a origem e a extremidade desse segmento são pontos coincidentes.

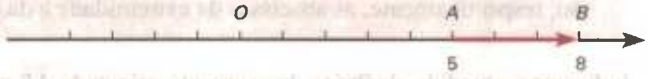
Exercícios resolvidos

R.1 São dados $A(5)$, $B(8)$, $C(-4)$ e $O(0)$. Pede-se determinar:

a) $\overline{\overline{AB}}$; b) $\overline{\overline{BA}}$; c) $\overline{\overline{AC}}$; d) $\overline{\overline{CA}}$; e) $\overline{\overline{OB}}$; f) $\overline{\overline{BO}}$.

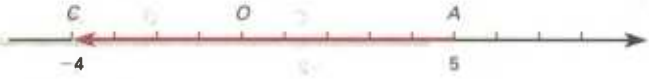
Resolução

a) $\overline{\overline{AB}} = x_B - x_A = 8 - 5 = 3$.



b) $\overline{\overline{BA}} = x_A - x_B = 5 - 8 = -3$.

c) $\overline{\overline{AC}} = x_C - x_A = -4 - 5 = -9$.



d) $\overline{\overline{CA}} = x_A - x_C = 5 - (-4) = 9$.

e) $\overline{\overline{OB}} = x_B - x_O = 8 - 0 = 8$.

f) $\overline{\overline{BO}} = x_O - x_B = 0 - 8 = -8$.

R.2 Seja $A(9)$. Determinar o ponto $B(x_B)$ tal que $\overline{\overline{AB}} = 6$.

Resolução

$\overline{\overline{AB}} = 6 \Rightarrow x_B - x_A = 6 \therefore x_B - 9 = 6 \therefore x_B = 15$.

Logo, o ponto B é $B(15)$.

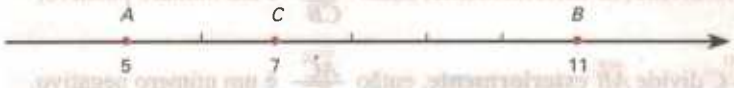
4. Divisão de um segmento orientado por um ponto

Primeiro caso

Sejam A, B e C pontos do eixo real, tais que C está entre A e B.

Dizemos que o ponto C divide **interiormente** o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão $\frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}}$.

Exemplo



O ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{7-5}{11-7} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Segundo caso

Sejam A, B e C pontos do eixo real, tais que C não pertence ao segmento $\overrightarrow{AB}$:

ou

Por extensão do primeiro caso, dizemos que o ponto C divide **exteriormente** o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

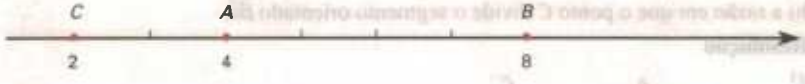
Exemplos

a)

O ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{10-4}{8-10} = \frac{6}{-2} = -3.$$

b)



O ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{2-4}{8-2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Note que:

- se um ponto C divide $\overrightarrow{AB}$ **interiormente**, então $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ é um número positivo;
- se um ponto C divide $\overrightarrow{AB}$ **exteriormente**, então $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ é um número negativo.

Casos particulares

- Se um ponto C coincide com a origem do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$, então dizemos que C divide $\overrightarrow{AB}$ na razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = 0$.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{0}{x_B - x_C} = 0.$$

- Se um ponto C coincide com a extremidade do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$, então **não existe** a razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$, pois nesse caso $\overline{CB} = 0$.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{x_C - x_A}{0} \quad (\not\exists)$$

Exercícios resolvidos

R.3 São dados $A(3)$, $B(18)$ e $C(6)$. Pede-se determinar:
a) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$;
b) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$.

Resolução

a)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{6 - 3}{18 - 6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

b)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{x_C - x_B}{x_A - x_C} = \frac{6 - 18}{3 - 6} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

R.4 São dados $A(6)$, $B(12)$ e $C(3)$. Pede-se determinar:

a) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$;

b) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$.

Resolução

a)

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{3 - 6}{12 - 3} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

b)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{x_C - x_B}{x_A - x_C} = \frac{3 - 12}{6 - 3} = \frac{-9}{3} = -3.$$

R.5 São dados $A(9)$ e $B(21)$. Pede-se determinar o ponto $C(x_C)$ que divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão $\frac{1}{5}$.

Resolução

Devemos ter $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{5}$; logo:

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x_C - 9}{21 - x_C} = \frac{1}{5} \quad \therefore\ 5x_C - 45 = 21 - x_C \quad \therefore\ 6x_C = 66 \quad \therefore\ x_C = 11.$$

Assim, o ponto C é $C(11)$. Note que o ponto C está entre A e B. Isso decorre do fato de a razão de divisão, $\frac{1}{5}$, ser positiva.

R.6 São dados $A(-3)$ e $B(12)$. Pede-se determinar o ponto $C(x_C)$ que divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão -2.

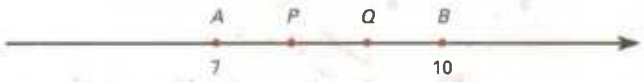
Resolução

Devemos ter $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -2$; logo:

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = -2 \quad \therefore\ \frac{x_C - (-3)}{12 - x_C} = -2 \quad \therefore\ -24 + 2x_C = x_C + 3 \quad \therefore\ x_C = 27.$$

Assim, o ponto C é $C(27)$. Note que o ponto C é exterior ao segmento $\overrightarrow{AB}$. Isso decorre do fato de a razão de divisão, -2, ser negativa.

R.7 Determinar as abscissas dos pontos P e Q, que dividem o segmento $\overline{AB}$ em três partes congruentes.



Resolução

O ponto P divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{2}$. Então temos:

$$\frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_P - 7}{10 - x_P} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad 2x_P - 14 = 10 - x_P \quad \therefore \quad 3x_P = 24 \Rightarrow x_P = 8.$$

Logo, o ponto P é $P(8)$.

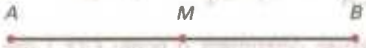
O ponto Q divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão $\frac{2}{1}$, ou seja, $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{2}{1}$. Então temos:

$$\frac{x_Q - x_A}{x_B - x_Q} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{x_Q - 7}{10 - x_Q} = \frac{2}{1} \quad \therefore \quad x_Q - 7 = 20 - 2x_Q \quad \therefore \quad 3x_Q = 27 \Rightarrow x_Q = 9.$$

Logo, o ponto Q é $Q(9)$.

4.1. Ponto médio de um segmento

O ponto médio M de um segmento $\overline{AB}$ é aquele que divide o segmento em duas partes congruentes.



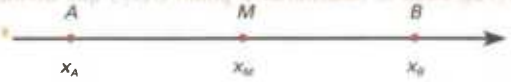
4.2. Abscissa do ponto médio de um segmento

Teorema

Se $A(x_A)$ e $B(x_B)$ são pontos distintos, então o ponto médio $M(x_M)$ do segmento $\overline{AB}$ é tal que:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Demonstração



O ponto M divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão $\frac{1}{1}$, ou seja: $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{1}{1}$. Então temos:

$$\frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} = \frac{1}{1} \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \quad \therefore \quad 2x_M = x_A + x_B \quad \therefore \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.8 Seja $A(9)$ e $B(21)$. Determinar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Resolução

Sendo $M(x_M)$ o ponto médio de $\overline{AB}$, temos $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{9 + 21}{2} = 15$.

Logo, o ponto M é $M(15)$.

R.9 Determinar o simétrico do ponto $A(8)$ em relação ao ponto $P(13)$.

Resolução

O simétrico de A em relação a P é o ponto A' tal que P é ponto médio do segmento $\overline{AA'}$:

Sendo x a abscissa de A', temos $13 = \frac{8 + x}{2} \therefore 8 + x = 26 \therefore x = 18$.

Logo, o simétrico de $A(8)$ em relação a $P(13)$ é o ponto $A'(18)$.

5. Comprimento de um segmento

Definição

Chama-se "comprimento do segmento $\overline{AB}$" o número real não negativo $|x_A - x_B|$, ou $|x_B - x_A|$, em que x_A e x_B são as abscissas dos pontos A e B, respectivamente.

Indicamos o comprimento do segmento $\overline{AB}$ pelo símbolo AB.

Exemplos

a)

O comprimento do segmento $\overline{AB}$ é $AB = |x_B - x_A| = |9 - 3| = |6| = 6$.
Note que o comprimento também pode ser calculado por $AB = |x_A - x_B| = |3 - 9| = |-6| = 6$.

b)

O comprimento do segmento $\overline{EF}$ é $EF = |x_F - x_E| = |-3 - (-8)| = |5| = 5$.
Podemos calcular esse comprimento também por $EF = |x_E - x_F| = |-8 - (-3)| = |-5| = 5$.

Devido à grande quantidade de notações que envolvem segmento de reta, convém nesse momento fazer uma revisão:

- $\overline{AB}$ é o **segmento não-orientado** limitado pelos pontos A e B;
- $\overrightarrow{AB}$ é o **segmento orientado** de origem A e extremidade B;
- $\overline{\overline{AB}}$ é a **medida algébrica** do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$;
- AB é o **comprimento** de qualquer um dos segmentos: $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BA}$.

Exercícios resolvidos

R.10 Sejam $A(8)$, $B(12)$ e $C(-3)$. Determinar:

a) o comprimento do segmento $\overline{AB}$;
b) o comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$;
c) o comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{BA}$;
d) o comprimento do segmento $\overline{AC}$.

Resolução

Os segmentos $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ têm comprimentos iguais a $AB = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$.
Assim, a resposta para os itens (a), (b) e (c) é $AB = |12 - 8| = |4| = 4$.

d) $AC = |x_C - x_A| = |-3 - 8| = |-11| = 11$.
Podemos calcular esse comprimento também por $AC = |x_A - x_C| = |8 - (-3)| = |11| = 11$.

R.11 Seja $A(6)$. Determinar $B(x_B)$ de modo que $AB = 5$.

Resolução

$$AB = 5 \Rightarrow |x_B - 6| = 5 \quad \therefore \quad x_B - 6 = 5 \text{ ou } x_B - 6 = -5 \quad \therefore \quad x_B = 11 \text{ ou } x_B = 1.$$

Logo, existem dois pontos que satisfazem a condição do problema: $B_1(11)$ e $B_2(1)$.

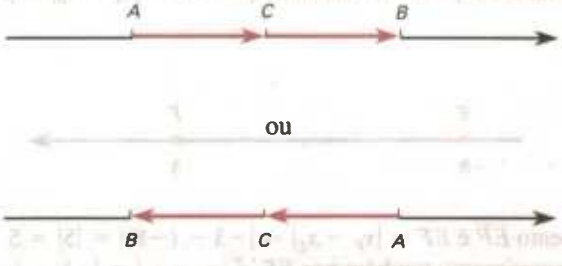
Teorema

Se $A(x_A)$, $B(x_B)$ e $C(x_C)$ são pontos distintos tais que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$ têm o mesmo sentido, então $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}}$.

Em outras palavras, se dois segmentos $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$ do eixo real têm o mesmo sentido, então a razão entre seus comprimentos AC e CB é igual à razão entre suas medidas algébricas $\overline{\overline{AC}}$ e $\overline{\overline{CB}}$.

Demonstração

Os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CB}$ têm o mesmo sentido:



Logo, temos que suas medidas algébricas $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ têm o mesmo sinal (ambas positivas ou ambas negativas). Então a razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ é positiva. Assim, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} > 0 \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \left|\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right| = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \frac{|x_C - x_A|}{|x_B - x_C|} = \frac{AC}{CB}.$$

(c.q.d.)

Exercício resolvido

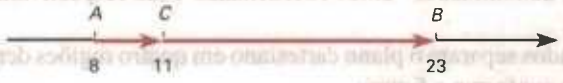
R.12 Sejam $A(8)$, $B(23)$ e $C(11)$. Calcular:

a) $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ e $\frac{AC}{CB}$;

b) $\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}$ e $\frac{BC}{CA}$.

Resolução

a)



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{11 - 8}{23 - 11} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{|x_C - x_A|}{|x_B - x_C|} = \frac{|11 - 8|}{|23 - 11|} = \frac{|3|}{|12|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Note que $\frac{AC}{CB} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$. Isso decorre do fato de os segmentos $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$ possuírem a mesma orientação.

b)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{x_C - x_B}{x_A - x_C} = \frac{11 - 23}{8 - 11} = \frac{-12}{-3} = 4;$$

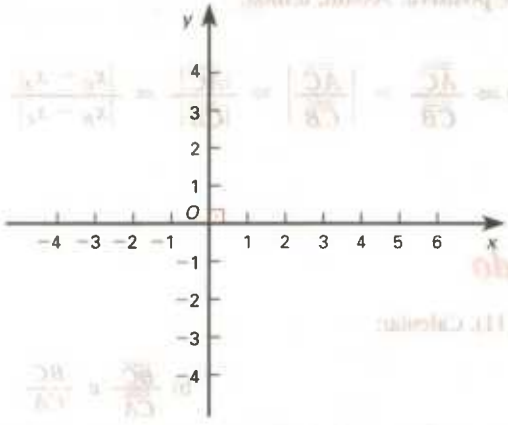
$$\frac{BC}{CA} = \frac{|x_C - x_B|}{|x_A - x_C|} = \frac{|11 - 23|}{|8 - 11|} = \frac{|-12|}{|-3|} = 4.$$

Note que $\frac{BC}{CA} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}$. Isso decorre do fato de os segmentos $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$ possuírem a mesma orientação.

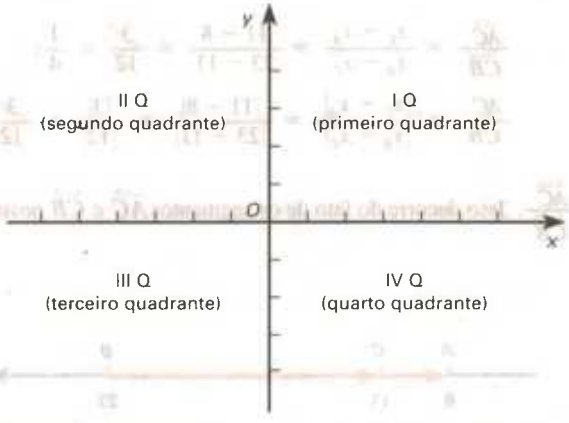
6. Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

Como vimos no volume 1 desta obra, o principal objetivo de um sistema de coordenadas é determinar um ponto através de um conjunto de informações.

Para determinar um ponto de um plano, podemos fixar nesse plano dois eixos reais Ox e Oy, perpendiculares entre si no ponto O.



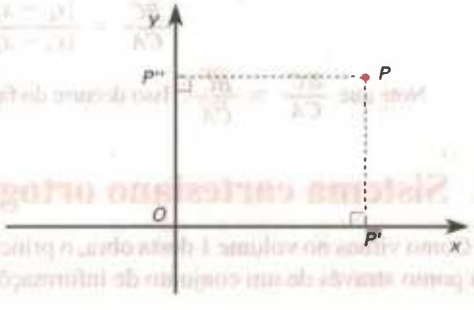
- Esse sistema é conhecido como "**sistema cartesiano ortogonal** de coordenadas".
- O plano determinado por esses eixos é chamado de **plano cartesiano**.
- O ponto O é a origem do sistema.
- Os eixos Ox e Oy, denominados "eixos coordenados", são respectivamente o **eixo das abscissas** e o **eixo das ordenadas**.
- Os eixos coordenados separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, que devem ser enumeradas conforme a figura:



Nota: os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum dos quadrantes.

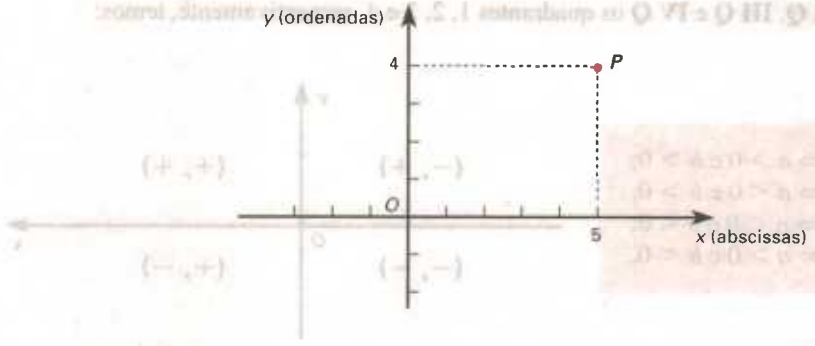
6.1. Coordenadas de um ponto no plano cartesiano

Dado um ponto P do plano cartesiano, chamamos de "projeção ortogonal de P sobre um dos eixos Ox ou Oy" a intersecção desse eixo com a reta perpendicular a ele, traçada por P.



• P' é a projeção ortogonal de P sobre o eixo Ox.
• P'' é a projeção ortogonal de P sobre o eixo Oy.
• Dizemos que as **coordenadas** do ponto P são os números associados a P' e P'' nos eixos Ox e Oy respectivamente.

Exemplo



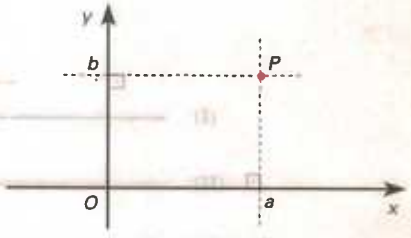
As **coordenadas** do ponto P são 5 e 4. A **abscissa** é 5; e a **ordenada** é 4. Indicamos esse fato por $P(5, 4)$. O símbolo (5, 4) é chamado de "**par ordenado** de abscissa 5 e ordenada 4".

Exercício resolvido

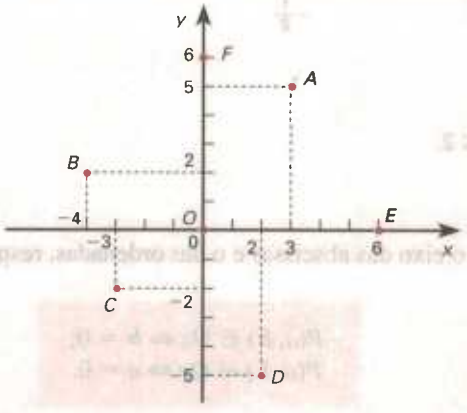
R.13 Representar no plano cartesiano os seguintes pontos:
a) $A(3, 5)$; c) $C(-3, -2)$ e) $E(6, 0)$; g) $O(0, 0)$.
b) $B(-4, 2)$; d) $D(2, -5)$; f) $F(0, 6)$;

Resolução

Para representar no plano cartesiano o ponto $P(a, b)$, traçamos pelo ponto de abscissa a do eixo Ox a reta perpendicular a esse eixo e pelo ponto de ordenada b do eixo Oy traçamos a reta perpendicular a esse eixo. A intersecção das retas traçadas é o ponto P, conforme se observa na figura ao lado.



Assim, temos:



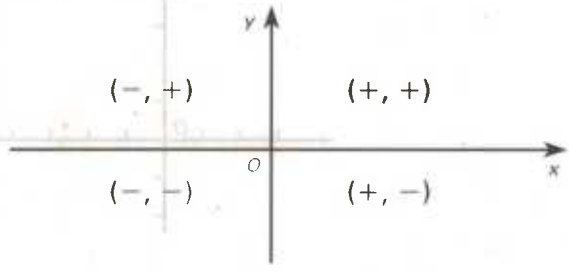
6.2. Posições notáveis no plano cartesiano

Alguns subconjuntos do plano cartesiano, por serem demasiadamente explorados no decorrer do curso, merecem ser destacados. São eles: os quadrantes, os eixos coordenados (Ox e Oy) e as bissetrizes dos quadrantes.

Os quadrantes

Indicando por **I Q**, **II Q**, **III Q** e **IV Q** os quadrantes 1, 2, 3 e 4, respectivamente, temos:

$P(a, b) \in \text{I Q} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b > 0;$
$P(a, b) \in \text{II Q} \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b > 0;$
$P(a, b) \in \text{III Q} \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b < 0;$
$P(a, b) \in \text{IV Q} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0.$



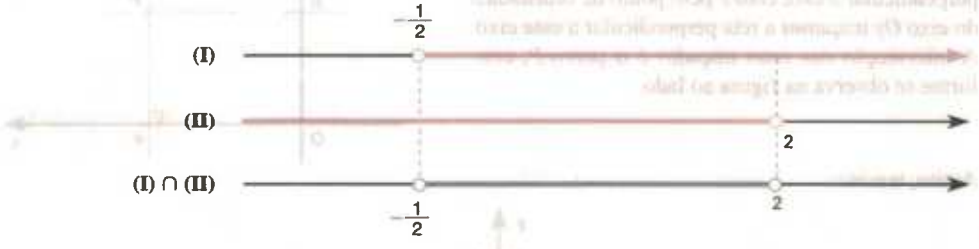
Exercício resolvido

R.14 Determinar x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o ponto $P(2x + 1, 3x - 6)$ pertença ao quarto quadrante.

Resolução

$$P \in \text{IV Q} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 3x - 6 < 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \quad \text{(I)} \\ x < 2. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo a intersecção de (I) e (II), temos que:



Portanto $-\frac{1}{2} < x < 2$.

Os eixos coordenados

Indicando por Ox e Oy o eixo das abscissas e o das ordenadas, respectivamente, temos:

$P(a, b) \in Ox \Leftrightarrow b = 0;$
$P(a, b) \in Oy \Leftrightarrow a = 0.$

Exercício resolvido

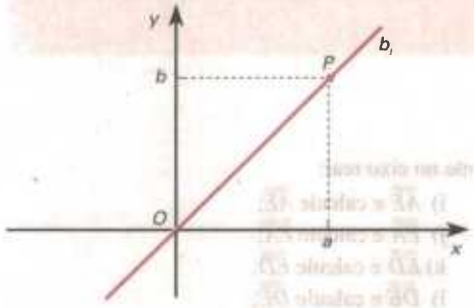
R.15 Determinar k de modo que o ponto $P(k + 5, 8)$ pertença ao eixo Oy.

Resolução

$$P \in Oy \Leftrightarrow k + 5 = 0 \;\therefore\; k = -5.$$

As bissetrizes dos quadrantes ímpares

As bissetrizes dos quadrantes 1 e 3 estão contidas na reta b_i, denominada **reta bissetriz dos quadrantes ímpares**.



$$P(a, b) \in b_i \Leftrightarrow a = b.$$

Ou seja, um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se, e somente se, possui a abscissa igual à ordenada.

Exercício resolvido

R.16 Determinar m de modo que o ponto $P(m^2 - 6m, -5)$ pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

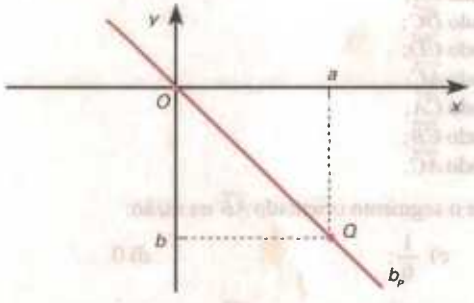
Resolução

$$P \in b_i \Leftrightarrow m^2 - 6m = -5 \;\therefore\; m^2 - 6m + 5 = 0.$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos: $m = 5$ ou $m = 1$.

As bissetrizes dos quadrantes pares

As bissetrizes dos quadrantes 2 e 4 estão contidas na reta b_p, denominada **reta bissetriz dos quadrantes pares**.



$$Q(a, b) \in b_p \Leftrightarrow a = -b.$$

Ou seja, um ponto pertence à bissetriz dos quadrantes pares se, e somente se, possui coordenadas opostas.

Exercício resolvido

R.17 Determinar a de modo que o ponto $Q(2a, a-3)$ pertença à bissetriz dos quadrantes pares.

Resolução

$$Q \in b_p \Leftrightarrow 2a = -(a-3) \;\therefore\; 2a = -a+3 \;\therefore\; 3a = 3 \;\therefore\; a = 1.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até h), B.2, B.4, B.5, B.7, B.9, B.11 (a até e), B.12, B.14, B.16, B.18, B.20, B.21, B.22, B.24, C.5.

Tarefa de casa: exercícios B.1 (i até p), B.3, B.6, B.8, B.10, B.11 (f até i), B.13, B.15, B.17, B.19, B.21, B.23, B.25, C.1, C.2, C.3, C.4, C.6, C.7.

Exercícios básicos

B.1 Dados $A(6)$, $B(9)$, $C(-2)$, $D(-5)$, $E(4)$ e $O(0)$, represente no eixo real:

a) $\overrightarrow{AB}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{AB}}$;
b) $\overrightarrow{BA}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{BA}}$;
c) $\overrightarrow{CA}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{CA}}$;
d) $\overrightarrow{AC}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{AC}}$;
e) $\overrightarrow{OA}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{OA}}$;
f) $\overrightarrow{AO}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{AO}}$;
g) $\overrightarrow{OC}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{OC}}$;
h) $\overrightarrow{CO}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{CO}}$;
i) $\overrightarrow{AE}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{AE}}$;
j) $\overrightarrow{EA}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{EA}}$;
k) $\overrightarrow{ED}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{ED}}$;
l) $\overrightarrow{DE}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{DE}}$;
m) $\overrightarrow{CD}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{CD}}$;
n) $\overrightarrow{OE}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{OE}}$;
o) $\overrightarrow{EO}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{EO}}$;
p) $\overrightarrow{OD}$ e calcule $\overline{\overrightarrow{OD}}$.

B.2 Sendo $A(5)$, determine o ponto $B(x)$ tal que $\overline{\overrightarrow{AB}} = 8$.

B.3 Dado que $A(-3)$, obtenha o ponto $B(x)$ tal que $\overline{\overrightarrow{BA}} = -2$.

B.4 Sendo $A(2)$, $B(8)$ e $C(4)$, determine:

a) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$;
b) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$.

B.5 Dados os pontos $A(3)$, $B(7)$ e $C(9)$, calcule:

a) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$;
b) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$.

B.6 Considerando os pontos $A(1)$, $B(21)$, $C(6)$ e $D(-4)$, obtenha:

a) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$;
b) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$;
c) a razão em que o ponto A divide o segmento orientado $\overrightarrow{DC}$;
d) a razão em que o ponto A divide o segmento orientado $\overrightarrow{CD}$;
e) a razão em que o ponto B divide o segmento orientado $\overrightarrow{AC}$;
f) a razão em que o ponto B divide o segmento orientado $\overrightarrow{CA}$;
g) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{CB}$;
h) a razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{AC}$.

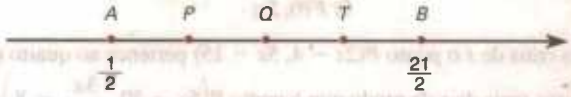
B.7 Dados $A(2)$ e $B(58)$, determine o ponto $C(x)$ que divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão:

a) 6; b) -2; c) $\frac{1}{6}$; d) 0.

B.8 Sendo $A(-4)$ e $B(32)$, obtenha o ponto $C(x)$ que divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão:

a) 3; b) -3; c) $\frac{1}{9}$; d) 0.

B.9 Obtenha a abscissa dos pontos P, Q e T que dividem o segmento $\overline{AB}$ em quatro partes congruentes.



B.10 Sendo $A(-1)$ e $B(11)$, os pontos C, D, F e E dividem o segmento $\overline{AB}$ em cinco partes congruentes. Determine a abscissa de cada um desses pontos.

B.11 Obtenha o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $A(6)$ e $B(14)$;
b) $A(0)$ e $B(8)$;
c) $A(-4)$ e $B(6)$;
d) $A(3)$ e $B(-6)$;
e) $A\left(\frac{2}{3}\right)$ e $B(1)$;
f) $A(2)$ e $B(8)$;
g) $A(-2)$ e $B(-6)$;
h) $A(-5)$ e $B(-10)$;
i) $A\left(\frac{1}{3}\right)$ e $B\left(\frac{1}{5}\right)$.

B.12 Qual é o simétrico do ponto $A(5)$ em relação ao ponto $P(9)$?

B.13 Obtenha o simétrico do ponto $A\left(\frac{2}{5}\right)$ em relação ao ponto $P(-1)$.

B.14 Dados os pontos $A(3)$, $B(8)$ e $C(-5)$, calcule:

a) o comprimento do segmento $\overrightarrow{AB}$;
b) o comprimento do segmento $\overrightarrow{BA}$;
c) o comprimento do segmento $\overline{AB}$;
d) o comprimento do segmento $\overrightarrow{AC}$;
e) o comprimento do segmento $\overrightarrow{CB}$;
f) o comprimento do segmento $\overline{BC}$.

B.15 Sendo $A(1)$, $B\left(\frac{15}{2}\right)$ e $C\left(-\frac{3}{2}\right)$, calcule:

a) o comprimento do segmento $\overrightarrow{AB}$;
b) o comprimento do segmento $\overrightarrow{BA}$;
c) o comprimento do segmento $\overline{AB}$;
d) o comprimento do segmento $\overrightarrow{AC}$;
e) o comprimento do segmento $\overrightarrow{CA}$;
f) o comprimento do segmento $\overline{AC}$.

B.16 Dado que $A(9)$, obtenha o ponto $B(x)$ tal que $AB = 6$.

B.17 Considerando o ponto $A\left(-\frac{3}{2}\right)$, obtenha o ponto $B(x)$ tal que $AB = 8$.

B.18 Sendo $A(4)$, $B(12)$ e $C(16)$, represente no eixo real:

a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, calculando a seguir $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}$ e $\frac{AB}{BC}$;

b) $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{CB}$, calculando a seguir $\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{CB}}$ e $\frac{BA}{CB}$.

B.19 Dados os pontos $A(-5)$, $B(-2)$ e $C(4)$, represente no eixo real:

a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CB}$, calculando a seguir $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}}$ e $-\frac{AB}{CB}$;

b) $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, calculando a seguir $\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}}$ e $-\frac{BA}{BC}$.

B.20 Represente no plano cartesiano cada um dos seguintes pontos:
a) $A(2, 4)$; d) $D(6, 1)$; g) $G(-3, 0)$;
b) $B(-5, 3)$; e) $E(9, 0)$; h) $H(0, -3)$.
c) $C(-2, -2)$; f) $F(0, 5)$;

B.21 Para que valores reais de x o ponto $P(2x - 4, 5x - 15)$ pertence ao quarto quadrante?

B.22 Obtenha os valores reais de x de modo que o ponto $P\left(5x - 30, \frac{3x}{2} - 8\right)$ pertença ao segundo quadrante.

B.23 Sabendo que o ponto $P(6, 4k - 1)$ pertence ao eixo das abscissas, obtenha k.

B.24 Encontre os valores de k para que o ponto $P(k^2 - 3k, 6)$ pertença ao eixo das ordenadas.

B.25 O ponto $P(2k^2 - k, -1)$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares. Determine k.

B.26 Determine k, $k \in \mathbb{R}$, de modo que o ponto $P(k^2, k)$ pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exercícios complementares

C.1 Os pontos $A(x)$, $B(3x + 1)$ e $C(x^2 + 9)$ são tais que $\overline{\overline{AC}} = 3\overline{\overline{AB}}$. Obtenha x.

C.2 O simétrico do ponto $A(5)$ em relação ao ponto P é $A'\left(\frac{7}{2}\right)$. Determine P.

C.3 O simétrico do ponto $A(k + 3)$ em relação ao ponto $P(2k - 1)$ é $A'(6k)$. Obtenha k.

C.4 Prove que, "se $A(x_A)$, $B(x_B)$ e $C(x_C)$ são pontos distintos tais que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$ têm sentidos opostos, então $\frac{AC}{CB} = -\frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}}$".

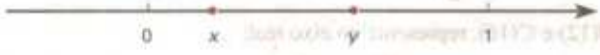
C.5 Mostre que o ponto $P(2x - 4, 5x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$, não pertence ao quarto quadrante.

C.6 Obtenha os valores reais de x de modo que o ponto $P(x^2 - 5x + 6, 2x - 5)$ pertença ao segundo quadrante.

C.7 Represente no plano cartesiano os pontos $P(x, y)$ tais que:
a) $x = y$; b) $x = -y$; c) $x = 3$; d) $y = -2$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Na figura estão representados geometricamente os números reais 0, x, y e 1. Qual a posição do número xy?



a) À esquerda de 0. c) Entre x e y. e) À direita de 1.
b) Entre 0 e x. d) Entre y e 1.

V.2 (Cescem-SP) O ponto $(a, -b)$ pertence ao segundo quadrante. Os pontos $(-a, b)$ e $(-a, -b)$ pertencem, respectivamente, aos quadrantes:
a) 3º e 1º. b) 3º e 4º. c) 4º e 3º. d) 4º e 1º. e) 1º e 3º.

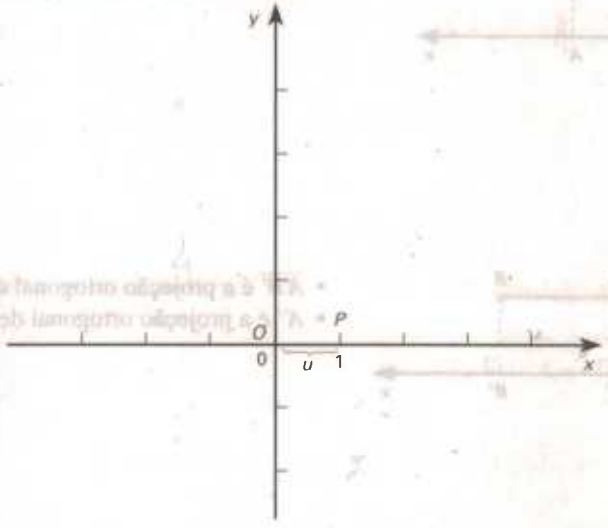
V.3 (PUC-SP) Os pontos $A(5, 3)$ e $B(5, y)$, $y \neq 5$, pertencem a semiplanos opostos em relação à reta bissetriz dos quadrantes ímpares se, e somente se:
a) $y > 5$. b) $y < 5$. c) $y > 3$. d) $y < 3$. e) $y = 2$.

Capítulo 2

Comprimento de um segmento de reta contido no plano cartesiano

1. Conceituação

Estudamos no capítulo 1 o conceito de **comprimento** de um segmento **contido no eixo real**. Para estender esse conceito para todo segmento do plano cartesiano, adotaremos como unidade de medida u o segmento $\overline{OP}$ contido no eixo Ox, tal que as abscissas de O e P são, respectivamente, 0 e 1.



Definimos como **comprimento** de qualquer segmento $\overline{AB}$ do **plano cartesiano** o número real não-negativo que indica a medida desse segmento na unidade u.

Para calcular esse comprimento, que indicamos por AB, ou por BA, necessitamos de algumas noções preliminares, que definiremos a seguir.

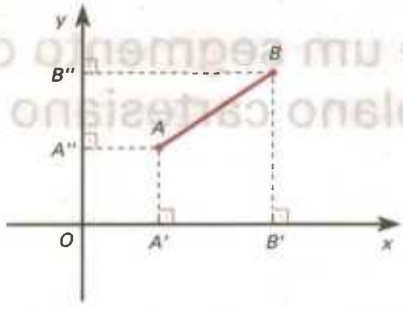
2. Projeções ortogonais de um segmento sobre os eixos coordenados

Definição

Chama-se "projeção ortogonal de um segmento $\overline{AB}$ sobre um dos eixos coordenados" o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos do segmento sobre esse eixo.

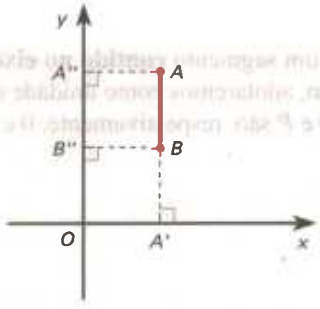
Exemplos

a)



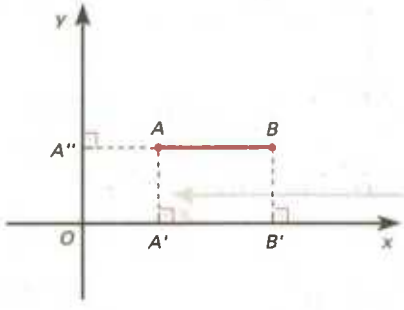
- $\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre o eixo Ox;
- $\overline{A''B''}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre o eixo Oy.

b)



- A' é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre o eixo Ox;
- $\overline{A''B''}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre o eixo Oy.

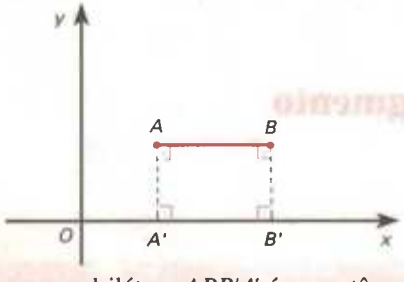
c)

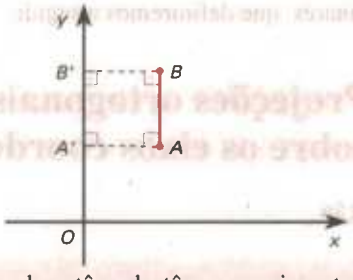


- $\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre o eixo Ox;
- A'' é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre o eixo Oy.

Propriedade

Se um segmento $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos coordenados e $\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre esse eixo, então $AB = A'B'$.

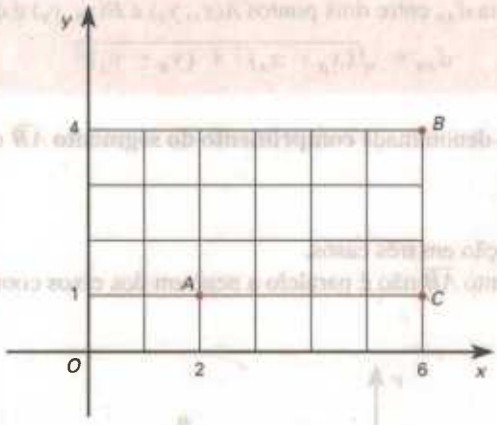




De fato, o quadrilátero $ABB'A'$ é um retângulo. Lados opostos do retângulo têm comprimentos iguais. Logo, $AB = A'B'$.

3. Distância entre dois pontos

Observando o gráfico:

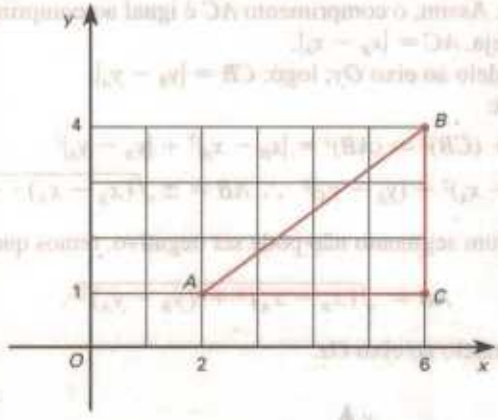


percebemos que:

- $\overline{AC}$ é paralelo ao eixo Ox; assim, o comprimento AC é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre o eixo Ox, ou seja, $AC = |6 - 2| = |4| = 4$;
- analogamente, $\overline{CB}$ é paralelo ao eixo Oy; logo, temos: $CB = |4 - 1| = |3| = 3$.

Qual é o comprimento do segmento $\overline{AB}$?

Ligando os pontos A, B e C, através de segmentos de reta, obtemos o triângulo retângulo ABC.



Pelo teorema de Pitágoras:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\therefore (AB)^2 = 25 \quad \therefore AB = \pm 5.$$

Como o comprimento de um segmento não pode ser negativo, temos que $AB = 5$.

3.1. Cálculo da distância entre dois pontos

Teorema

A distância d_{AB} entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por:

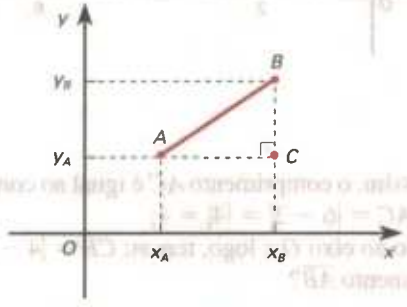
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

A distância d_{AB} é também denominada **comprimento do segmento $\overline{AB}$** e pode ser indicada simplesmente por AB.

Demonstração

Vamos fazer a demonstração em três casos.

- Primeiro caso: o segmento $\overline{AB}$ não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados.



O triângulo ABC, com $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_B, y_A)$, é retângulo em C.

$\overline{AC}$ é paralelo ao eixo Ox. Assim, o comprimento AC é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre o eixo Ox, ou seja, $AC = |x_B - x_A|$.

Analogamente, $\overline{CB}$ é paralelo ao eixo Oy; logo: $CB = |y_B - y_A|$.

Pelo teorema de Pitágoras:

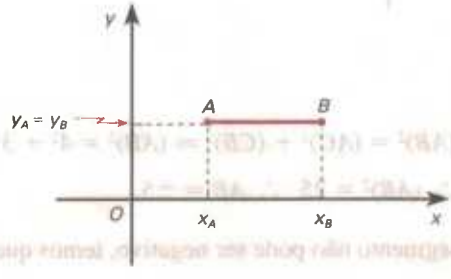
$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

$$\therefore (AB)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad \therefore AB = \pm\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Como o comprimento de um segmento não pode ser negativo, temos que:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- Segundo caso: $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo Ox.



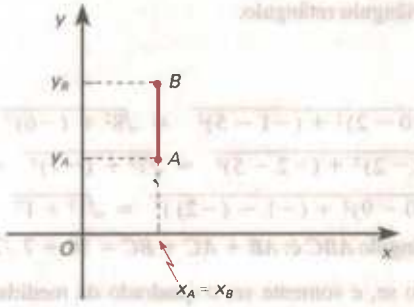
O comprimento AB é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre o eixo Ox, ou seja:

$$AB = |x_B - x_A|.$$

Como $y_A = y_B$, essa igualdade também pode ser apresentada sob a forma:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- Terceiro caso: $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo Oy.



Analogamente ao segundo caso, temos: $AB = |y_B - y_A|$.
Como $x_A = x_B$, podemos apresentar essa igualdade também sob a forma:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

(c.q.d.)

Nota: observando que $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$ e que $(y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2$, a fórmula da distância AB pode ser $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$, ou mais simplificadamente:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

em que os símbolos Δx (lê-se "delta x") e Δy (lê-se "delta y") representam, respectivamente, a diferença entre as abscissas e a diferença entre as ordenadas dos pontos A e B, em qualquer ordem. Assim, temos que:

$$(\Delta x)^2 = (x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2;$$
$$(\Delta y)^2 = (y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular a distância entre os pontos $A(4, 6)$ e $B(9, 18)$.

Resolução

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(9 - 4)^2 + (18 - 6)^2}$$
$$\therefore AB = \sqrt{5^2 + 12^2} \quad \therefore AB = \sqrt{169} \quad \therefore AB = 13.$$

Note que, se calculássemos $(\Delta x)^2$ e $(\Delta y)^2$ como:

$$(\Delta x)^2 = (4 - 9)^2 = (-5)^2 = 5^2$$
e
$$(\Delta y)^2 = (6 - 18)^2 = (-12)^2 = 12^2,$$

obteríamos o mesmo resultado.

R.2 Sendo $A(-3, 2)$ e $B(5, -4)$, calcular o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Resolução

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-4 - 2)^2}$$

$$\therefore AB = \sqrt{8^2 + (-6)^2} \quad \therefore AB = \sqrt{100} \quad \therefore AB = 10.$$

R.3 São dados $A(2, 5)$, $B(10, -1)$, e $C(9, -2)$.

a) Calcular o perímetro do triângulo ABC.

b) Mostrar que ABC é um triângulo retângulo.

Resolução

a) Temos que:

$$AB = \sqrt{(10 - 2)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10;$$

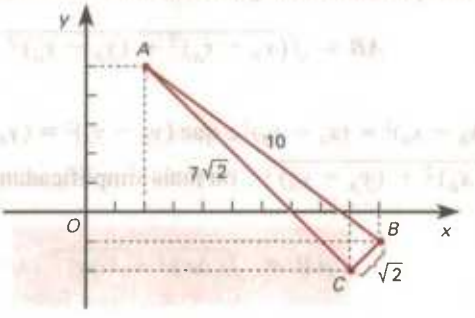
$$AC = \sqrt{(9 - 2)^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2};$$

$$BC = \sqrt{(10 - 9)^2 + (-1 - (-2))^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Logo, o perímetro do triângulo ABC é: $AB + AC + BC = 10 + 7\sqrt{2} + \sqrt{2} = 10 + 8\sqrt{2}$.

b) Um triângulo é retângulo se, e somente se, o quadrado da medida do lado maior é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados.

Calculamos no item (a) as medidas dos lados do triângulo ABC:



O maior lado mede 10 unidades e os outros lados medem $7\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

Observando que $10^2 = (7\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$ é uma sentença verdadeira, concluímos que o triângulo é retângulo.

Propriedade

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Leftrightarrow (AB)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Demonstração

- Primeira parte: provaremos que $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Rightarrow (AB)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

De fato, quadrando ambos os membros da igualdade $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, obtemos $(AB)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

- Segunda parte: provaremos que $(AB)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \Rightarrow AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

De fato, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade $(AB)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, obtemos $|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Como AB é o comprimento do segmento $\overline{AB}$, temos que $AB \geqslant 0$. Logo, $|AB| = AB$ e, portanto, $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

(c.q.d.)

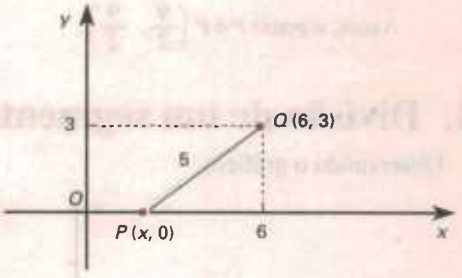
Exercícios resolvidos

R.4 Determinar o ponto P, pertencente ao eixo Ox, que dista 5 unidades do ponto $Q(6, 3)$.

Resolução

Todo ponto do eixo Ox possui ordenada zero. Logo, o ponto P é da forma $P(x, 0)$. Devemos ter $PQ = 5$, ou seja:

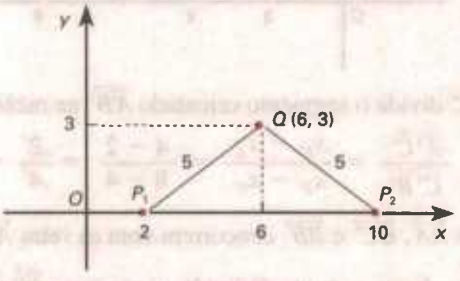
$$\sqrt{(x-6)^2 + (0-3)^2} = 5.$$



Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$(x-6)^2 + (0-3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 + 9 = 25 \quad \therefore \quad x^2 - 12x + 20 = 0.$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $x = 2$ ou $x = 10$. Assim, existem dois pontos $P(x, 0)$ que satisfazem a condição do enunciado. São eles: $P_1(2, 0)$ e $P_2(10, 0)$.

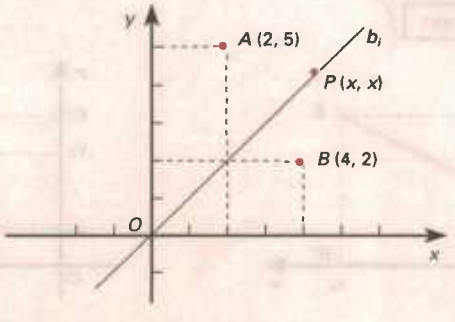


Nota: normalmente, ao quadrarmos ambos os membros de uma equação podem aparecer raízes "estranhas" à equação original. Nesse exercício, quadramos os membros da equação $\sqrt{(x-6)^2 + (0-3)^2} = 5$ e obtivemos $(x-6)^2 + (0-3)^2 = 25$. As raízes dessas equações são exatamente as mesmas, pois a propriedade que demonstramos antes desse exercício nos garante que essas equações são equivalentes. Logo, ao quadrarmos ambos os membros da primeira equação, não aparecerão raízes estranhas.

R.5 Determinar o ponto P, pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares, equidistante dos pontos $A(2, 5)$ e $B(4, 2)$.

Resolução

Todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares possui a abscissa igual à ordenada. Logo, o ponto P é da forma $P(x, x)$.



Devemos ter: $AP = BP \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (x-5)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (x-2)^2}$.

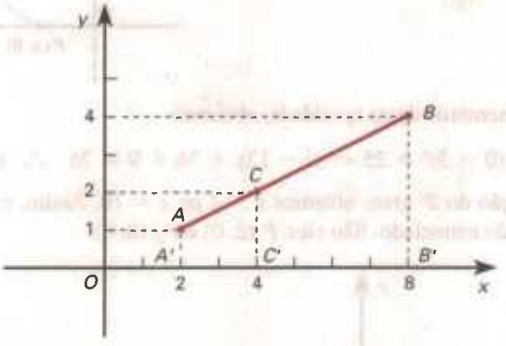
Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$(x-2)^2 + (x-5)^2 = (x-4)^2 + (x-2)^2 \therefore x^2 - 10x + 25 = x^2 - 8x + 16 \therefore 2x = 9 \therefore x = \frac{9}{2}$.

Assim, o ponto P é $P\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

4. Divisão de um segmento por um ponto

Observando o gráfico:



percebemos que o ponto C' divide o segmento orientado $\overrightarrow{A'B'}$ na razão:

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{4-2}{8-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como as retas paralelas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ concorrem com as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$, temos, pelo teorema de Tales, que: $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}$. Logo, o ponto C divide o segmento $\overrightarrow{AB}$ também na razão $\frac{1}{2}$.

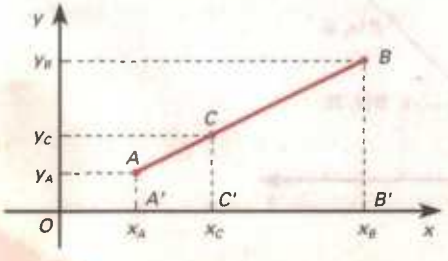
Definição

Sendo $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ pontos colineares com $B \neq C$, chama-se "razão em que o ponto C divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$" o número r tal que:

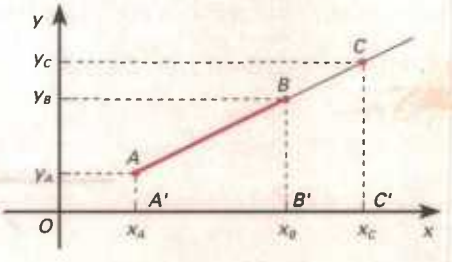
$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}.$$

Para entender essa definição, considere três pontos colineares A, B e C, com $B \neq C$:

Primeiro caso



Segundo caso



As retas paralelas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ concorrem com as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$. Assim, pelo teorema de Tales, temos que: $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$. **(I)**

• No **primeiro caso**, $\overrightarrow{A'C'}$ e $\overrightarrow{C'B'}$ têm a mesma orientação. Também têm a mesma orientação os segmentos $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$. Assim, temos que:

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} = \frac{x_{C'} - x_{A'}}{x_{B'} - x_{C'}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} \quad \textbf{(II)}$$

e

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}}. \quad \textbf{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), temos: $\frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$.

• No **segundo caso**, $\overrightarrow{A'C'}$ e $\overrightarrow{C'B'}$ têm sentidos opostos. Também têm sentidos opostos os segmentos $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$. Assim, temos que:

$$\frac{A'C'}{C'B'} = -\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} = -\frac{x_{C'} - x_{A'}}{x_{B'} - x_{C'}} = -\frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} \quad \textbf{(IV)}$$

e

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}}. \quad \textbf{(V)}$$

Substituindo (IV) e (V) em (I), temos: $\frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}$.

O raciocínio em relação ao eixo Oy é análogo.

Notas

1. Se A, B e C são pontos tais que $A = C$ e $C \neq B$, então $r = \frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}} = 0$.

2. Se A, B e C são pontos tais que $B = C$, então não existe a razão $\frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}}$.

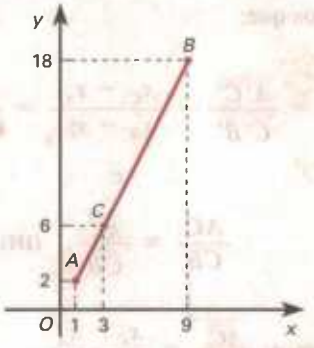
3. Se o ponto C está **entre** A e B, então a razão $r = \frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}}$ é **positiva**. Nesse caso, dizemos que o ponto C divide **interiormente** o segmento $\overrightarrow{AB}$.

4. Se A, B e C são pontos distintos e colineares tal que C é **exterior** ao segmento $\overrightarrow{AB}$, então a razão $r = \frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{\overline{CB}}}$ é **negativa**. Nesse caso, dizemos que C divide **exteriormente** o segmento $\overrightarrow{AB}$.

Exercícios resolvidos

R.6 Determinar a razão em que o ponto $C(3, 6)$ divide o segmento $\overrightarrow{AB}$, sendo $A(1, 2)$ e $B(9, 18)$.

Resolução



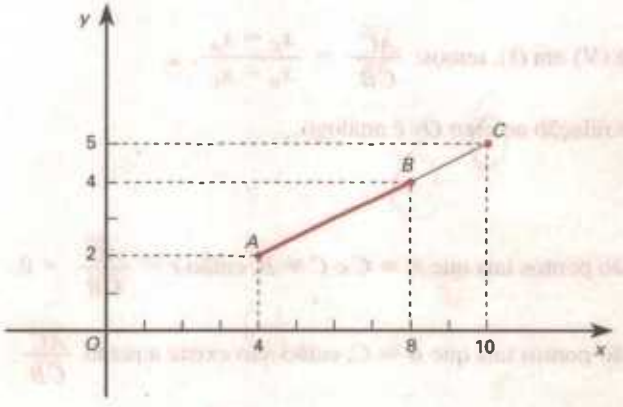
$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{3 - 1}{9 - 3} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{6}} = \frac{1}{3}.$$

Essa razão também pode ser calculada com as ordenadas dos pontos, ou seja:

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{6 - 2}{18 - 6} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{12}} = \frac{1}{3}.$$

R.7 Determinar a razão em que o ponto $C(10, 5)$ divide o segmento $\overrightarrow{AB}$, sendo $A(4, 2)$ e $B(8, 4)$.

Resolução



$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{10 - 4}{8 - 10} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{-2}} = -3.$$

Essa razão também pode ser calculada com as ordenadas dos pontos, ou seja:

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{5 - 2}{4 - 5} = \frac{3}{-1} = -3.$$

R.8 Sendo $A(1, 3)$ e $B(11, 23)$, determinar o ponto $C(x_C, y_C)$ que divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão $\frac{1}{4}$.

Resolução

- $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x_C - 1}{11 - x_C} = \frac{1}{4} \therefore 4x_C - 4 = 11 - x_C \therefore 5x_C = 15 \therefore x_C = 3.$

- $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{y_C - 3}{23 - y_C} = \frac{1}{4} \therefore 4y_C - 12 = 23 - y_C \therefore 5y_C = 35 \therefore y_C = 7.$

Logo, o ponto C é $C(3, 7)$.

R.9 Dados $A(-3, -5)$ e $B(1, -1)$, determinar o ponto $C(x_C, y_C)$ que divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão $-\frac{7}{3}$.

Resolução

- $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = -\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{x_C - (-3)}{1 - x_C} = -\frac{7}{3}$

$\therefore \frac{x_C + 3}{1 - x_C} = -\frac{7}{3} \therefore 3x_C + 9 = -7 + 7x_C \therefore 4x_C = 16 \therefore x_C = 4.$

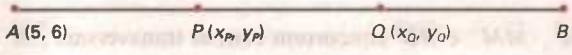
- $r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = -\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{y_C - (-5)}{-1 - y_C} = -\frac{7}{3}$

$\therefore \frac{y_C + 5}{-1 - y_C} = -\frac{7}{3} \therefore 3y_C + 15 = 7 + 7y_C \therefore 4y_C = 8 \therefore y_C = 2.$

Logo, o ponto C é $C(4, 2)$.

R.10 Dados $A(5, 6)$ e $B(8, 9)$, determinar os pontos P e Q, entre A e B, que dividem $\overline{AB}$ em três partes congruentes.

Resolução



- O ponto P divide $\overrightarrow{AB}$ na razão $\frac{1}{2}$. Logo, temos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_P - 5}{8 - x_P} = \frac{1}{2} \therefore 2x_P - 10 = 8 - x_P \therefore x_P = 6.$$

Analogamente, temos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y_P - 6}{9 - y_P} = \frac{1}{2} \therefore 2y_P - 12 = 9 - y_P \therefore y_P = 7.$$

Temos então $P(6, 7)$.

- O ponto Q divide $\overrightarrow{AB}$ na razão 2. Logo, temos:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{x_Q - x_A}{x_B - x_Q} = 2 \Rightarrow \frac{x_Q - 5}{8 - x_Q} = 2 \therefore x_Q - 5 = 16 - 2x_Q \therefore x_Q = 7$$

e

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{y_Q - y_A}{y_B - y_Q} = 2 \Rightarrow \frac{y_Q - 6}{9 - y_Q} = 2 \therefore y_Q - 6 = 18 - 2y_Q \therefore y_Q = 8.$$

Assim, o ponto Q é $Q(7, 8)$.

4.1. Coordenadas do ponto médio de um segmento

Teorema

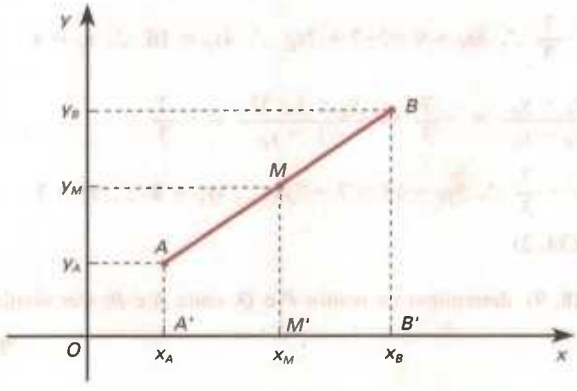
Se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são pontos distintos, então o ponto médio $M(x_M, y_M)$ do segmento $\overline{AB}$ é tal que:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Demonstração

Vamos fazer a demonstração em três casos.

- Primeiro caso: $\overline{AB}$ não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados.



As retas paralelas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{MM'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ concorrem com as transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$. Pelo teorema de Tales:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}. \quad \text{(I)}$$

Como $AM = MB$, pois M é ponto médio de $\overline{AB}$, temos que:

$$\frac{AM}{MB} = 1. \quad \text{(II)}$$

Os segmentos $\overrightarrow{A'M'}$ e $\overrightarrow{M'B'}$ têm a mesma orientação. Assim, temos que:

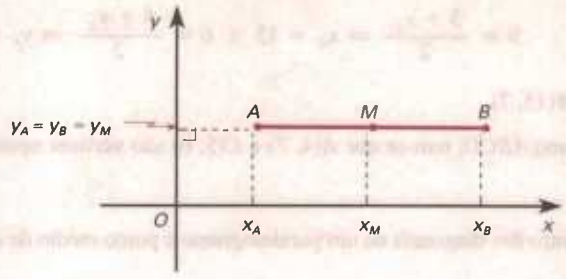
$$\frac{A'M'}{M'B'} = \frac{\overline{A'M'}}{\overline{M'B'}} = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M}. \quad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), temos:

$$1 = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \therefore 2x_M = x_A + x_B \therefore x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Raciocinando de maneira análoga em relação ao eixo Oy, obtém-se: $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

- Segundo caso: $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo Ox.

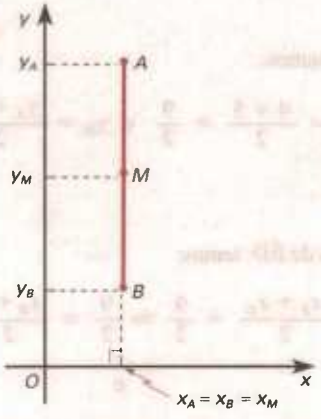


A demonstração de $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ é a mesma do caso anterior.

Podemos escrever $y_M = \dfrac{2y_M}{2} = \dfrac{y_M + y_M}{2}$. (I)

Como $y_M = y_A = y_B$, temos de (I): $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

- Terceiro caso: $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo Oy.



Demonstração análoga à do segundo caso. (c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.11 Dados $A(5, 1)$ e $B(7, -9)$, determinar o ponto médio $M(x_M, y_M)$ do segmento $\overline{AB}$.

Resolução

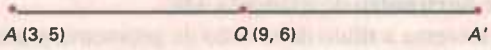
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \frac{5 + 7}{2} = 6 \text{ e } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1 + (-9)}{2} = -4.$$

Logo, o ponto M é $M(6, -4)$.

R.12 Determinar o simétrico do ponto $A(3, 5)$ em relação ao ponto $Q(9, 6)$.

Resolução

O simétrico de $A(3, 5)$ em relação a $Q(9, 6)$ é o ponto $A'(x_{A'}, y_{A'})$ tal que Q é ponto médio do segmento $\overline{AA'}$:



Assim, temos:

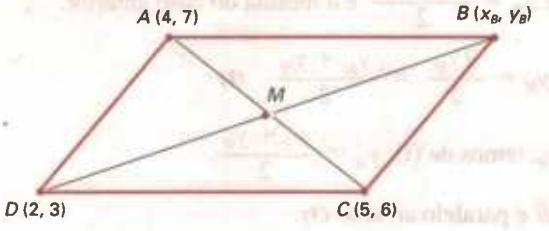
$$9 = \frac{3 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 15 \text{ e } 6 = \frac{5 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 7.$$

Logo, o ponto A' é $A'(15, 7)$.

R.13 Em um paralelogramo $ABCD$, tem-se que $A(4, 7)$ e $C(5, 6)$ são vértices opostos e $D(2, 3)$. Determinar o vértice B.

Resolução

O ponto M de encontro das diagonais de um paralelogramo é ponto médio de cada uma delas.



Como M é ponto médio de $\overline{AC}$, temos:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2} \text{ e } y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{7 + 6}{2} = \frac{13}{2}.$$

Logo, $M\left(\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

Como M também é ponto médio de $\overline{BD}$, temos:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{x_B + 2}{2} \therefore x_B = 7$$

e

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{13}{2} \Rightarrow \frac{13}{2} = \frac{y_B + 3}{2} \therefore y_B = 10.$$

Logo, $B(7, 10)$.

4.2. Baricentro de um triângulo

Teorema

Se ABC é um triângulo com medianas $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$, então essas medianas concorrem num mesmo ponto G tal que:

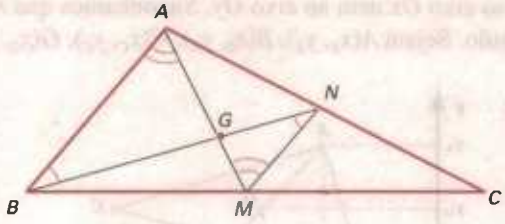
$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = \frac{2}{1}.$$

O ponto G é chamado de **baricentro** do triângulo ABC.

Vamos demonstrar esse teorema a título de revisão da geometria plana.

Demonstração

- Consideremos as medianas $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$.



Como M e N são pontos médios dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, temos que $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ e $MN = \frac{AB}{2}$. Assim, obtemos: $\frac{AB}{MN} = \frac{2}{1}$. **(I)**

Como $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, temos:

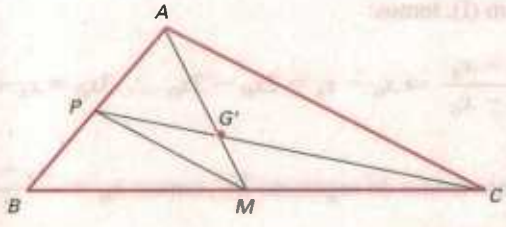
$$G\hat{A}B \equiv G\hat{M}N \text{ (alternos internos) e } A\hat{B}G \equiv G\hat{N}M \text{ (alternos internos).}$$

Portanto os triângulos AGB e MGN são semelhantes. Dessa semelhança temos:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{AB}{MN}. \quad \textbf{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos: $\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{2}{1}$.

- Consideremos agora as medianas $\overline{AM}$ e $\overline{CP}$.



Repetindo o raciocínio anterior, concluímos que: $\frac{AG'}{G'M} = \frac{CG'}{G'P} = \frac{2}{1}$.

- Temos então: $\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$ e $\frac{AG'}{G'M} = \frac{2}{1}$.

Portanto $G = G'$ e podemos escrever:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = \frac{2}{1}.$$

(c.q.d.)

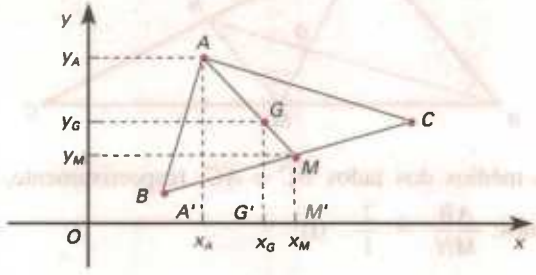
Teorema

Se $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são vértices de um triângulo, então o baricentro $G(x_G, y_G)$ desse triângulo é tal que:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Demonstração

Qualquer que seja a posição de um triângulo ABC no plano cartesiano, haverá pelo menos uma mediana que não seja paralela ao eixo Ox nem ao eixo Oy. Suponhamos que $\overline{AM}$ seja essa mediana e que G seja o baricentro do triângulo. Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $G(x_G, y_G)$ e $M(x_M, y_M)$.



As retas paralelas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{GG'}$ e $\overleftrightarrow{MM'}$ concorrem com as retas $\overleftrightarrow{AM}$ e $\overleftrightarrow{A'M'}$; o teorema de Tales nos garante que: $\frac{AG}{GM} = \frac{A'G'}{G'M'}$. (I)

Como G é baricentro, temos: $\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$. (II)

Os segmentos $\overrightarrow{A'G'}$ e $\overrightarrow{G'M'}$ têm a mesma orientação; logo, temos:

$$\frac{A'G'}{G'M'} = \frac{\overrightarrow{A'G'}}{\overrightarrow{G'M'}} = \frac{x_{G'} - x_{A'}}{x_{M'} - x_{G'}} = \frac{x_G - x_A}{x_M - x_G}. \quad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), temos:

$$\frac{2}{1} = \frac{x_G - x_A}{x_M - x_G} \Rightarrow x_G - x_A = 2x_M - 2x_G \therefore 3x_G = x_A + 2x_M. \quad \text{(IV)}$$

Como x_M é a abscissa do ponto médio do segmento $\overline{BC}$, temos: $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$. (V)

Substituindo (V) em (IV), temos:

$$3x_G = x_A + \cancel{2} \cdot \frac{x_B + x_C}{\cancel{2}} \therefore 3x_G = x_A + x_B + x_C \therefore x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

Raciocinando de modo análogo em relação ao eixo Oy, teremos $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.14 Determinar o baricentro G do triângulo ABC, dados $A(6, 5)$, $B(2, 4)$ e $C(1, -1)$.

Resolução

O baricentro $G(x_G, y_G)$ é tal que:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{6 + 2 + 1}{3} = 3 \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{5 + 4 + (-1)}{3} = \frac{8}{3}.$$

Logo, $G\left(3, \frac{8}{3}\right)$.

R.15 O baricentro de um triângulo ABC é o ponto $G(4, -1)$. Sabendo que $A(3, 6)$ e $B(4, -2)$, determinar o vértice C.

Resolução

O baricentro $G(x_G, y_G) = G(4, -1)$ é tal que:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow 4 = \frac{3 + 4 + x_C}{3} \quad \therefore \; x_C = 5$$

e

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow -1 = \frac{6 + (-2) + y_C}{3} \quad \therefore \; y_C = -7.$$

Logo, $C(5, -7)$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c), B.2, B.4, B.6, B.8 (a, b, c), B.9 (a, b, c) B.10, B.12 (a, b, c), B.13 (a), B.15 (a), B.16 (a), B.17, C.1, C.3, C.5.

Tarefa de casa: exercícios B.1 (d, e, f), B.3, B.5, B.7, B.8 (d, e, f), B.9 (d, e, f), B.11, B.12 (d, e, f), B.13 (b), B.14, B.15 (b), B.16 (b), B.18, C.2, C.4, C.6, C.7, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Calcule a distância entre os pontos A e B em cada um dos seguintes casos:

a) $A(1, 2)$ e $B(4, 6)$;
b) $A(-3, 5)$ e $B(3, 13)$;
c) $A(-1, 3)$ e $B(1, -1)$;
d) $A(4, 6)$ e $B(9, 18)$;
e) $A(0, -3)$ e $B(3, -7)$;
f) $A(0, 0)$ e $B(1, 1)$.

B.2 São dados $A(3, -1)$, $B(1, 1)$ e $C(5, 5)$.

a) Calcule o perímetro do triângulo ABC.
b) Mostre que ABC é um triângulo retângulo.

B.3 São dados $A(0, 5)$, $B(1, 2)$ e $C(4, 1)$.

a) Calcule o perímetro do triângulo ABC.
b) Mostre que ABC é um triângulo obtusângulo.

B.4 Obtenha o ponto P do eixo das ordenadas que dista 10 unidades do ponto $Q(6, -5)$.

B.5 Qual é o ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, que dista 13 unidades do ponto $Q(-8, 5)$?

B.6 O ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes pares e sua distância ao ponto $Q(1, -2)$ é $\sqrt{5}$. Determine P.

B.7 O ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares e o ponto Q pertence ao eixo das abscissas. Determine esses pontos, sabendo que a distância entre eles é 5 unidades e que a abscissa de Q tem 4 unidades a mais que a de P.

B.8 Determine a razão em que o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(1, 6)$, $B(9, 14)$ e $C(3, 8)$;
b) $A(-1, -1)$, $B(2, 5)$ e $C(11, 23)$;
c) $A(4, 1)$, $B(10, 7)$ e $C(2, -1)$;
d) $A(3, 5)$, $B(8, 10)$ e $C(4, 6)$;
e) $A(0, -1)$, $B(2, 5)$ e $C(6, 17)$;
f) $A(3, 7)$, $B(9, 19)$ e $C(1, 3)$.

B.9 Determine o ponto $C(x_C, y_C)$ que divide o segmento $\overline{AB}$ na razão r em cada um dos seguintes casos:

a) $A(1, 4)$, $B(7, 12)$ e $r = \frac{1}{2}$;
b) $A(-1, 1)$, $B(8, 10)$ e $r = 2$;
c) $A(-2, 6)$, $B(0, 3)$ e $r = -2$;
d) $A(-4, 1)$, $B(8, 25)$ e $r = 4$;
e) $A(-10, 5)$, $B(-2, 8)$ e $r = -3$;
f) $A(1, 2)$, $B(-3, 6)$ e $r = -\frac{2}{3}$.

B.10 Dados $A(4, 1)$ e $B(10, 5)$, determine os pontos P e Q, entre A e B, que dividem o segmento $\overline{AB}$ em três partes congruentes.

B.11 Sendo $A(-3, 2)$ e $B(9, 6)$, obtenha os pontos P, Q e T, entre A e B, que dividem o segmento $\overline{AB}$ em quatro partes congruentes.

B.12 Encontre o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $A(4, 6)$ e $B(8, 10)$;

b) $A(-3, 1)$ e $B(5, -7)$;

c) $A(1, 3)$ e $B\left(2, \frac{3}{5}\right)$;

d) $A(10, 2)$ e $B(6, 8)$;

e) $A(6, -3)$ e $B(-2, -1)$;

f) $A(0, 3)$ e $B\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

B.13 Determine o simétrico de A em relação ao ponto Q em cada um dos seguintes casos:

a) $A(3, 8)$ e $Q(-2, 1)$;

b) $A(-5, 2)$ e $Q\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

B.14 Dois vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ são os pontos $A(2, 3)$ e $B(5, 4)$. O ponto de intersecção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ é $Q(4, 6)$. Obtenha C e D.

B.15 Calcule o comprimento da mediana relativa ao vértice A do triângulo ABC em cada um dos seguintes casos:

a) $A(2, 6)$, $B(-3, 12)$ e $C(1, 8)$;

b) $A(-1, 3)$, $B(4, 2)$ e $C(18, -6)$.

B.16 Determine o baricentro do triângulo ABC em cada um dos seguintes casos:

a) $A(1, 3)$, $B(5, -2)$ e $C(12, 2)$;

b) $A(-5, 2)$, $B(-1, -4)$ e $C(4, 1)$.

B.17 O baricentro de um triângulo ABC é o ponto $G(-1, 5)$. Obtenha o vértice C sabendo que $A(1, 6)$ e $B(0, 2)$.

B.18 As abscissas dos vértices de um triângulo ABC estão em progressão aritmética de razão 3 e as ordenadas estão em progressão geométrica de razão 2. Obtenha esses vértices sabendo que o baricentro do triângulo é o ponto $G(1, 2)$.

Exercícios complementares

C.1 Os pontos $A(2, 2)$, $B(x, 1)$ e $C(-1, 3)$ são vértices de um triângulo retângulo em B. Determine x.

C.2 O triângulo equilátero ABC é tal que $A(0, 2)$ e $B(2, 0)$. Obtenha o vértice C.

C.3 Determine o ponto equidistante dos pontos $A(6, 8)$, $B(2, 4)$ e $C(0, -2)$.

C.4 Obtenha o centro da circunferência circunscrita ao triângulo cujos vértices são os pontos $A(-1, 3)$, $B(-3, 1)$ e $C(3, -1)$.

C.5 Dois vértices opostos de um quadrado $ABCD$ são os pontos $A(2, 5)$ e $C(2, 9)$. Obtenha os outros dois vértices.

C.6 Dois vértices consecutivos de um quadrado são os pontos $A(1, 4)$ e $B(3, 6)$. Determine os outros dois vértices.

C.7 Os pontos $M(2, 3)$, $N(-1, -1)$ e $P(11, 4)$ são pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, de um triângulo ABC. Calcule o perímetro do triângulo ABC.

C.8 As bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um trapézio são tais que $A(2, 4)$, $B(8, 10)$, $C(6, 14)$ e $D(4, 12)$. Calcule a medida da base média do trapézio.

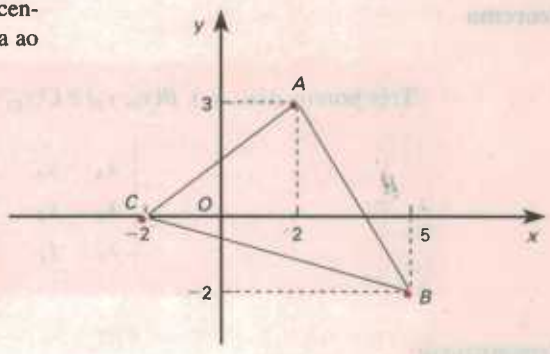
Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Sendo $A(3, 1)$, $B(4, -4)$ e $C(-2, 2)$ vértices de um triângulo, então esse triângulo é:
a) triângulo retângulo e não isósceles.
b) triângulo retângulo e isósceles.
c) triângulo equilátero.
d) triângulo isósceles e não retângulo.
e) nenhuma das respostas anteriores.

V.2 (Cescea-SP) O ponto do eixo Ox equidistante dos pontos $(0, -1)$ e $(4, 3)$ é:
a) $(-1, 0)$. b) $(1, 0)$. c) $(2, 0)$. d) $(3, 0)$. e) $(8, 0)$.

V.3 (UFMG) Considere $A = (2, 1)$ e $B = (4, 0)$ dois pontos no plano coordenado. As coordenadas do ponto C, simétrico do ponto A em relação ao ponto B, são:
a) $(6, -1)$. b) $(3, 1)$. c) $(2, -1)$. d) $\left(3, \frac{1}{2}\right)$. e) $(1, 0)$.

V.4 (FUC-MT) Determine as coordenadas do baricentro $G(x, y)$ do triângulo representado na figura ao lado. Então:
a) $G(0, 2)$.
b) $G\left(3, \frac{1}{3}\right)$.
c) $G\left(2, \frac{1}{3}\right)$.
d) $G\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
e) $G(2, 0)$.



V.5 (EPUSP) Seja C o ponto de encontro das medianas do triângulo OAB de ângulo reto A. Sendo $O(0, 0)$ e $A(3, 0)$, a abscissa de C:
a) é inferior a 1.
b) é 1.
c) é 1,5.
d) só pode ser conhecida se for dada a ordenada de B.
e) nenhuma das respostas anteriores.

Capítulo 3
A equação da reta

1. Condição de alinhamento de três pontos por determinante

Teorema

Três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração

- Primeira parte:

Hipótese

A, B e C são pontos colineares.

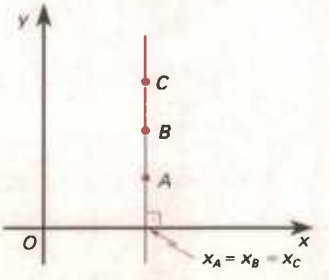
$\Rightarrow$

Tese

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

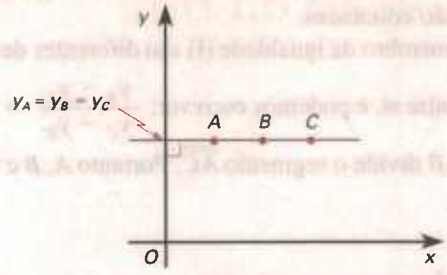
Se dois dos três pontos coincidirem, por exemplo $A = B$, teremos $x_A = x_B$ e $y_A = y_B$. Assim, o determinante terá duas linhas iguais e, portanto, será igual a zero.

Se os três pontos pertencerem a uma mesma reta perpendicular ao eixo Ox, então teremos $x_A = x_B = x_C$:



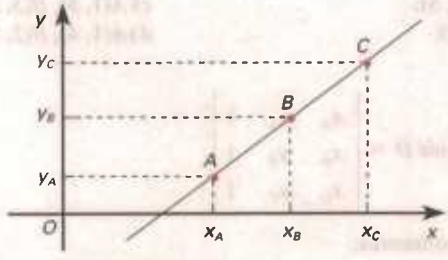
Assim, o determinante terá a primeira e a terceira coluna proporcionais e, portanto, seu valor será zero.

Se os três pontos pertencerem a uma mesma reta perpendicular ao eixo Oy, então teremos $y_A = y_B = y_C$:



Assim, o determinante terá a segunda e a terceira coluna proporcionais e, portanto, seu valor será zero.

Se os três pontos forem distintos e pertencerem a uma reta não paralela a um dos eixos, então, pelo teorema de Tales, temos:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B} = \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} \therefore (x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_B)(y_B - y_A)$$

$$\therefore x_B y_C - x_B y_B - x_A y_C + x_A y_B = x_C y_B - x_C y_A - x_B y_B + x_B y_A$$

$$\therefore x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0 \therefore \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Segunda parte:

Hipótese

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \Rightarrow$$

Tese

A, B e C são pontos colineares.

Desenvolvendo o determinante, temos: $x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0$.
Somando ao primeiro membro dessa igualdade a expressão $x_B y_B - x_B y_B$, temos:

$$\overbrace{x_A y_B} + \underbrace{x_B y_C} + \underbrace{x_C y_A} - \underbrace{x_C y_B} - \overbrace{x_A y_C} - \underbrace{x_B y_A} + \underbrace{x_B y_B} - \underbrace{x_B y_B} = 0$$

$$\therefore x_B(y_C - y_B) - x_A(y_C - y_B) - x_C(y_B - y_A) + x_B(y_B - y_A) = 0$$

$$\therefore (y_C - y_B)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_B) = 0$$

$$\therefore (y_C - y_B)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x_C - x_B). \quad \textbf{(I)}$$

Há duas possibilidades:

1ª) Pelo menos um fator de cada membro da igualdade (I) é zero; nesse caso, ou pelo menos dois dos três pontos A, B e C coincidem ou esses pontos pertencem a uma reta perpendicular a um dos eixos coordenados e, portanto, A, B e C são colineares.

2ª) Os dois fatores de cada membro da igualdade (I) são diferentes de zero; nesse caso, temos que os pontos A, B e C são distintos entre si, e podemos escrever: $\frac{y_B - y_A}{y_C - y_B} = \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

Essa é a razão em que o ponto B divide o segmento $\overline{AC}$. Portanto A, B e C são colineares.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Verificar se os pontos A, B e C são ou não colineares nos seguintes casos:

a) $A(1, 2)$, $B(0, -1)$ e $C(2, 5)$;

b) $A(4, 1)$, $B(4, 2)$ e $C(4, 7)$;

c) $A(1, 5)$, $B(3, 5)$ e $C(8, 5)$;

d) $A(1, 4)$, $B(2, 5)$ e $C(1, 3)$.

Resolução

Basta calcular o determinante $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

- $D = 0 \Rightarrow A$, B e C são colineares;
- $D \neq 0 \Rightarrow A$, B e C não são colineares.

a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 2 - 5 = 0.$

Logo, A, B e C são colineares.

b) $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$.

Como a primeira e a terceira coluna são proporcionais, temos que $D = 0$. Logo, A, B e C são colineares.

c) $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Como a segunda e a terceira coluna são proporcionais, temos que $D = 0$. Logo, A, B e C são colineares.

d) $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 + 4 - 5 - 3 - 8 = -1.$

Como $D \neq 0$, temos que A, B e C **não** são colineares.

R.2 Determinar os valores de a de modo que os pontos $A(5a - 6, 2)$, $B(a^2, 8)$ e $C(4, 12)$ sejam colineares.

Resolução

Os pontos A, B e C são colineares se, e somente se: $\begin{vmatrix} 5a - 6 & 2 & 1 \\ a^2 & 8 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Desenvolvendo esse determinante, temos:

$$8(5a - 6) + 12a^2 + 8 - 32 - 12(5a - 6) - 2a^2 = 0$$
$$\therefore 40a - 48 + 12a^2 + 8 - 32 - 60a + 72 - 2a^2 = 0$$
$$\therefore 10a^2 - 20a = 0 \quad \therefore a(10a - 20) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = 2.$$

Logo, A B e C são colineares se, e somente se, $a = 0$ ou $a = 2$.

2. Equação da reta

Consideremos os pontos $A(2, 1)$, $B(1, -1)$ e um ponto genérico $G(x, y)$. Para que A, B e G sejam colineares, devemos ter: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Desenvolvendo esse determinante, temos:

$$x - 2 + y - 1 + x - 2y = 0$$
$$\therefore \quad 2x - y - 3 = 0.$$

Essa equação representa todos os pontos $G(x, y)$ que estão alinhados com $A(2, 1)$ e $B(1, -1)$ e, por isso, é chamada de "**equação da reta** $\overleftrightarrow{AB}$".

Generalizando, temos:

Dados dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, uma equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercícios resolvidos

R.3 Determinar uma equação da reta que passa pelos pontos $A(3, 1)$ e $B(6, 3)$.

Resolução

Um ponto genérico $G(x, y)$ pertence à reta que passa por $A(3, 1)$ e $B(6, 3)$ se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

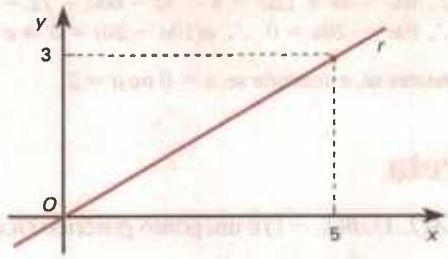
Desenvolvendo esse determinante, temos:

$$x + 9 + 6y - 6 - 3x - 3y = 0 \quad \therefore -2x + 3y + 3 = 0.$$

Assim, uma equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $-2x + 3y + 3 = 0$.

Nota: multiplicando essa equação por uma constante k, $k \neq 0$, obtemos uma outra equação equivalente a ela. Por exemplo, multiplicando-a por -1, obtemos a equação $2x - 3y - 3 = 0$, que é outra equação da mesma reta $\overleftrightarrow{AB}$.

R.4 Determinar uma equação da reta r representada a seguir:



Resolução

A reta r passa pelos pontos $O(0, 0)$ e $A(5, 3)$. A equação de todos os pontos $G(x, y)$ que pertencem a r é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo esse determinante temos: $5y - 3x = 0$.

3. Equação geral da reta

Teorema

Toda reta r do plano cartesiano pode ser representada por uma equação da forma:

$$ax + by + c = 0, \text{ com } \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0,$$

denominada "**equação geral** da reta".

Demonstração

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos da reta r. Um ponto $G(x, y)$ pertence a r se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo esse determinante temos:

$$y_A x + x_A y_B + x_B y - x_B y_A - y_B x - x_A y = 0 \;\therefore\; (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0.$$

Como os pontos A e B são distintos, temos que $y_A - y_B \neq 0$ ou $x_B - x_A \neq 0$. Fazendo:

$$\begin{aligned} y_A - y_B &= a \\ x_B - x_A &= b \\ x_A x_B - x_B y_A &= c, \end{aligned}$$

temos que a equação da reta r é: $ax + by + c = 0$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

(c.q.d.)

Nota: existem **infinitas** equações gerais de uma mesma reta. Observe que, se uma reta r tem equação geral $3x - 2y + 5 = 0$, então, multiplicando por k, $k \in \mathbb{R}^*$, ambos os membros dessa equação, obtém-se uma outra equação equivalente. Por exemplo:

$$k = 2 \Rightarrow 6x - 4y + 10 = 0 \text{ e } k = 3 \Rightarrow 9x - 6y + 15 = 0$$

são equações gerais da reta r.

Teorema

Toda equação da forma:

$ax + by + c = 0$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$,

representa uma reta no plano cartesiano.

Demonstração

Supondo $a \neq 0$, tomemos dois pontos A e B, distintos, que satisfaçam a equação $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{by + c}{a}$:

- para $y = 0$, temos o ponto $A\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)$;
- para $y = 1$, temos o ponto $B\left(-\dfrac{b + c}{a}, 1\right)$.

Um ponto genérico $G(x, y)$ pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$ se, e somente se: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -\frac{c}{a} & 0 & 1 \\ -\frac{b+c}{a} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Desenvolvendo o determinante temos: $-\dfrac{c}{a} - \left(\dfrac{b + c}{a}\right)y - x + \dfrac{cy}{a} = 0.$

Multiplicando por $-a$ ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$c + (b + c)y + ax - cy = 0 \ \therefore\ c + by + cy + ax - cy = 0 \ \therefore\ ax + by + c = 0.$$

Portanto a equação $ax + by + c = 0$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, representa a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Supondo $b \neq 0$, a demonstração é análoga.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

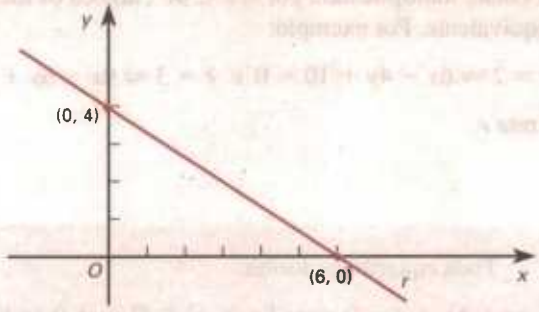
R.5 Construir o gráfico da reta r, de equação geral $2x + 3y - 12 = 0$.

Resolução

Dois pontos distintos determinam uma reta. Assim, vamos obter dois pontos distintos da reta r e construir a reta que passa por eles:

- fazendo $x = 0$, temos $2 \cdot 0 + 3y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$;
- fazendo $y = 0$, temos $2x + 3 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow x = 6$.

Portanto dois pontos distintos de r são (0, 4) e (6, 0). Logo, o gráfico de r é:



R.6 Dar uma equação geral do eixo Ox.

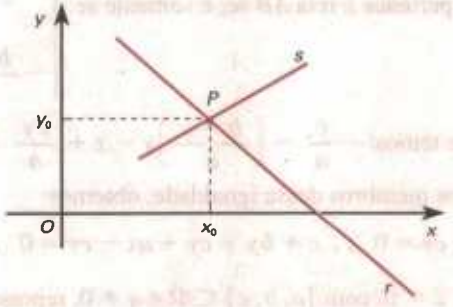
Resolução

Tomemos dois pontos distintos do eixo Ox, por exemplo (0, 0) e (1, 0). A equação dos pontos (x, y) alinhados com (0, 0) e (1, 0) é: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Desenvolvendo esse determinante, temos $y = 0$, que é uma equação geral do eixo Ox.

4. Intersecção de duas retas concorrentes

Se um ponto $P(x_0, y_0)$ satisfaz as equações de duas retas concorrentes r e s, dizemos que P é ponto de intersecção de r e s.



Se r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, então $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$, ou seja, as coordenadas de P satisfazem as equações r e s simultaneamente. Sendo assim, para obter $r \cap s$, basta resolver o sistema: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$. Pelo teorema de **Cramer**, temos que esse sistema terá uma única solução se, e somente se: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Essa é a condição necessária e suficiente para que as retas r e s sejam concorrentes.

Exercícios resolvidos

R.7 Mostrar que as retas $r: 2x - y - 5 = 0$ e $s: 3x + y - 10 = 0$ são concorrentes e determine o ponto comum a ambas.

Resolução

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & (r) \\ 3x + y = 10. & (s) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5$$

Como $D \neq 0$, temos que r e s são concorrentes. Somando membro a membro as equações de r e s, temos:

$$5x = 15 \Rightarrow x = 3.$$

Substituindo $x = 3$ na equação de r, obtemos $2 \cdot 3 - y = 5 \Rightarrow y = 1$.

Logo, $r \cap s = \{(3, 1)\}$.

R.8 Determinar o ponto de intersecção da reta $r: 5x - 2y + 3 = 0$ com o eixo Ox.

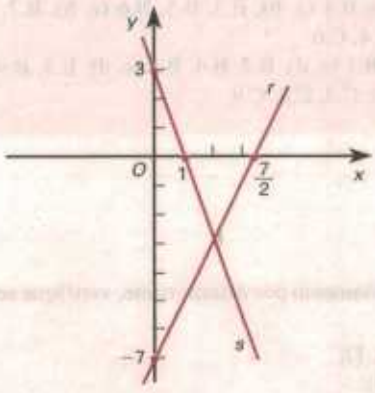
Resolução

Vimos no exercício R.6 que a equação do eixo Ox é $y = 0$. Assim, o ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox é dado pelo sistema $\begin{cases} 5x - 2y + 3 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$

Substituindo $y = 0$ na primeira equação, temos $5x - 2 \cdot 0 + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$.

Logo, o ponto comum à reta r e ao eixo Ox é $\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$.

R.9 Determinar o ponto comum às retas r e s do gráfico:



Resolução

A reta r passa pelos pontos $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ e $(0, -7)$; logo, sua equação é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{7}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{49}{2} + 7x - \frac{7y}{2} = 0 \therefore r: 2x - y - 7 = 0.$$

A reta s passa pelos pontos $(1, 0)$ e $(0, 3)$; logo, sua equação é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3 - 3x - y = 0 \ \therefore \ s: 3x + y - 3 = 0.$$

O ponto comum a r e s é dado pelo sistema $\begin{cases} r: 2x - y - 7 = 0 \\ s: 3x + y - 3 = 0. \end{cases}$

Somando membro a membro as equações de r e s, temos $5x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2$.
Substituindo $x = 2$ na equação de r, temos $2 \cdot 2 - y - 7 = 0 \Rightarrow y = -3$.
Logo, $r \cap s = \{(2, -3)\}$.

R.10 Determinar o(s) ponto(s) da reta r: $2x + y - 5 = 0$ que dista(m) 10 unidades do ponto $P(-5, -5)$.

Resolução

Tomemos um ponto **genérico** da reta r. Para isso, basta atribuir um valor **genérico** para x. Fazendo $x = a$, temos $2a + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 - 2a$.
Assim, um ponto genérico da reta r é $G(a, 5 - 2a)$.
A equação $d_{GP} = 10$ nos fornecerá o valor conveniente de a, isto é:

$$d_{GP} = 10 \Rightarrow \sqrt{(a - (-5))^2 + (5 - 2a - (-5))^2} = 10 \ \therefore \ \sqrt{(a + 5)^2 + (10 - 2a)^2} = 10.$$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$$(a + 5)^2 + (10 - 2a)^2 = 10^2 \ \therefore \ a^2 + 10a + 25 + 100 - 40a + 4a^2 = 100$$
$$\therefore 5a^2 - 30a + 25 = 0 \ \therefore \ a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ ou } a = 5.$$

- Para $a = 1$, temos $G(1, 5 - 2 \cdot 1)$, ou seja, $G(1, 3)$.
- Para $a = 5$, temos $G'(5, 5 - 2 \cdot 5)$, ou seja, $G'(5, -5)$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.3, B.5, B.6 (a, b), B.7, B.10, B.11 (a até d), B.12, B.14, B.16, B.17, C.1, C.4, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2, B.4, B.6 (c, d), B.8, B.9, B.11 (e até h), B.13, B.15, B.18, B.19, C.2, C.3, C.5, C.7, C.8, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Usando a condição de alinhamento por determinante, verifique se os pontos A, B e C são ou não colineares nos seguintes casos:

a) $A(0, -1)$, $B(3, 5)$ e $C(1, 1)$;
b) $A(4, 5)$, $B(1, 0)$ e $C(2, 3)$;
c) $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ e $C(1, 3)$;
d) $A(1, 3)$, $B(3, 4)$ e $C(0, -2)$.

B.2 O ponto $P(1, -2)$ pertence à reta que passa pelos pontos $A(2, 1)$ e $B(-1, -8)$? Por quê?

B.3 Para que valor de p os pontos $A(1, p)$, $B(2, 7)$ e $C(p - 1, -5)$ são colineares?

B.4 Obtenha a de modo que os pontos $A(2a^2, -1)$, $B(8, 1)$ e $C(4 - 2a, 0)$ sejam colineares.

B.5 Para que valores de h os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 5)$ e $C(2h, 3h)$ são vértices de um triângulo?

B.6 Determine uma equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ nos seguintes casos:

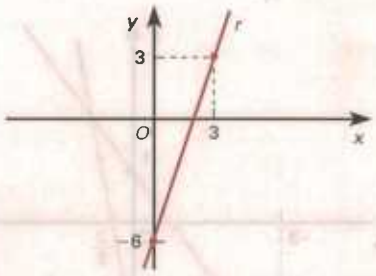
a) $A(2, 4)$ e $B(0, 1)$;

b) $A(2, 3)$ e $B(5, 8)$;

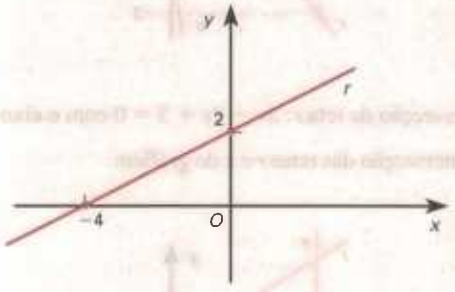
c) $A(0, 1)$ e $B\left(1, \frac{4}{3}\right)$;

d) $A(5, 2)$ e $B(-3, -2)$.

B.7 Qual é a equação da reta r do gráfico?

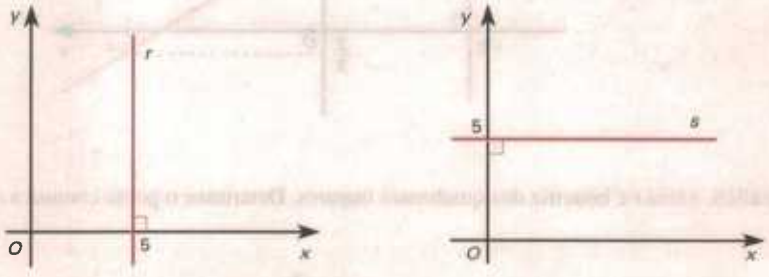


B.8 Obtenha uma equação da reta r do gráfico:



B.9 Encontre uma equação geral do eixo Oy.

B.10 São dados os gráficos:



Obtenha uma equação geral para cada uma das retas, r e s.

B.11 Construa o gráfico de cada uma das seguintes retas:

a) $5x - 4y - 20 = 0$;

b) $2x - 7y + 14 = 0$;

c) $5x - 3y + 1 = 0$;

d) $x = 3$;

e) $4x - 3y - 24 = 0$;

f) $7x + y - 7 = 0$;

g) $y = 2$;

h) $x = 0$.

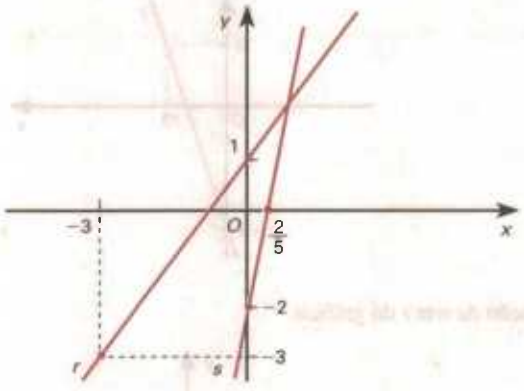
B.12 Mostre que as retas r: $5x - y - 4 = 0$ e s: $2x + y - 3 = 0$ são concorrentes e determine o ponto comum a ambas.

B.13 Verifique se as retas r: $3x + 2y - 7 = 0$ e s: $2x + 3y + 2 = 0$ são concorrentes. Em caso afirmativo, determine o ponto de concorrência de ambas.

B.14 Para que valores de a as retas r: $ax + 2y - 5 = 0$ e s: $3x + y - 3 = 0$ são concorrentes?

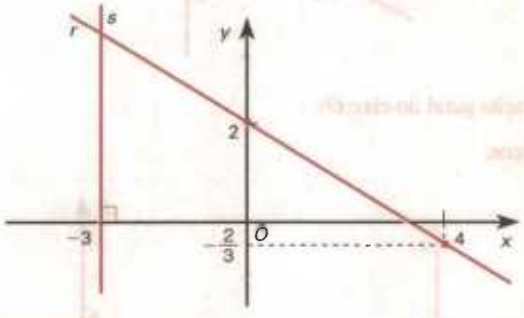
B.15 Obtenha os valores de a para que as retas r: $ax + 2y - 1 = 0$ e s: $2x + ay - 3 = 0$ tenham um único ponto comum.

B.16 Determine o ponto comum às retas r e s do gráfico:

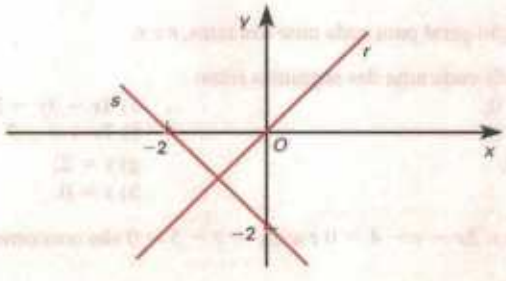


B.17 Qual é o ponto de intersecção da reta r: $3x - 2y + 5 = 0$ com o eixo Oy?

B.18 Obtenha o ponto de intersecção das retas r e s do gráfico:



B.19 No gráfico, a reta r é bissetriz dos quadrantes ímpares. Determine o ponto comum a r e s.



Exercícios complementares

C.1 Prove que os pontos $A(1, 4)$, $B(a - 1, 3a - 2)$ e $C(0, 1)$ são colineares para qualquer valor real de a.

C.2 Demonstre que os pontos $A(2, 2)$, $B\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} + 1\right)$ e $C(1, 1)$ são vértices de um triângulo para qualquer valor real de a.

C.3 Determine a equação da reta que contém a mediana relativa ao vértice A do triângulo ABC, onde $A(2, 5)$, $B(1, 3)$ e $C(7, 9)$.

C.4 Obtenha o(s) ponto(s) da reta r: $2x - y + 1 = 0$ que dista(m) 5 unidades do ponto $P(4, -1)$.

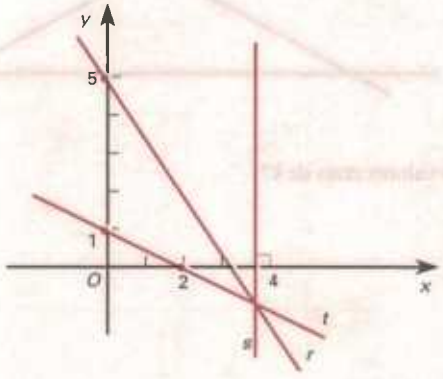
C.5 Encontre o(s) ponto(s) da reta r: $3x + y - 1 = 0$ cuja(s) distância(s) ao ponto $Q(-11, 3)$ é(são) igual(is) a 13 unidades.

C.6 Calcule o perímetro do triângulo cujos lados estão contidos respectivamente nas retas r: $x - 2y + 5 = 0$, s: $x + 2y + 5 = 0$ e t: $x - 3 = 0$.

C.7 Mostre que o triângulo cujos lados estão contidos, respectivamente, nas retas r: $x + 2y - 12 = 0$, s: $2x - y + 11 = 0$ e t: $y = 3$ é um triângulo retângulo.

C.8 Dados $A(5, 8)$ e $B(-1, 2)$, determine a equação da reta que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e forma com os eixos Ox e Oy um triângulo isósceles.

C.9 Obtenha a equação da reta r no gráfico:



Questões dos vestibulares

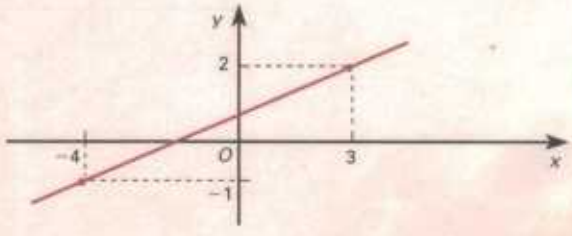
V.1 (FEI-SP) Os pontos $(a, 1)$ e $(2, b)$ pertencem à reta r: $x + 2y = 0$. Calcule a distância entre eles.

V.2 (Faap-SP) Na prática de *cooper*, um corredor se desloca do ponto $A = (-3, -2)$ até o ponto $C = (5, 4)$ em linha reta, tendo um repouso num ponto B. As possíveis coordenadas deste ponto B são:

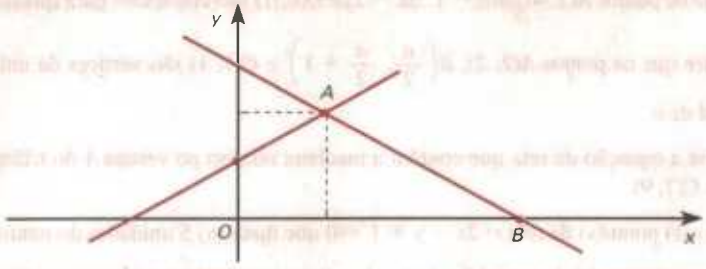
a) $B = (2, 7)$. b) $B = (4, 3)$. c) $B = (3, 5)$. d) $B = (2, 2)$. e) $B = (1, 1)$.

V.3 (Unifor-CE) A equação da reta r, representada ao lado, é:

a) $-7x + 3y + 15 = 0$.
b) $7x - 3y - 15 = 0$.
c) $-3x + 7y - 5 = 0$.
d) $2x + 5y - 3 = 0$.
e) $5x + y - 2 = 0$.



V.4 (UFMG) Observe a figura.



Os pontos A e B são vértices opostos de um quadrado e as retas têm equações $y = x + 1$ e $y = -x + 3$. Pode-se afirmar que o perímetro desse quadrado é:

a) 8. b) $8\sqrt{2}$. c) 12. d) $4(\sqrt{2} + 2)$. e) 16.

V.5 (UFRJ) As retas de equações $x + y = 4$, $x - y = 2$ e $2x + y = k$ são concorrentes duas a duas em três pontos distintos, como ilustra a figura.

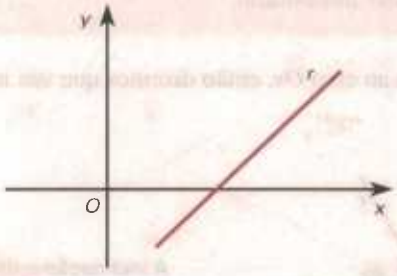
Quais são os possíveis valores reais de k?

Capítulo 4

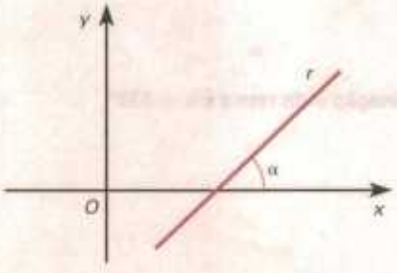
Equação fundamental da reta

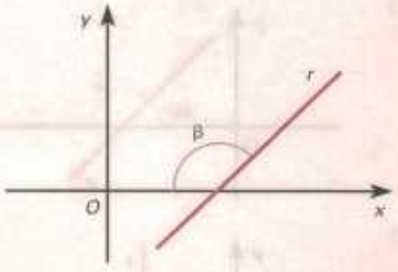
1. Inclinação de uma reta

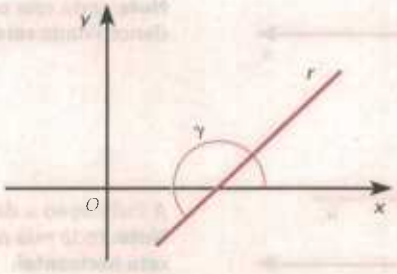
Observe a reta r representada no plano cartesiano.



Podemos medir vários ângulos que essa reta forma com o eixo Ox. Por exemplo:



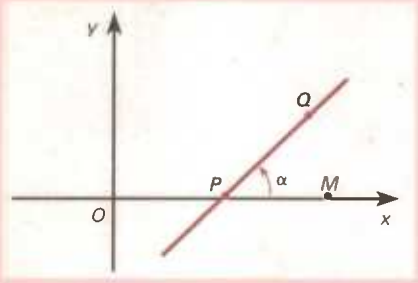




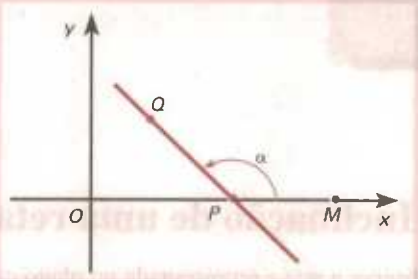
Vamos adotar uma definição de modo que não haja dúvida sobre qual desses ângulos queremos indicar ao nos referirmos à **inclinação da reta** r.

Definição

Seja r uma reta do plano cartesiano ortogonal concorrente com o eixo Ox no ponto $P(x_P, 0)$ e que passa pelo ponto $Q(x_Q, y_Q)$, com $y_Q > 0$. Seja $M(x_M, 0)$, com $x_M > x_P$:



ou

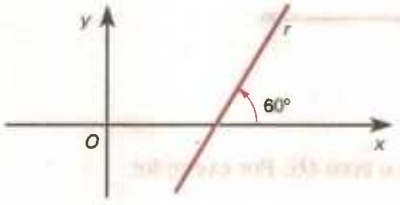


Chama-se **inclinação da reta *r*** a medida α, $0° \leq \alpha < 180°$, do ângulo $M\hat{P}Q$ orientado a partir do lado $\overrightarrow{PM}$ no sentido anti-horário.

Nota: se uma reta s é paralela ao eixo Ox, então dizemos que sua inclinação é 0°.

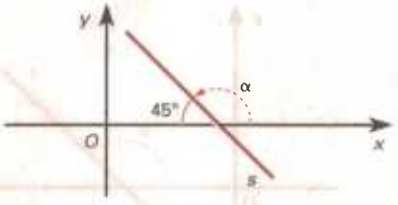
Exemplos

a)



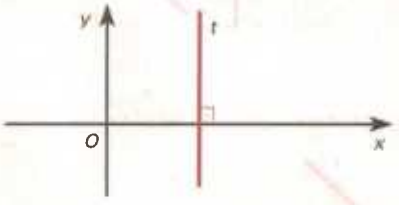
A inclinação α da reta r é $\alpha = 60°$.

b)



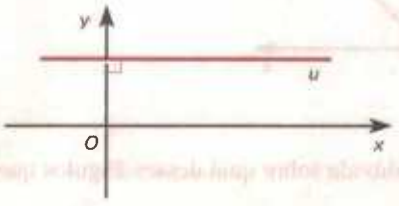
A inclinação α da reta s é $\alpha = 135°$.

c)



A inclinação α da reta t é $\alpha = 90°$.
Nota: toda reta perpendicular ao eixo Ox é denominada **reta vertical**.

d)



A inclinação α da reta u é $\alpha = 0°$.
Nota: toda reta paralela ao eixo Ox é denominada **reta horizontal**.

2. Coeficiente angular de uma reta

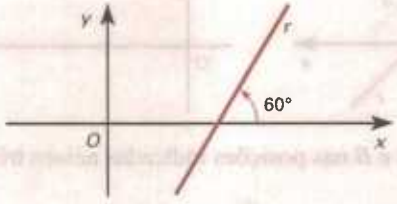
Definição

Chama-se **coeficiente angular de uma reta *r* de inclinação** α, $\alpha \neq 90°$, o número m tal que:

$$m = \operatorname{tg} \alpha.$$

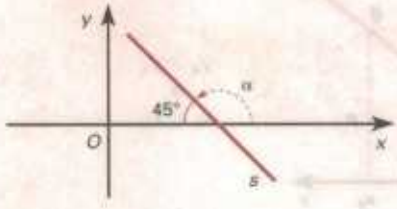
Exemplos

a)



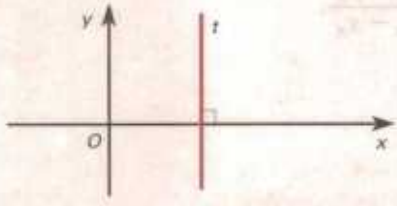
O coeficiente angular de *r* é $m_r = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

b)



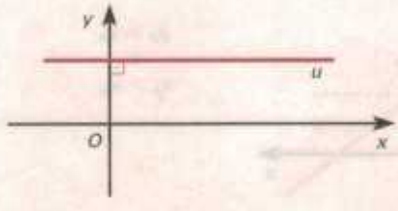
O coeficiente angular de *s* é $m_s = \operatorname{tg} 135° = -1$.

c)



Retas verticais **não têm** coeficiente angular, pois **não existe** tg 90°.

d)

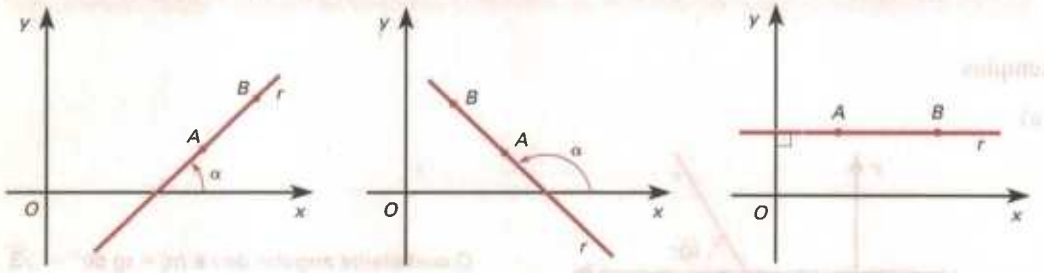


O coeficiente angular de *u* é $\operatorname{tg} 0° = 0$.

2.1. Cálculo do coeficiente angular de uma reta não-vertical por dois de seus pontos

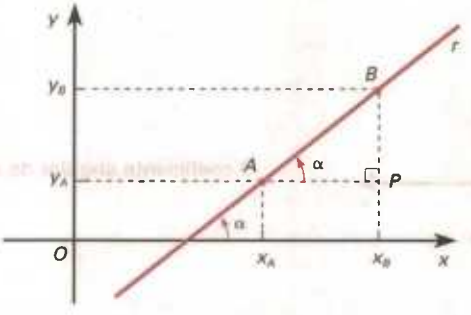
Consideremos dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ de uma reta r não-vertical, de inclinação α:

Primeiro caso: $0° < \alpha < 90°$	Segundo caso: $\alpha > 90°$	Terceiro caso: $\alpha = 0°$



Sem perda de generalidade, podemos supor os pontos A e B nas posições indicadas nesses três casos.

- Primeiro caso:

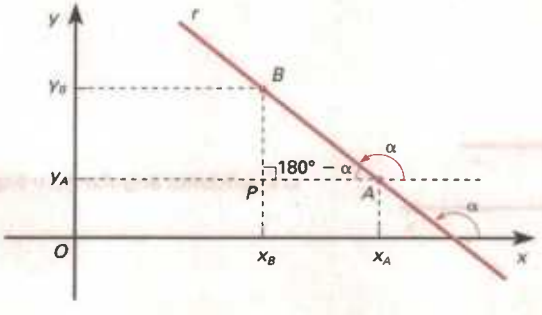


$y_B > y_A$
e
$x_B > x_A$.

No triângulo retângulo ABP, temos $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{PB}{AP} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Logo, o coeficiente angular da reta r é $m_r = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

- Segundo caso:



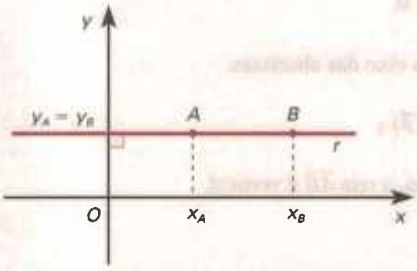
$y_B > y_A$
e
$x_A > x_B$.

No triângulo retângulo ABP temos:

$$\text{tg}\,(180^\circ - \alpha) = \frac{PB}{PA} = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \quad \therefore \quad -\text{tg}\,\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \quad \therefore \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Logo, o coeficiente angular de r é $m_r = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

- Terceiro caso:



$x_B > x_A$

O coeficiente angular de r é $m_r = \text{tg}\,0^\circ = 0$. Note que esse coeficiente angular pode ser calculado como nos casos anteriores, ou seja, $m_r = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0}{x_B - x_A} = 0$.

Resumindo, o coeficiente angular da reta r em qualquer um dos três casos é $m_r = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Multiplicando por -1 o numerador e o denominador dessa fração, obtemos uma fração equivalente a ela: $m_r = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

Para simplificar a notação, vamos indicar por Δy a diferença entre as ordenadas e por Δx a diferença entre as abscissas:

$$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Cuidado! As diferenças Δy e Δx devem ser efetuadas num mesmo sentido, isto é, ambas de A para B, $\dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, ou ambas de B para A, $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(2, 5)$ e $B(4, 11)$;
b) $A(6, 4)$ e $B(2, 12)$;
c) $A(-1, 4)$ e $B(5, -8)$;
d) $A(5, 8)$ e $B(3, 8)$;
e) $A(6, 1)$ e $B(6, 4)$.

Resolução

a) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{11 - 5}{4 - 2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Note que podemos calcular esse coeficiente angular de A para B, ou seja:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 11}{2 - 4} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

b) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{12 - 4}{2 - 6} = \dfrac{8}{-4} = -2.$

c) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-8 - 4}{5 - (-1)} = \dfrac{-12}{6} = -2.$

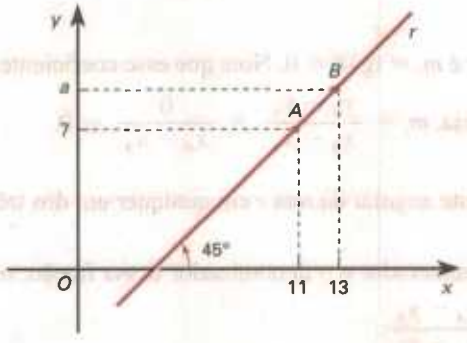
d) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{8 - 8}{5 - 3} = \dfrac{0}{2} = 0.$

Note que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela ao eixo das abscissas.

e) $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4 - 1}{6 - 6} = \dfrac{3}{0}$. (∄)

Assim sendo, não existe m. Logo, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é vertical.

R.2 Seja o seguinte gráfico:



Determinar o valor de a.

Resolução

Temos que:

$$\begin{cases} m_r = \text{tg } 45° = 1 \\ A(11, 7) \\ B(13, a) \end{cases} \quad \therefore mr = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow 1 = \frac{a - 7}{13 - 11} \quad \therefore 1 = \frac{a - 7}{2} \Rightarrow a = 9.$$

3. Condição de alinhamento de três pontos por coeficiente angular

Teorema

Três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares se, e somente se, $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.

(Os símbolos m_{AB} e m_{BC} indicam, respectivamente, os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.)

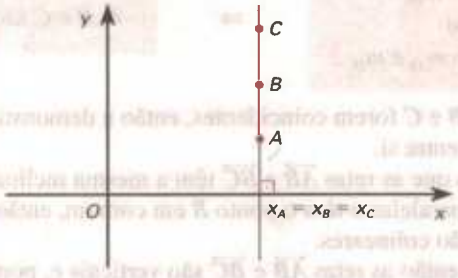
Demonstração

- Primeira parte:

Hipótese		Tese
A, B e C são pontos colineares.	$\Rightarrow$	$m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.

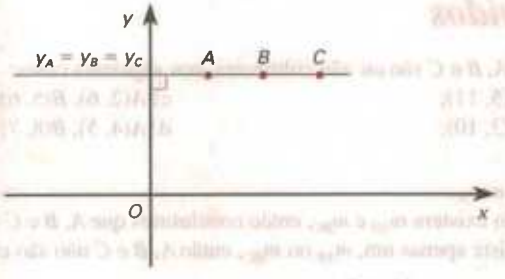
Se dois dos três pontos A, B e C forem coincidentes, então a demonstração é imediata. Suponhamos que os pontos sejam distintos entre si.

Se A, B e C pertencem a uma reta vertical, então $x_A = x_B = x_C$:



Logo, não existem m_{AB} e m_{BC}.

Se A, B e C pertencem a uma reta horizontal, então $y_A = y_B = y_C$:

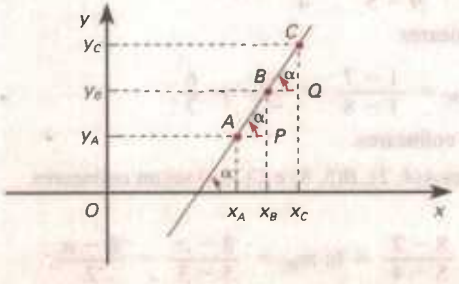


Logo, temos que:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0}{x_B - x_A} = 0 \ (B \neq A); \quad m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{0}{x_C - x_B} = 0. \ (C \neq B)$$

Portanto $m_{AB} = m_{BC}$.

Se A, B e C pertencem a uma reta não-vertical e não-horizontal:



$y_C > y_B > y_A$;
$x_C > x_B > x_A$.

No triângulo retângulo ABP, temos $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{PB}{AP} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. (I)

No triângulo retângulo BCQ, temos $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{QC}{BQ} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$. (II)

Por (I) e (II), concluímos que $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$.

Logo, $m_{AB} = m_{BC}$.

- Segunda parte:

Hipótese

$m_{AB} = m_{BC}$
ou
não existem m_{AB} e m_{BC}.

$\Rightarrow$

Tese

A, B e C são colineares.

Se dois dos três pontos A, B e C forem coincidentes, então a demonstração é imediata. Suponhamos que os pontos sejam distintos entre si.

Se $m_{AB} = m_{BC}$, então temos que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm a mesma inclinação e, portanto, são paralelas. Ora, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e têm o ponto B em comum, então são paralelas **coincidentes** e, portanto, os pontos A, B e C são colineares.

Se não existem m_{AB} e m_{BC}, então as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são verticais e, portanto, são paralelas. Ora, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e têm o ponto B em comum, então são paralelas **coincidentes** e, portanto, A, B e C são colineares.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.3 Verificar se os pontos A, B e C são ou não colineares, nos seguintes casos:

a) $A(2, 5)$, $B(3, 7)$ e $C(5, 11)$;
b) $A(3, 9)$, $B(3, 6)$ e $C(3, 10)$;
c) $A(2, 6)$, $B(5, 6)$ e $C(9, 6)$;
d) $A(4, 5)$, $B(8, 7)$ e $C(1, 1)$.

Resolução

Devemos calcular m_{AB} e m_{BC}.

- Se $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}, então concluímos que A, B e C são colineares.
- Se $m_{AB} \neq m_{BC}$ ou existe apenas um, m_{AB} ou m_{BC}, então A, B e C não são colineares.

a) $m_{AB} = \dfrac{7-5}{3-2} = 2$; $m_{BC} = \dfrac{11-7}{5-3} = 2$.

$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow A$, B e C são colineares.

b) $m_{AB} = \dfrac{9-6}{3-3} = \dfrac{3}{0}$ ($\nexists$); $m_{BC} = \dfrac{6-10}{3-3} = \dfrac{-4}{0}$. ($\nexists$)

$\nexists\, m_{AB}$ e $\nexists\, m_{BC} \Rightarrow A$, B e C são colineares.

c) $m_{AB} = \dfrac{6-6}{5-2} = \dfrac{0}{3} = 0$; $m_{BC} = \dfrac{6-6}{9-5} = \dfrac{0}{4} = 0$.

$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow A$, B e C são colineares.

d) $m_{AB} = \dfrac{7-5}{8-4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $m_{BC} = \dfrac{1-7}{1-8} = \dfrac{-6}{-7} = \dfrac{6}{7}$.

$m_{AB} \neq m_{BC} \Rightarrow A$, B e C **não** são colineares.

R.4 Determinar a de modo que os pontos $A(4, 2)$, $B(5, 8)$ e $C(3, a)$ sejam colineares.

Resolução

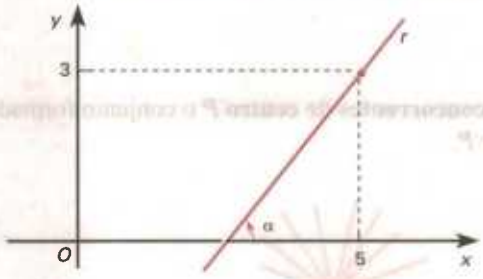
$$m_{AB} = \frac{8-2}{5-4} = 6;\ m_{BC} = \frac{8-a}{5-3} = \frac{8-a}{2}.$$

Para que A, B e C sejam colineares, devemos ter $m_{AB} = m_{BC}$, ou seja:

$$\frac{8 - a}{2} = 6 \Rightarrow 8 - a = 12 \therefore a = -4.$$

4. Equação fundamental da reta

Consideremos a reta r que passa pelo ponto $P(5, 3)$ e tem coeficiente angular $m = 4$.



$m = \text{tg } \alpha = 4$

Podemos obter uma equação de r em função de $P(5, 3)$ e $m = 4$ do modo descrito a seguir. Consideremos um ponto genérico $G(x, y)$ distinto de P. O ponto G pertence à reta r se, e somente se, o coeficiente angular calculado através de P e G é igual a 4, ou seja:

$$m_{PG} = 4 \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 5} = 4$$

$$\therefore y - 3 = 4(x - 5) \Rightarrow y - 3 = 4x - 20 \therefore 4x - y - 17 = 0.$$

Essa equação representa todos os pontos da reta r. Note que, apesar de termos considerado o ponto genérico $G(x, y)$ distinto de $P(5, 3)$, o ponto P também satisfaz a equação $4x - y - 17 = 0$. Observe:

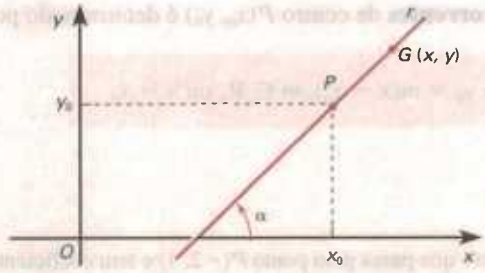
$$4 \cdot \underbrace{5}_{x} - \underbrace{3}_{y} - 17 = 0.$$

De modo geral, temos o seguinte teorema:

Teorema

Se r é a reta **não-vertical** que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m, então uma equação de r é $y - y_0 = m(x - x_0)$, denominada **equação fundamental da reta**.

Demonstração



$m = \text{tg } \alpha$

Seja $G(x, y)$ um ponto genérico, distinto de P. O ponto G pertence à reta r se, e somente se, o coeficiente angular calculado através de P e G é igual a m, ou seja:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \;\therefore\; y - y_0 = m(x - x_0).$$

Note que o ponto $P(x_0, y_0)$ também satisfaz essa equação. Observe:

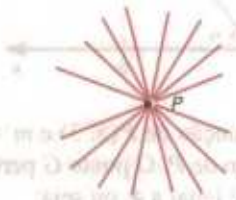
$$y_0 - y_0 = m(x_0 - x_0) \Rightarrow 0 = 0.$$

Assim, a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ representa **todos** os pontos da reta r.

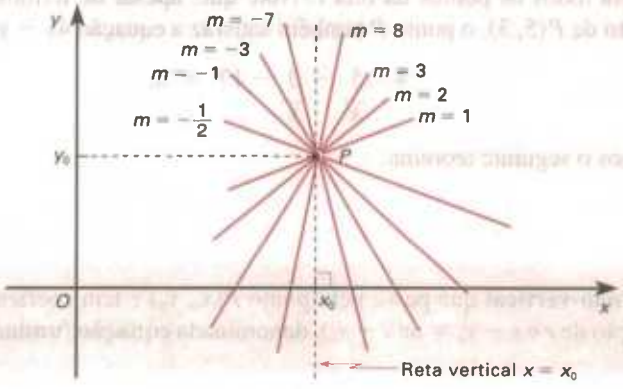
(c.q.d.)

Notas

1. Chama-se **feixe plano de retas concorrentes de centro P** o conjunto formado por todas as retas de um mesmo plano α que passam por P.



2. Na equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, atribuindo a m **todos** os valores reais, obtemos todas as retas não-verticais que passam pelo ponto $P(x_0, y_0)$. A única reta que passa por $P(x_0, y_0)$ e não pode ser obtida dessa equação é a reta vertical $x = x_0$.



Assim, o **feixe plano de retas concorrentes** de centro $P(x_0, y_0)$ é determinado por:

$$y - y_0 = m(x - x_0),\ m \in \mathbb{R},\ \text{ou}\ x = x_0.$$

Exercícios resolvidos

R.5 Determinar uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-2, 1)$ e tem coeficiente angular $m = -3$.

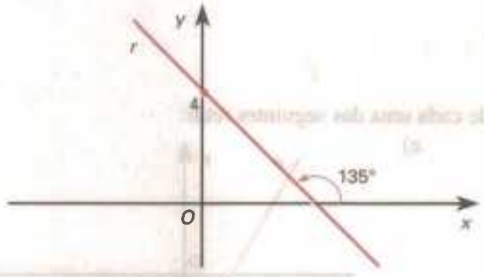
Resolução

Na equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, substituindo x_0, y_0 e m, respectivamente, por -2, 1 e -3, temos:

$$y - 1 = -3(x - (-2)) \;\therefore\; y - 1 = -3(x + 2) \;\therefore\; y - 1 = -3x - 6 \;\therefore\; 3x + y + 5 = 0.$$

Assim, uma equação da reta r é $3x + y + 5 = 0$.

R.6 Determinar uma equação da reta r do gráfico.



Resolução

A reta r passa pelo ponto $P(0, 4)$ e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 135° = -1$:

$$r \begin{cases} P(0, 4) \\ m = -1. \end{cases}$$

Substituindo $x_0 = 0$, $y_0 = 4$ e $m = -1$ na equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - 4 = -1(x - 0) \Rightarrow y - 4 = -x \;\therefore\; x + y - 4 = 0.$$

Assim, a reta r tem como equação $x + y - 4 = 0$.

R.7 Usando a equação fundamental, obter uma equação da reta que passa pelos pontos $A(2, 5)$ e $B(4, 1)$.

Resolução

Calculando o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$, temos $m_{AB} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1 - 5}{4 - 2} = -2$.

Com esse coeficiente angular e **qualquer** um dos dois pontos A ou B, obtemos a equação pedida:

$$\overleftrightarrow{AB} \begin{cases} A(2, 5) \\ m = -2. \end{cases}$$

Fazendo $x_0 = 2$, $y_0 = 5$ e $m = -2$ na equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

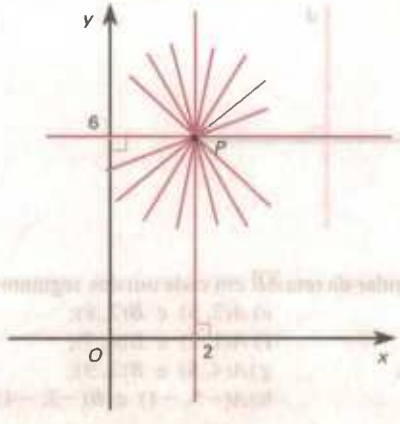
$$y - 5 = -2(x - 2) \Rightarrow y - 5 = -2x + 4 \;\therefore\; 2x + y - 9 = 0.$$

Essa é uma equação de $\overleftrightarrow{AB}$.

R.8 Dar as equações de todas as retas do plano cartesiano que passam pelo ponto $P(2, 6)$.

Resolução

A equação $y - 6 = m(x - 2)$, $m \in \mathbb{R}$, representa todas as retas não-verticais que passam por $P(2, 6)$. A única reta que não é representada por essa equação é a vertical $x = 2$. Assim, as equações de todas as retas que passam por $P(2, 6)$ são $y - 6 = m(x - 2)$, $m \in \mathbb{R}$, ou $x = 2$. Em outras palavras, dizemos que essas são as equações do **feixe de retas concorrentes** de centro $P(2, 6)$.



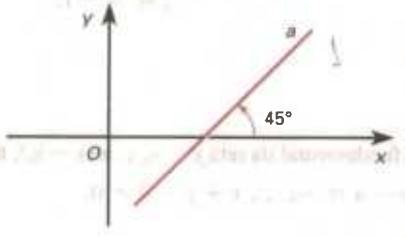
Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até d), B.2 (a até e), B.3, B.5, B.7 (a até d), B.8 (a até d), B.9 (a, b), B.11 (a, b), B.12 (a, b), B.13, B.15, C.1, C.3, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (e, f, g), B.2 (f até j), B.4, B.6, B.7 (e até h), B.8 (e até h), B.9 (c, d, e), B.10, B.11 (c, d), B.12 (c, d), B.14, B.16, C.2, C.5, C.6, C.7.

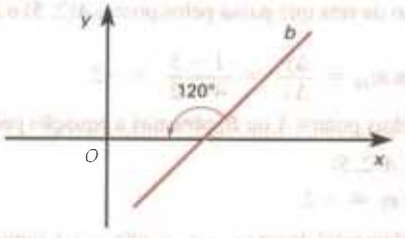
Exercícios básicos

B.1 Determine a inclinação e o coeficiente angular de cada uma das seguintes retas:

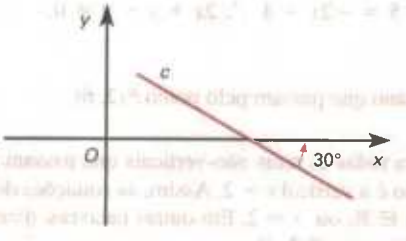
a)



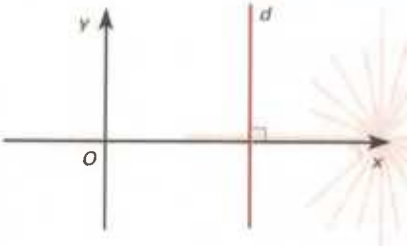
b)



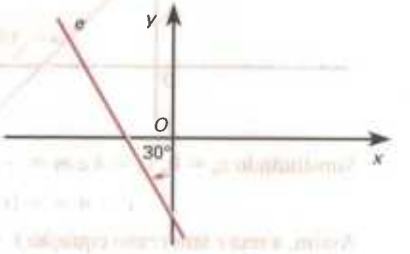
c)



d)

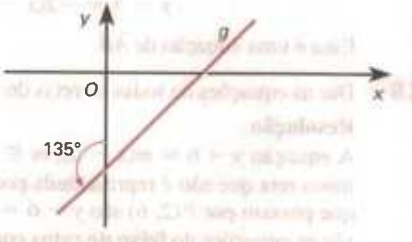


e)



f)

g)



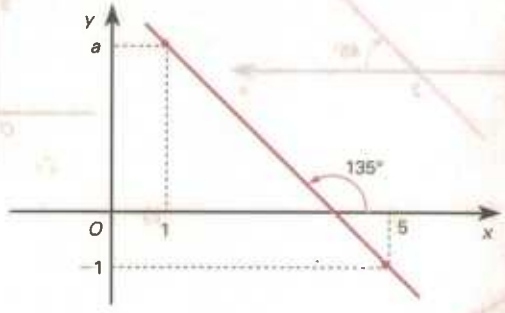
B.2 Calcule o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $A(2, 6)$ e $B(4, 14)$;
b) $A(1, 4)$ e $B(2, 1)$;
c) $A(-3, 5)$ e $B(1, -1)$;
d) $A(4, 6)$ e $B(3, 6)$;
e) $A(2, 5)$ e $B(2, 8)$;
f) $A(1, 3)$ e $B(4, 7)$;
g) $A(4, 8)$ e $B(2, 9)$;
h) $A(-5, -1)$ e $B(-3, -4)$;
i) $A(-1, 3)$ e $B(-2, 3)$;
j) $A(8, 1)$ e $B(8, 6)$.

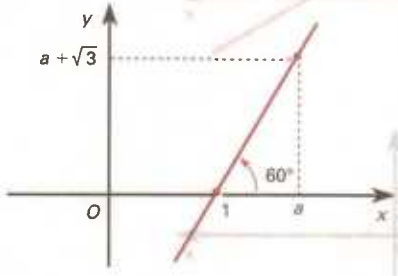
B.3 Qual é a inclinação da reta $\overleftrightarrow{AB}$, sendo $A(2, 6)$ e $B(4, 8)$?

B.4 Obtenha a inclinação da reta que passa pelos pontos $A(\sqrt{3}, 4)$ e $B(0, 1)$.

B.5 Obtenha o valor de a no gráfico:



B.6 Qual é o valor de a no gráfico?



B.7 Usando a condição de alinhamento por coeficiente angular, verifique se os pontos A, B e C são colineares, nos seguintes casos:

a) $A(1, 6)$, $B(0, 4)$ e $C(-1, 2)$;

b) $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ e $C(6, 2)$;

c) $A(4, 1)$, $B(4, 7)$ e $C(4, 9)$;

d) $A(3, 6)$, $B(1, 4)$ e $C(4, 1)$;

e) $A\left(\frac{1}{3}, 2\right)$, $B\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ e $C\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$;

f) $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(\sqrt{2}, 1)$ e $C(\pi, 1)$;

g) $A(3, \sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{5})$ e $C(3, \sqrt{7})$;

h) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $B(1, 3)$ e $C\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right)$.

B.8 Determine uma equação da reta que passa pelo ponto P e tem coeficiente angular m em cada um dos seguintes casos:

a) $P(2, 4)$ e $m = -3$;

b) $P(-1, 6)$ e $m = 2$;

c) $P(4, 0)$ e $m = -\frac{1}{2}$;

d) $P\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ e $m = -\frac{2}{5}$;

e) $P(0, -1)$ e $m = -4$;

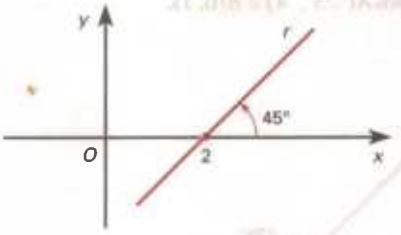
f) $P\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ e $m = 3$;

g) $P\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$ e $m = -3$;

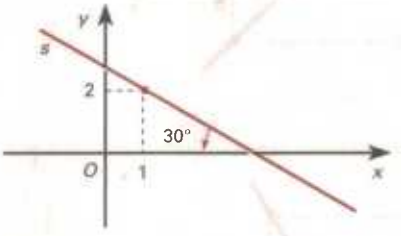
h) $P(0, 0)$ e $m = 6$.

B.9 Obtenha uma equação para cada uma das retas dos gráficos.

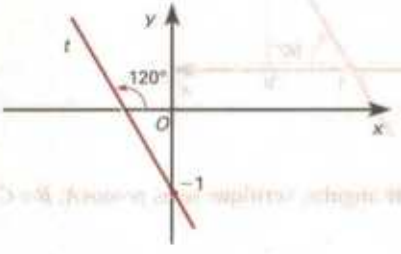
a)



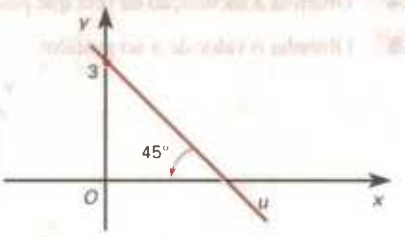
b)



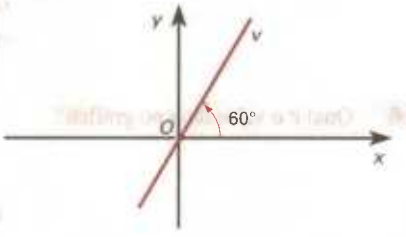
c)



d)

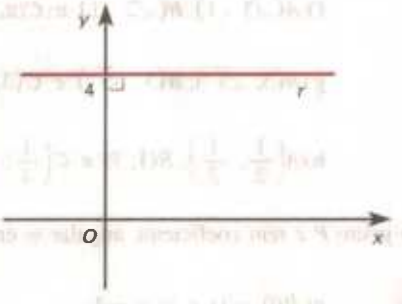


e)



B.10 Quais as equações das retas r e s dos gráficos?

a)



b)

B.11 Usando a equação fundamental, obtenha uma equação da reta que passa pelos pontos A e B em cada um dos seguintes casos:

a) $A(3, 8)$ e $B(-3, 2)$;

b) $A(5, 0)$ e $B(-1, 12)$;

c) $A(-6, 3)$ e $B(-5, 6)$;

d) $A(1, 6)$ e $B(3, 1)$.

B.12 Dê as equações de todas as retas do plano que passam pelo ponto P em cada um dos seguintes casos:

a) $P(5, 2)$; b) $P(-3, 1)$; c) $P(4, 0)$; d) $P(0, 0)$.

B.13 Qual é a reta do feixe de concorrentes de centro $P(2, 1)$ que passa pelo ponto $Q(3, 2)$?

B.14 Uma das retas do feixe plano de concorrentes de centro $P(1, 5)$ intercepta o eixo Ox no ponto $A(5, 0)$. Dê uma equação dessa reta.

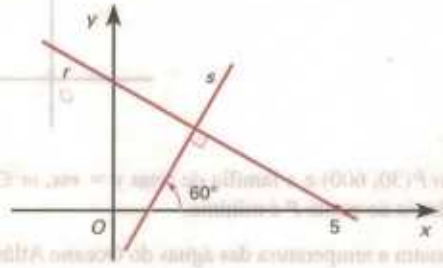
B.15 A equação $y - 1 = m(x - 3)$, $m \in \mathbb{R}$, representa infinitas retas. Dentre todas essas retas, determine aquela que passa pela origem do sistema cartesiano ortogonal.

B.16 Uma reta do feixe plano de concorrentes de centro $P(2, 8)$ não intercepta o eixo Ox. Determine uma equação dessa reta.

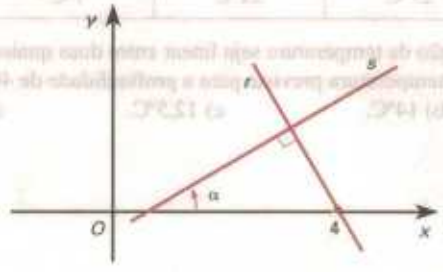
B.17 Uma das retas do feixe plano de concorrentes de centro $P(-8, 6)$ não intercepta o eixo Oy. Dê uma equação dessa reta.

Exercícios complementares

C.1 Determine uma equação da reta r do gráfico.



C.2 Sabendo que $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$, determine uma equação da reta r do gráfico.



C.3 Obtenha uma equação da reta do feixe de concorrentes de centro $P(6, 2)$ que forma com os eixos Ox e Oy um triângulo isósceles.

C.4 A equação $y - 4 = m(x - 1)$, $m \in \mathbb{R}$, determina infinitas retas. Dentre essas retas, obtenha uma equação daquela que forma com os eixos coordenados um triângulo cuja área é unitária.

C.5 A reta r: $x - 3 = 0$ intercepta duas retas s e t, cujas equações são da forma $y - 2 = m(x - 1)$, $m \in \mathbb{R}$, respectivamente nos pontos P e Q. Sabendo que o coeficiente angular da reta s é igual a 1 e que a distância entre P e Q é igual a 4 unidades, determine uma equação da reta t.

C.6 A reta r: $x + y + 5 = 0$ intercepta duas retas s e t, cujas equações são da forma $y - 1 = mx$, $m \in \mathbb{R}$, respectivamente nos pontos P e Q. Sabendo que o coeficiente angular da reta s é igual a 1 e que a distância entre os pontos P e Q é igual a $\sqrt{2}$, determine uma equação de t.

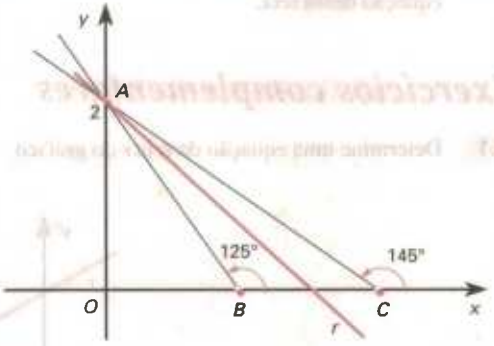
C.7 Considerando todas as retas do plano cartesiano que passam pelo ponto $P(4, 6)$, obtenha uma equação da reta desse feixe que forma com as retas r: $x = 4$ e s: $y = 0$ um triângulo de área 6.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-RS) A reta que passa pela origem dos eixos cartesianos e forma com o semi-eixo positivo $\overrightarrow{Ox}$ um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ rad tem como equação geral:

a) $\sqrt{3}\,x - y = 0$.
b) $\sqrt{3}\,x - 3y = 0$.
c) $\sqrt{2}\,x - 2y = 0$.
d) $\sqrt{2}\,x - y = 0$.
e) $3x - \sqrt{3}\,y = 0$.

V.2 (UFSE) Na figura, os ângulos têm as medidas indicadas. A reta r contém a bissetriz do triângulo ABC, relativa ao vértice A. A equação de r é:



a) $y = x + 2$.
b) $y = x - 2$.
c) $y = -2x + 1$.
d) $y = -x + 1$.
e) $y = -x + 2$.

V.3 (Cescem) Dado o ponto $P(30, 600)$ e a família de retas $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, obtenha m correspondente à reta dessa família, cuja distância ao ponto P é mínima.

V.4 (Fuvest-SP) A tabela mostra a temperatura das águas do Oceano Atlântico (ao nível do equador) em função da profundidade.

Profundidade	Superfície	100 m	500 m	1000 m	3000 m
Temperatura	27°C	21°C	7°C	4°C	2,8°C

Admitindo que a variação da temperatura seja linear entre duas quaisquer das medições consecutivas feitas para a profundidade, a temperatura prevista para a profundidade de 400 m é de:

a) 16°C. b) 14°C. c) 12,5°C. d) 10,5°C. e) 8°C.

Capítulo 5

Equação reduzida da reta

1. Conceituação

Vimos, no capítulo anterior, que uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular igual a m é $y - y_0 = m(x - x_0)$. Isolando a variável y nessa equação, obtemos:

$$y = mx + y_0 - mx_0.$$

Fazendo $y_0 - mx_0 = q$, podemos escrever:

$$y = mx + q.$$

Essa equação é chamada de "**equação reduzida** da reta r".

Note que o coeficiente de x na equação reduzida é exatamente o "**coeficiente angular** m da reta". Ao termo independente q daremos o nome de "**coeficiente linear** da reta".

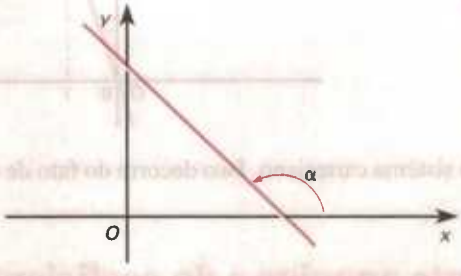
Exemplo

Na equação reduzida $y = 3x + 5$ temos:

$$m = 3 \text{ (Coeficiente angular) e } q = 5 \text{ (Coeficiente linear)}$$

1.1. Interpretação geométrica do coeficiente linear da reta

Na equação reduzida $y = mx + q$ sabemos interpretar geometricamente o coeficiente angular m da reta. Recordando, o coeficiente angular m é a tangente da inclinação α da reta.

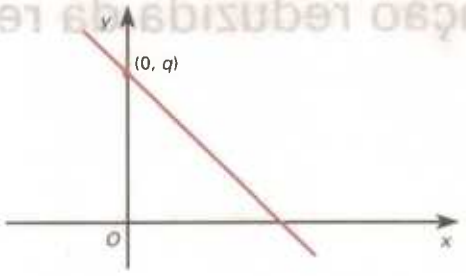


$$m = \text{tg } \alpha$$

Para uma interpretação geométrica do **coeficiente linear** q, basta observar que, atribuindo o valor zero à variável x da equação $y = mx + q$, obtemos:

$$y = 0x + q \Rightarrow y = q.$$

Assim sendo, a reta de equação $y = mx + q$ intercepta o eixo Oy no ponto $(0, q)$:



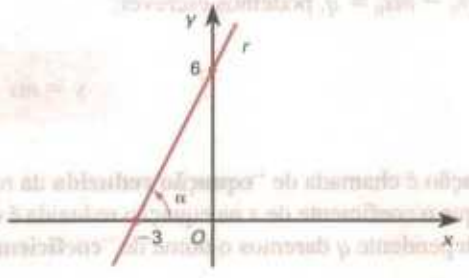
Ou seja, o **coeficiente linear** q é exatamente a ordenada do ponto de **intersecção da reta com o eixo** Oy.

Exemplos

a) Para construir o gráfico da reta r de equação $y = 2x + 6$, basta formar uma tabela atribuindo valores a x ou y a fim de obter dois pontos distintos da reta r:

x	y
0	6
−3	0

$\Rightarrow$

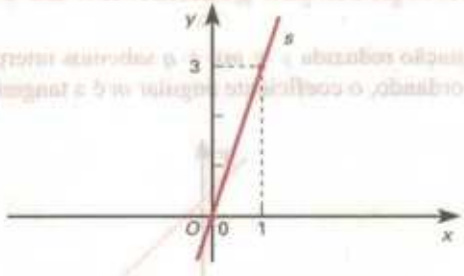


Note que o coeficiente de x na equação $y = 2x + 6$ é exatamente o coeficiente angular da reta: $m = \text{tg}\,\alpha = 2$. Note ainda que o coeficiente linear, 6, é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo Oy.

b) Analogamente ao exemplo anterior, obtemos o gráfico da reta s de equação $y = 3x$ através de dois de seus pontos distintos.

x	y
0	0
1	3

$\Rightarrow$



Note que a reta s passa pela origem do sistema cartesiano. Isso decorre do fato de o coeficiente linear de s ser igual a zero.

2. Cálculo do coeficiente angular e do coeficiente linear de uma reta a partir de sua equação geral

Seja r uma reta não-vertical de equação geral $ax + by + c = 0$, com $b \neq 0$, pois r não é vertical.

Para obter o coeficiente angular m e o coeficiente linear q da reta r, basta colocarmos a equação geral na forma reduzida, ou seja: $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$.

Assim, temos que:

$$m = -\frac{a}{b}$$ Coeficiente angular

e

$$q = -\frac{c}{b}.$$ Coeficiente linear

Exemplo

Seja r a reta de equação geral $3x + 5y - 10 = 0$. A forma reduzida da equação de r é obtida isolando-se a variável y, ou seja: $5y = -3x + 10 \Rightarrow y = -\frac{3x}{5} + 2$.

Assim, temos que:

$$m = -\frac{3}{5}$$ **Coeficiente angular de r**

e

$$q = 2.$$ **Coeficiente linear de r**

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar a equação reduzida e uma equação geral da reta r que passa pelo ponto $P(-4, 2)$ e tem coeficiente angular $m = -5$.

Resolução

$$r \begin{cases} P(-4, 2) \\ m = -5. \end{cases}$$

Pela equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - 2 = -5(x - (-4)) \Rightarrow y - 2 = -5(x + 4) \therefore y - 2 = -5x - 20.$$

Isolando y nessa equação, obtemos a equação reduzida da reta r: $y = -5x - 18$.

Deixando um dos membros da igualdade dessa equação igual a zero, obtemos uma equação geral da reta r:

$$5x + y + 18 = 0.$$

R.2 Determinar o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta r que passa pelos pontos $A(2, 5)$ e $B(-1, 3)$.

Resolução

Uma equação da reta r é: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Desenvolvendo o determinante, temos $5x + 6 - y + 5 - 3x - 2y = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 11 = 0$.

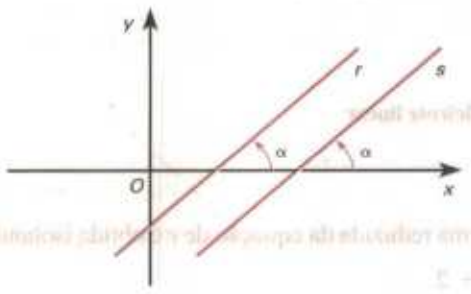
Colocando essa equação sob a forma reduzida, obtemos $3y = 2x + 11 \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{11}{3}$.

Assim, o coeficiente angular de r é $m = \frac{2}{3}$ e o coeficiente linear é $q = \frac{11}{3}$.

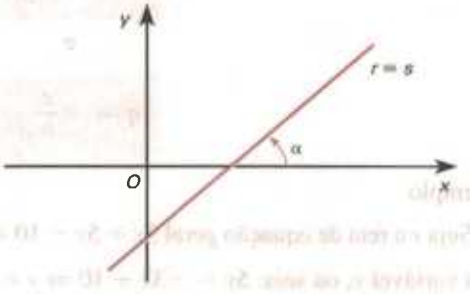
3. Estudo das posições relativas de duas retas em função de suas inclinações

Sejam r e s duas retas do plano cartesiano.

I. r e s são paralelas se, e somente se, têm mesma inclinação.

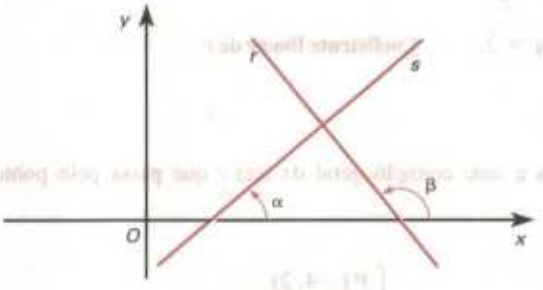


r e s paralelas distintas.



r e s paralelas coincidentes.

II. r e s são concorrentes se, e somente se, têm inclinações diferentes.

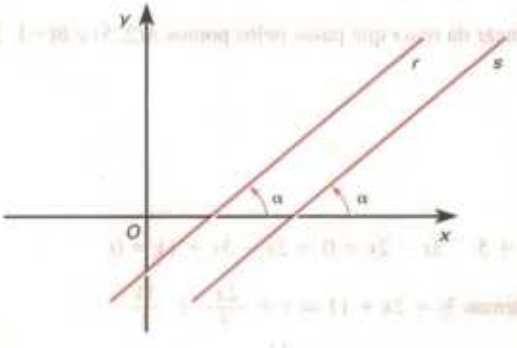


$\alpha \neq \beta$

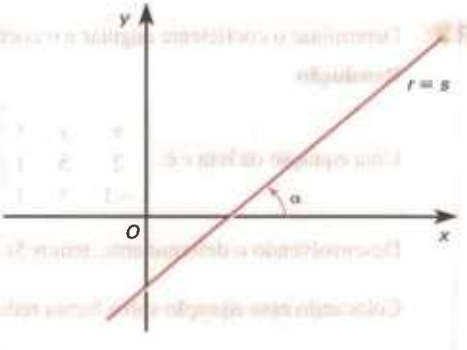
r e s concorrentes.

De (I), concluímos que duas retas r e s são paralelas se, e somente se, têm o mesmo coeficiente angular ou não existem seus coeficientes angulares:

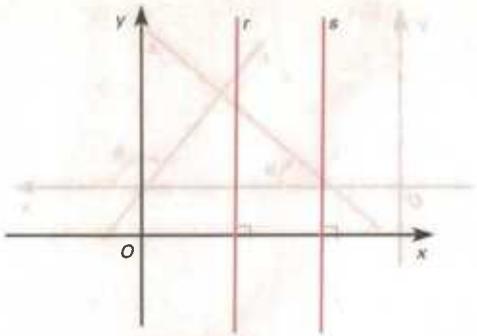
$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s \text{ ou } \nexists\, m_r, m_s.$$



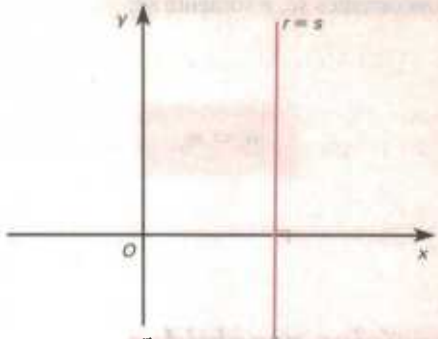
$m_r = m_s \Rightarrow r \parallel s.$



$m_r = m_s \Rightarrow r \parallel s.$

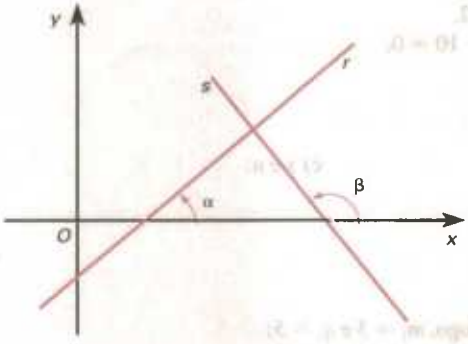


$\nexists m_r, m_s \Rightarrow r \parallel s.$

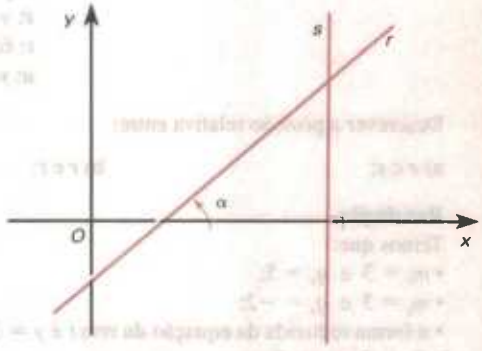


$\nexists m_r, m_s \Rightarrow r \equiv s.$

De (II), concluímos que duas retas r e s são concorrentes se, e somente se, têm coeficientes angulares diferentes ou existe coeficiente angular de uma das retas e não existe da outra:



$m_r \neq m_s \Rightarrow r$ concorre com s.



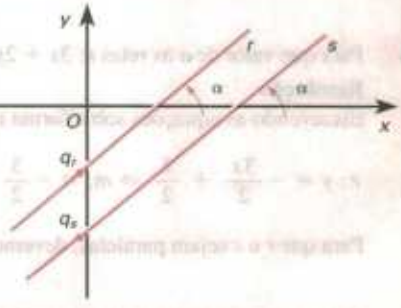
$\exists m_r$ e $\nexists m_s \Rightarrow r$ concorre com s.

Após essas análises, podemos enunciar:

Duas retas não-verticais r e s de equações reduzidas $y = m_r x + q_r$ e $y = m_s y + q_s$, respectivamente, são:

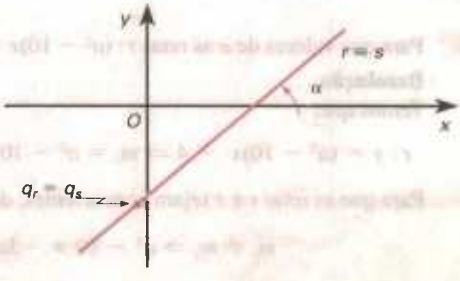
• paralelas distintas se, e somente se:

$m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s$;



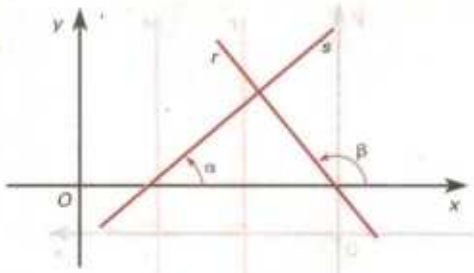
• paralelas coincidentes se, e somente se:

$m_r = m_s$ e $q_r = q_s$;



• concorrentes se, e somente se:

$m_r \neq m_s$.



Exercícios resolvidos

R.3 São dadas as seguintes retas:

$r: y = 3x + 5$,
$s: y = 3x - 2$,
$t: 6x - 2y + 10 = 0$,
$u: y = 5x$.

Descrever a posição relativa entre:

a) r e s; b) r e t; c) s e u.

Resolução

Temos que:

• $m_r = 3$ e $q_r = 5$;
• $m_s = 3$ e $q_s = -2$;
• a forma reduzida da equação da reta t é $y = 3x + 5$; logo, $m_t = 3$ e $q_t = 5$;
• $m_u = 5$ e $q_u = 0$.

Assim, temos:

a) $m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s \Rightarrow r$ e s são paralelas distintas;
b) $m_r = m_t$ e $q_r = q_t \Rightarrow r$ e s são paralelas coincidentes;
c) $m_s \neq m_u \Rightarrow s$ e u são concorrentes.

R.4 Para que valor de a as retas $r: 3x + 2y - 1 = 0$ e $s: ax + 5y + 3 = 0$ são paralelas?

Resolução

Escrevendo as equações sob a forma reduzida, temos:

$$r: y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow m_r = -\frac{3}{2} \text{ e } q_r = \frac{1}{2}; \quad s: y = -\frac{ax}{5} - \frac{3}{5} \Rightarrow m_s = -\frac{a}{5} \text{ e } q_s = -\frac{3}{5}.$$

Para que r e s sejam paralelas, devemos ter $m_r = m_s \Rightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{a}{5} \therefore a = \frac{15}{2}$.

Note que para esse valor de a as retas serão paralelas distintas, pois $q_r \neq q_s \left(\frac{1}{2} \neq -\frac{3}{5}\right)$.

R.5 Para que valores de a as retas $r: (a^2 - 10)x - y - 4 = 0$ e $s: 3ax + y + 1 = 0$ são concorrentes?

Resolução

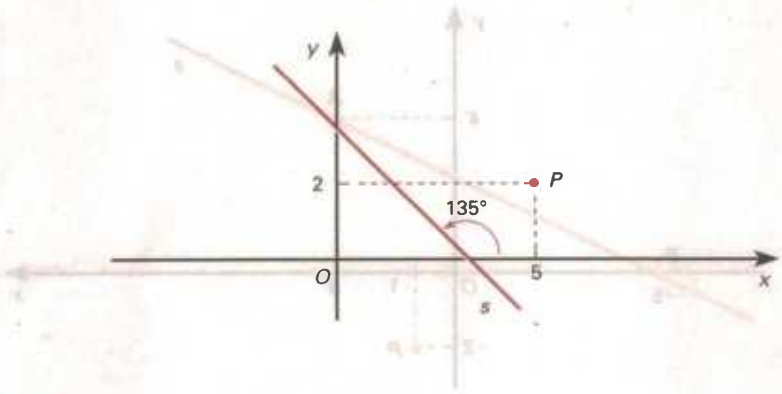
Temos que:

$$r: y = (a^2 - 10)x - 4 \Rightarrow m_r = a^2 - 10 \text{ e } q_r = -4; \quad s: y = -3ax - 1 \Rightarrow m_s = -3a \text{ e } q_s = -1.$$

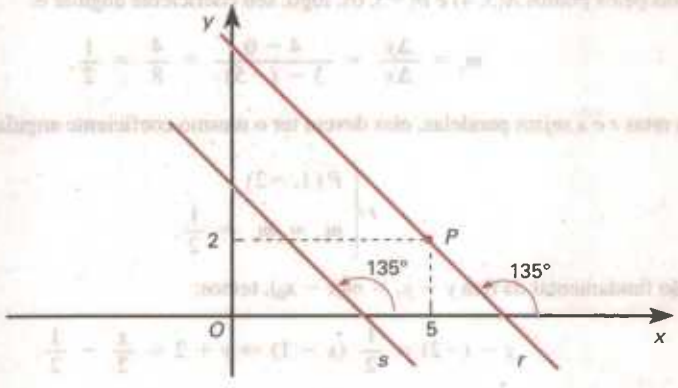
Para que as retas r e s sejam concorrentes, devemos ter:

$$m_r \neq m_s \Rightarrow a^2 - 10 \neq -3a \therefore a^2 + 3a - 10 \neq 0 \Rightarrow a \neq -5 \text{ e } a \neq 2.$$

R.6 Obter uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(5, 2)$ e é paralela à reta s do gráfico.



Resolução



Para que r e s sejam paralelas, elas devem ter o mesmo coeficiente angular. Assim, temos:

$$r\begin{cases} P(5,\ 2) \\ m_r = m_s = \text{tg } 135° = -1. \end{cases}$$

Pela equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos $y - 2 = -1(x - 5) \Rightarrow y - 2 = -x + 5$.
Portanto uma equação da reta r é $y = -x + 7$.

R.7 Determinar uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-1, 6)$ e é paralela à reta s: $4x + 2y - 1 = 0$.

Resolução

Escrevendo a equação da reta s sob a forma reduzida, temos $y = -2x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = -2$.

Para que r e s sejam paralelas, devem ter o mesmo coeficiente angular. Assim:

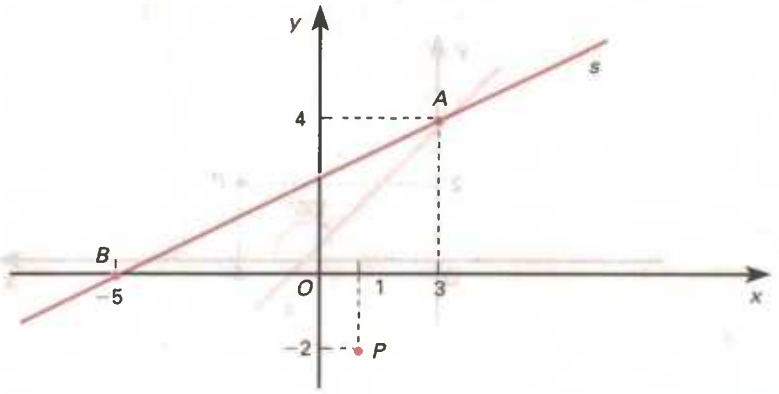
$$r\begin{cases} P(-1,\ 6) \\ m_r = m_s = -2. \end{cases}$$

Pela equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - 6 = -2(x - (-1)) \Rightarrow y - 6 = -2(x + 1) \ \therefore \ y - 6 = -2x - 2.$$

Portanto uma equação da reta r é $2x + y - 4 = 0$.

R.8 Qual é a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P(1, -2)$ e é paralela à reta s do gráfico a seguir?



Resolução

A reta s passa pelos pontos $A(3, 4)$ e $B(-5, 0)$; logo, seu coeficiente angular é:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{3 - (-5)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Para que as retas r e s sejam paralelas, elas devem ter o mesmo coeficiente angular. Assim, temos:

$$r \begin{cases} P(1, -2) \\ m_r = m_s = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

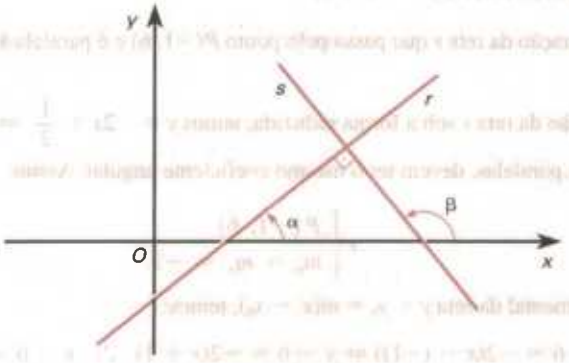
Pela equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y + 2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

Portanto a equação reduzida de r é $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.

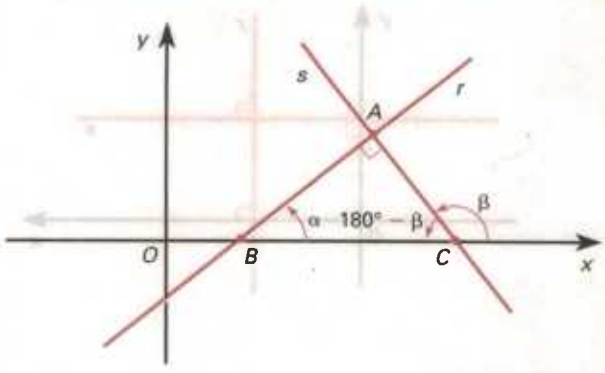
4. Retas perpendiculares

Consideremos as retas perpendiculares r e s do seguinte gráfico:



em que $m_r = \text{tg } \alpha$ é o coeficiente angular de r e $m_s = \text{tg } \beta$ é o coeficiente angular de s.

No triângulo retângulo ABC, limitado por r, s e o eixo Ox, temos:



$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AC}{AB} \\ \text{e} \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = \dfrac{AB}{AC}. \end{cases}$$

Da trigonometria, temos que $\operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg}\beta$. Assim:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AC}{AB} \\ \text{e} \\ -\operatorname{tg}\beta = \dfrac{AB}{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AC}{AB} \quad \text{(I)} \\ \operatorname{tg}\beta = -\dfrac{AB}{AC} = -\dfrac{1}{\frac{AC}{AB}}. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, ou seja:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}.$$

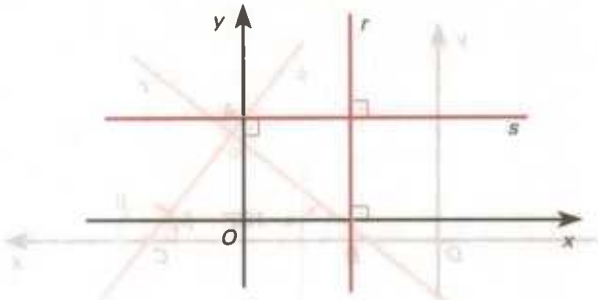
Desse modo, podemos enunciar:

> Se duas retas r e s, não-verticais, são perpendiculares, então o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra.

A recíproca dessa afirmação também é verdadeira e está demonstrada no exercício R.9. Assim, temos:

> Duas retas r e s, não-verticais, são perpendiculares se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra:
>
> $$m_s = -\frac{1}{m_r}.$$

Note que, sendo r uma reta vertical, uma reta s é perpendicular a r se, e somente se, s é horizontal.

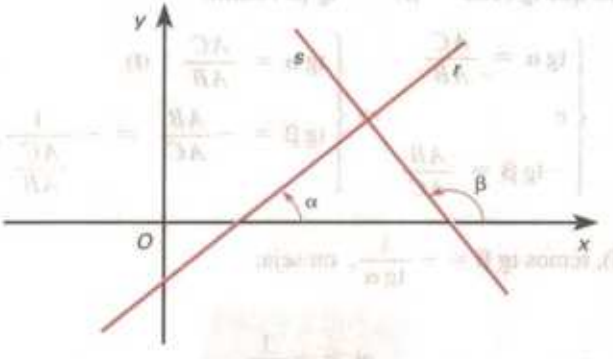


Exercícios resolvidos

R.9 Demonstrar que, "se duas retas r e s com coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente, são tais que $m_s = -\frac{1}{m_r}$, então $r \perp s$".

Resolução

Sejam α e β as inclinações de r e s, respectivamente.



Temos que:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \therefore \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha = -1$$

$$\therefore \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta \cos\alpha} + 1 = 0 \therefore \frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha + \cos\beta \cos\alpha}{\cos\beta \cos\alpha} = 0$$

$$\therefore \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha + \cos\beta \cos\alpha = 0 \therefore \cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Como $0° \leq \alpha < 180°$ e $0° \leq \beta < 180°$, concluímos que $\beta - \alpha = 90°$. Logo, $r \perp s$.

(c.q.d.)

R.10 São dadas as seguintes retas:

$$r: y = \frac{2x}{3} + 5; \quad s: 3x + 2y - 1 = 0;$$

$$t: x - 5 = 0; \quad u: y - 2 = 0; \quad v: y = 4x + 1.$$

Verificar se são ou não perpendiculares:

a) r e s; b) t e u; c) r e v.

Resolução

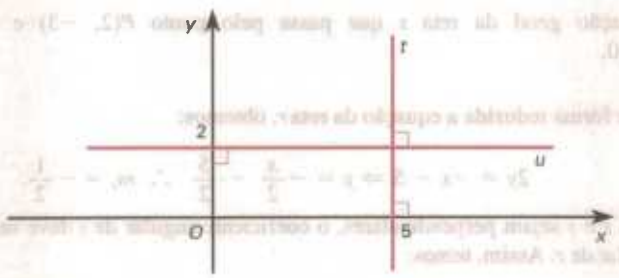
a) Temos que:

• $m_r = \frac{2}{3}$;

• a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$; logo, $m_s = -\frac{3}{2}$.

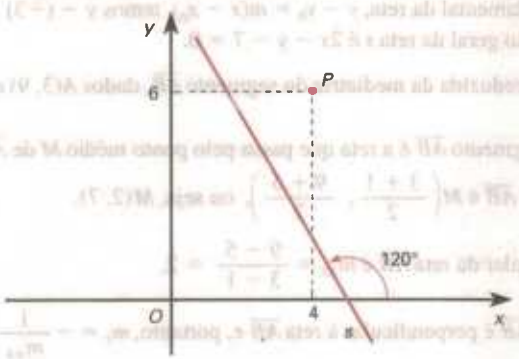
Note que o coeficiente angular de s é o oposto do inverso do coeficiente angular de r, isto é, $m_s = -\frac{1}{m_r}$. Portanto as retas r e s são perpendiculares.

b) A reta t é vertical e a reta u é horizontal; logo, são retas perpendiculares.



c) Temos que $m_r = \frac{2}{3}$ e $m_v = 4$. Note que $m_r \neq -\frac{1}{m_v}$, pois $\frac{2}{3} \neq -\frac{1}{4}$. Logo, r e s não são perpendiculares.

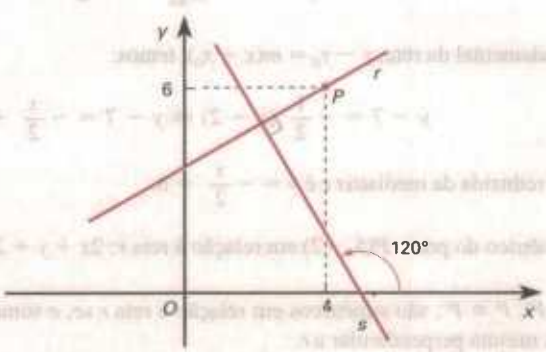
R.11 Obter a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P(4, 6)$ e é perpendicular à reta s do gráfico.



Resolução

Temos que $m_s = \text{tg } 120° = -\sqrt{3}$.

Para que r e s sejam perpendiculares, o coeficiente angular de r deve ser igual ao oposto do inverso do coeficiente angular de s.



Assim, temos $r\begin{cases} P(4, 6) \\ m_r = -\dfrac{1}{m_s} = -\dfrac{1}{-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

Pela equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, obtemos:

$$y - 6 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 4) \Rightarrow y - 6 = \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = \dfrac{\sqrt{3}x}{3} - \dfrac{4\sqrt{3}}{3} + 6$.

R.12 Obter uma equação geral da reta s que passa pelo ponto $P(2, -3)$ e é perpendicular à reta $r: x + 2y + 5 = 0$.

Resolução

Escrevendo sob a forma reduzida a equação da reta r, obtemos:

$$2y = -x - 5 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2} \quad \therefore \quad m_r = -\frac{1}{2}.$$

Para que as retas r e s sejam perpendiculares, o coeficiente angular de s deve ser o oposto do inverso do coeficiente angular de r. Assim, temos:

$$s\begin{cases} P(2, -3) \\ m_s = -\dfrac{1}{m_r} = -\dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = 2. \end{cases}$$

Pela equação fundamental da reta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos $y - (-3) = 2(x - 2) \Rightarrow y + 3 = 2x - 4$.

Logo, uma equação geral da reta s é $2x - y - 7 = 0$.

R.13 Qual é a equação reduzida da mediatriz do segmento $\overline{AB}$, dados $A(3, 9)$ e $B(1, 5)$?

Resolução

A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é a reta que passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$ e é perpendicular a $\overline{AB}$.

O ponto médio de $\overline{AB}$ é $M\left(\dfrac{3+1}{2}, \dfrac{9+5}{2}\right)$, ou seja, $M(2, 7)$.

O coeficiente angular da reta $\overline{AB}$ é $m_{AB} = \dfrac{9-5}{3-1} = 2$.

A mediatriz r de $\overline{AB}$ é perpendicular à reta $\overline{AB}$ e, portanto, $m_r = -\dfrac{1}{m_{AB}}$. Assim, temos:

$$r\begin{cases} M(2, 7) \\ m_r = -\dfrac{1}{m_{AB}} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Pela equação fundamental da reta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y - 7 = -\frac{x}{2} + 1.$$

Logo, a equação reduzida da mediatriz r é $y = -\dfrac{x}{2} + 8$.

R.14 Determinar o simétrico do ponto $P(5, -2)$ em relação à reta $r: 2x + y + 2 = 0$.

Resolução

Dois pontos P e P', $P \neq P'$, são simétricos em relação à reta r se, e somente se, P e P' equidistam de r e pertencem a uma mesma perpendicular a r.

Assim, para obter o ponto P', vamos seguir os seguintes passos:

1º) obtemos uma equação da reta s que passa por $P(5, -2)$ e é perpendicular a r;
2º) determinamos o ponto Q de intersecção de r e s;
3º) obtemos o ponto P' de modo que o ponto Q seja ponto médio de $\overline{PP'}$.

1º) Escrevendo sob a forma reduzida a equação de r, temos $y = -2x - 2 \therefore m_r = -2$.

A reta s perpendicular à r é tal que $m_s = -\frac{1}{m_r}$. Então temos:

$$s\begin{cases} P(5, -2) \\ m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pela equação fundamental da reta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 5) \Rightarrow y + 2 = \frac{x}{2} - \frac{5}{2} \therefore 2y + 4 = x - 5 \therefore s: x - 2y - 9 = 0.$$

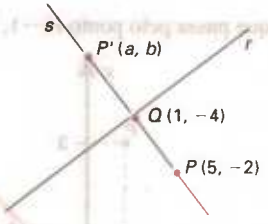
2º) A intersecção de r e s é dada por:

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 4 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \end{cases} +$$

$$5x + 0y - 5 = 0 \therefore x = 1.$$

Substituindo $x = 1$ em $x - 2y - 9 = 0$, obtemos: $1 - 2y - 9 = 0 \Rightarrow y = -4$.
Logo, $r \cap s = \{Q(1, -4)\}$.

3º) Seja $P'(a, b)$ tal que o ponto $Q(1, -4)$ é ponto médio de $\overline{PP'}$.



Logo, temos:

$$\begin{cases} \frac{5 + a}{2} = 1 \Rightarrow a = -3 \\ \frac{-2 + b}{2} = -4 \Rightarrow b = -6. \end{cases}$$

Assim, o ponto simétrico é $P'(-3, -6)$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c), B.2 (a, b), B.3 (a, b, c), B.4 (a, b, c), B.5, B.6, B.10, B.12 (a, b, c), B.13, B.15 (a, b, c), B.16, B.17 (a, b, c), B.18 (a, b), B.19 (a), C.1, C.3, C.4, C.7.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (d, e, f), B.2 (c, d, e), B.3 (d, e, f), B.4 (d, e), B.7, B.8, B.9, B.11, B.12 (d, e, f), B.14, B.15 (d, e, f), B.17 (d, e, f), B.18 (c, d, e), B.19 (b, c, d), C.2, C.5, C.6, C.8, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Determine a equação reduzida e uma equação geral da reta que passa pelo ponto P e tem coeficiente angular m nos seguintes casos:

a) $P(5, -4)$ e $m = -8$;
c) $P(0, 0)$ e $m = 0$;
e) $P(0, 0)$ e $m = 1$;
b) $P(0, 3)$ e $m = \frac{3}{2}$;
d) $P\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e $m = -4$;
f) $P(0, 3)$ e $m = 0$.

B.2 Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear de cada uma das seguintes retas:

a) $r: y = 3x - \frac{5}{2}$;
c) $t: y = -4x$;
e) $v: y = 5$.
b) $s: 3x + 2y - 1 = 0$;
d) $u: -2x - 5y + 1 = 0$;

B.3 Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta $\overleftrightarrow{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(4, 6)$ e $B(-1, -9)$;
c) $A(3, 2)$ e $B(3, 5)$;
e) $A(1, -1)$ e $B(2, -5)$;
b) $A(5, -1)$ e $B(2, 1)$;
d) $A(9, 2)$ e $B(0, 1)$;
f) $A(2, 3)$ e $B(5, 3)$.

B.4 São dadas as seguintes retas:

$$r: 3x - 6y - 2 = 0;\ s: y = \frac{x}{2} - 5;\ t: y = \frac{x}{2} - \frac{1}{3};\ u: 4x + y - 1 = 0.$$

Descreva a posição relativa entre:

a) r e s;
b) r e t;
c) r e u;
d) s e t;
e) s e u.

B.5 Para que valor de a as retas $r: (a - 2)x - 3y - 1 = 0$ e $s: ax + y - 2 = 0$ são paralelas?

B.6 Obtenha a de modo que as retas $r: (2a - 1)x - 2y + 1 = 0$ e $s: ax + 3y = 0$ sejam concorrentes.

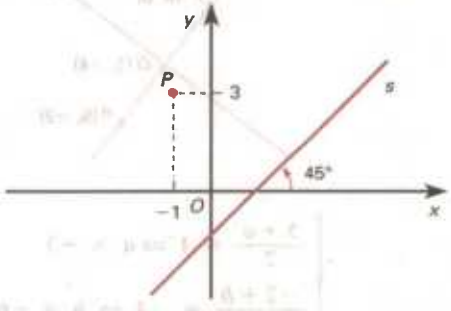
B.7 Sabe-se que as retas $r: (a - 1)x - 2y + a = 0$ e $s: (3a - 2)x - 4y + a - 3 = 0$ são paralelas.

a) Obtenha a.
b) Para o valor de a encontrado, as retas paralelas são distintas ou coincidentes?

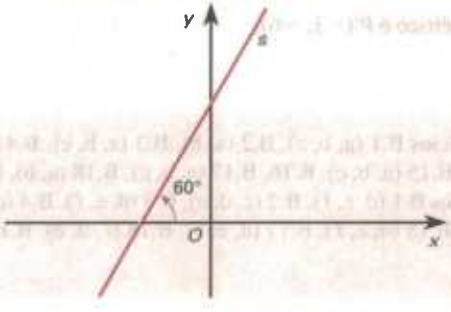
B.8 Para que valor de a as retas $r: ax - y + 5 = 0$ e $s: (4a - 2)x - 3y + 7a + 1 = 0$ são paralelas distintas?

B.9 Para que valores de a as retas $r: 2ax + y - 1 = 0$ e $s: (3a - 1)x + 3y - a = 0$ têm um único ponto em comum?

B.10 Encontre uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-1, 3)$ e é paralela à reta s do gráfico a seguir.



B.11 Qual é a equação da reta r que passa pela origem do sistema cartesiano e é paralela à reta s do gráfico a seguir?



B.12 Determine uma equação geral da reta r que passa pelo ponto P e é paralela à reta s nos seguintes casos:

a) $P(-2, 6)$ e $s: y = -3x + 8$;

b) $P(0, 3)$ e $s: 4x + 2y - 1 = 0$;

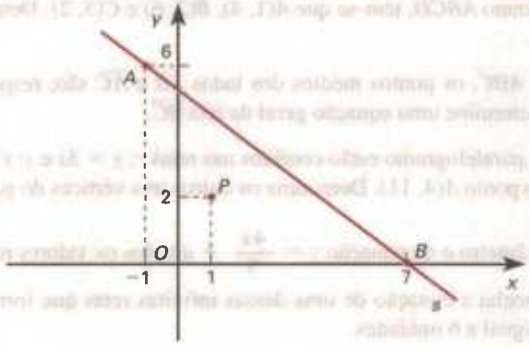
c) $P(-1, 0)$ e $s: 2x - 3y - 4 = 0$;

d) $P(1, 4)$ e $s: y = x$;

e) $P\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ e $s: 2x + y - 4 = 0$;

f) $P\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ e $s: 2x + 5y - 1 = 0$.

B.13 Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P(1, 2)$ e é paralela à reta s do gráfico.



B.14 Obtenha uma equação geral da reta r que passa pelo ponto $P(1, 5)$ e é paralela à reta que passa pelos pontos $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$.

B.15 São dadas as seguintes retas:

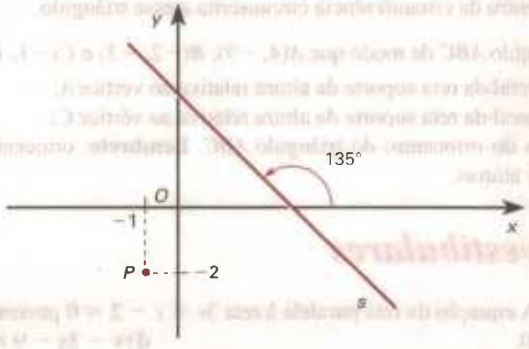
$g: y = \frac{x}{2} - 3$; $i: x - 1 = 0$; $k: 5y - 1 = 0$;

$h: 2x + y - 3 = 0$; $j: 2y - 5 = 0$; $l: 5x + \frac{5y}{2} = 0$.

Verifique se são ou não perpendiculares:

a) g e h; b) i e j; c) j e k; d) h e l; e) g e l; f) i e k.

B.16 Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P(-1, -2)$ e é perpendicular à reta s do gráfico.



B.17 Obtenha uma equação geral da reta r que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta s nos seguintes casos:

a) $P(-1, 4)$ e $s: 2x - y - 1 = 0$;

b) $P(9, -1)$ e $s: y = \frac{x}{5} + 2$;

c) $P(3, 0)$ e $s: 4x - 3y + 1 = 0$;

d) $P(-1, 1)$ e $s: 6x - y + 3 = 0$;

e) $P(0, 1)$ e $s: y = \frac{x}{6} - 1$;

f) $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $s: 3x - 2y + 4 = 0$.

B.18 Determine a equação reduzida da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(-1, 6)$ e $B(3, -2)$;

b) $A(0, 6)$ e $B(6, 0)$;

c) $A(-4, -1)$ e $B(-2, -7)$:

d) $A(1, 3)$ e $B(4, -1)$;

e) $A(1, 3)$ e $B(1, 7)$.

B.19 Determine o simétrico do ponto P em relação à reta r nos seguintes casos:

a) $P(4, 2)$ e $r: x - 2y + 15 = 0$;

b) $P(0, 8)$ e $r: y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$;

c) $P(1, 6)$ e $r: y - 9 = 0$;

d) $P(-1, 4)$ e $r: x - 3 = 0$.

Exercícios complementares

C.1 Em um paralelogramo $ABCD$, tem-se que $A(1, 4)$, $B(2, 6)$ e $C(3, 2)$. Determine a equação reduzida da reta $\overleftrightarrow{CD}$.

C.2 Em um triângulo ABC, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, $M(2, 5)$ e $N(4, -3)$. Sendo $B(5, 10)$, determine uma equação geral da reta $\overleftrightarrow{BC}$.

C.3 Dois lados de um paralelogramo estão contidos nas retas $r: y = 3x$ e $s: y = 2x + 5$. Um dos vértices desse paralelogramo é o ponto $A(4, 11)$. Determine os outros três vértices do paralelogramo.

C.4 Atribuindo ao parâmetro q da equação $y = \frac{4x}{3} + q$ todos os valores reais, obtêm-se infinitas retas paralelas entre si. Obtenha a equação de uma dessas infinitas retas que forma com os eixos coordenados um triângulo de área igual a 6 unidades.

C.5 Dois lados de um losango estão contidos nas retas $r: y = 6x$ e $s: y = \frac{x}{6}$. Sabendo que o lado do losango mede $\sqrt{37}$ unidades, determine seus vértices.

C.6 Dois vértices opostos de um quadrado $ABCD$ são $A(1, -4)$ e $C(-1, 2)$. Determine uma equação da reta $\overleftrightarrow{BD}$.

C.7 Dois lados de um quadrado estão contidos nas retas $y = 3x$ e $y = 3x - 10$. Um dos vértices desse quadrado é o ponto $A(0, 0)$. Determine os outros vértices do quadrado.

C.8 Considere o triângulo ABC tal que $A(4, 6)$, $B(-2, -2)$ e $C(5, -1)$.

a) Obtenha as equações das mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

b) Determine o centro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

C.9 Considere o triângulo ABC de modo que $A(4, -9)$, $B(-2, -3)$ e $C(-1, 1)$. Determine:

a) uma equação geral da reta suporte da altura relativa ao vértice A;

b) uma equação geral da reta suporte da altura relativa ao vértice C;

c) as coordenadas do ortocentro do triângulo ABC. **Lembrete**: ortocentro de um triângulo é o ponto de intersecção das alturas.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) A equação da reta paralela à reta $3x + y - 2 = 0$ passando pelo ponto $(-2, 3)$ é:

a) $3x + y + 3 = 0$.

b) $x + 3y - 11 = 0$.

c) $x + 3y - 5 = 0$.

d) $y - 3x - 9 = 0$.

e) $x - 3y + 11 = 0$.

V.2 (FEI-SP) Dar a equação da reta que passa pelo ponto (a^2, a), $a > 0$, e é paralela à reta $ax - a^2y = 1$.

V.3 (ITA-SP) Dadas as retas $(r_1): x + 2y - 5 = 0$, $(r_2): x - y - 2 = 0$ e $(r_3): x - 2y - 1 = 0$, podemos afirmar que:

a) são 2 a 2 paralelas.

b) (r_1) e (r_3) são paralelas.

c) (r_1) é perpendicular a (r_3).

d) (r_2) é perpendicular a (r_3).

e) as três retas são concorrentes num mesmo ponto.

V.4 (Fuvest-SP) Os coeficientes angulares dos lados de um triângulo são 1, −1 e zero. Conclui-se que o triângulo é:

a) equilátero.
b) retângulo.
c) escaleno.
d) acutângulo.
e) obtusângulo.

V.5 (Fuvest-SP) Em relação a um sistema cartesiano ortogonal, são dados os pontos $A = (3, 0)$ e $B = (1, 2)$. A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cujas coordenadas satisfazem a equação:

a) $x + y = 3$.
b) $x + y = 0$.
c) $x - y = 2$.
d) $x + y = 2$.
e) $x - y = 1$.

V.6 (FEI-SP) No triângulo ABC, cujos vértices são $A = (0, 0)$, $B = (-3, 1)$ e $C = (1, 5)$, a equação da reta que contém a altura relativa a $\overline{BC}$ é:

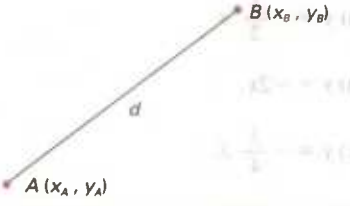
a) $y = -\frac{1}{2}x$.
b) $y = -2x$.
c) $y = -\frac{3}{4}x$.
d) $y = -x$.
e) $y = -\frac{2}{3}x$.

Capítulo 6
Distância entre ponto e reta

1. Cálculo da distância de um ponto a uma reta

O conceito de distância é fundamental na geometria analítica. Estudamos no capítulo 2 a distância entre dois pontos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

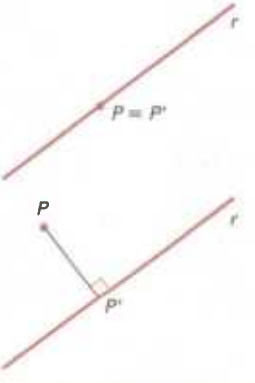


Vamos ver agora o cálculo da distância entre um ponto P e uma reta r. Essa distância é definida a seguir.

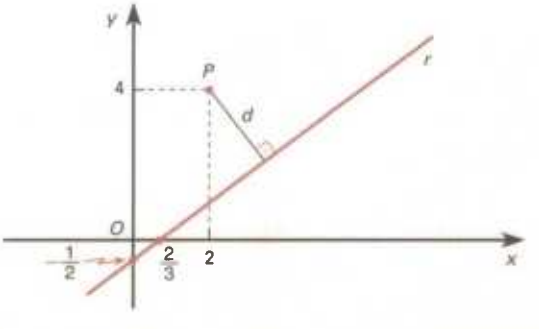
Seja P um ponto e r uma reta. A distância d_{Pr}, do ponto P à reta r, é a medida do segmento $\overline{PP'}$, onde P' é a projeção ortogonal de P sobre r:

$$d_{Pr} = PP' = 0;$$

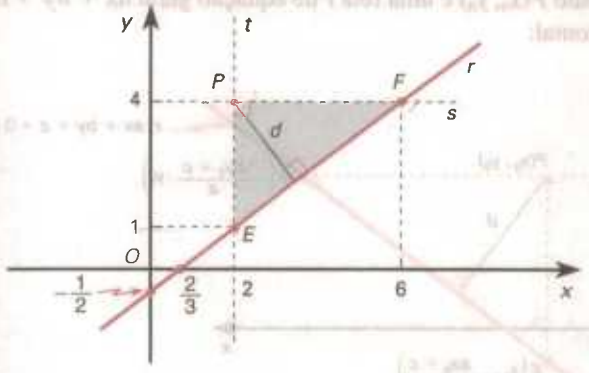
$$d_{Pr} = PP'.$$



Para o entendimento do próximo teorema, convém resolvermos o seguinte problema: qual é a distância d do ponto $P(2, 4)$ à reta r: $3x - 4y - 2 = 0$?

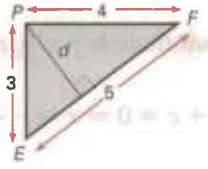


Consideremos as retas s e t que passam por P e são, respectivamente, paralelas aos eixos Ox e Oy. As retas r, s e t determinam o triângulo PFE retângulo em P:



Como $s \parallel Ox$, $P \in s$ e $F \in s$, temos que a ordenada do ponto F é 4. Substituindo por 4 a variável y da equação $3x - 4y - 2 = 0$, obtemos a abscissa do ponto F: $3x - 4 \cdot 4 - 2 = 0 \Rightarrow x = 6$. Assim, $F(6, 4)$.
Como $t \parallel Oy$, $P \in t$ e $E \in t$, temos que a abscissa do ponto E é 2. Substituindo por 2 a variável x da equação $3x - 4y - 2 = 0$, obtemos a ordenada do ponto E: $3 \cdot 2 - 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$.
Assim, $E(2, 1)$. Note que:

$$EF = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5;$$
$$EP = 3;$$
$$PF = 4.$$

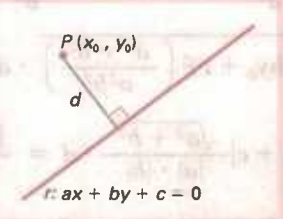


A distância d do ponto P à reta r é a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo PFE. Da geometria plana, sabemos que o produto da medida da hipotenusa pela medida de sua altura relativa é igual ao produto das medidas dos catetos; assim, temos: $5 \cdot d = 3 \cdot 4 \therefore d = \frac{12}{5}$. Esse exemplo oferece subsídios ao teorema seguinte.

Teorema

A distância d entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r: $ax + by + c = 0$ é dada por:

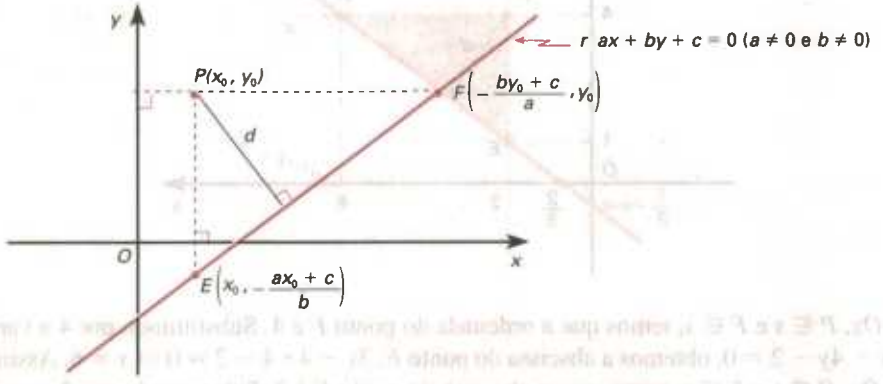
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Demonstração

• Primeira parte

Consideremos um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, tais que $P \notin r$ e r não é vertical nem horizontal:



E é o ponto da reta r de abscissa x_0. Substituindo $x = x_0$ na equação r, temos:

$$ax_0 + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{ax_0 + c}{b}.$$

Logo, $E\left(x_0, -\frac{ax_0 + c}{b}\right)$.

F é o ponto da reta r de ordenada y_0. Substituindo $y = y_0$ na equação de r, temos:

$$ax + by_0 + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{by_0 + c}{a}.$$

Logo, $F\left(-\frac{by_0 + c}{a}, y_0\right)$.

Em todo triângulo retângulo, o produto da medida da hipotenusa pela medida de sua altura relativa é igual ao produto das medidas dos catetos. Assim sendo, no triângulo retângulo PEF, temos:

$$EF \cdot d = PE \cdot PF$$

$$\therefore \sqrt{\left(x_0 + \frac{by_0 + c}{a}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{ax_0 + c}{b}\right)^2} \cdot d = \sqrt{\left(y_0 + \frac{ax_0 + c}{b}\right)^2} \sqrt{\left(x_0 + \frac{by_0 + c}{a}\right)^2}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2} + \frac{(by_0 + ax_0 + c)^2}{b^2}} \cdot d = \sqrt{\frac{(by_0 + ax_0 + c)^2}{b^2}} \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2}}$$

$$\therefore \sqrt{(ax_0 + by_0 + c)^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}\right)} \cdot d = \sqrt{\frac{(by_0 + ax_0 + c)^2}{b^2}} \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2}}$$

$$\therefore |ax_0 + by_0 + c| \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|a| \cdot |b|} \cdot d = \frac{|by_0 + ax_0 + c|}{|b|} \cdot \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|}.$$

O ponto P não pertence a r; então $ax_0 + by_0 + c \neq 0$.

Logo, temos $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot d = |ax_0 + by_0 + c| \Rightarrow d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

• Segunda parte (casos particulares)

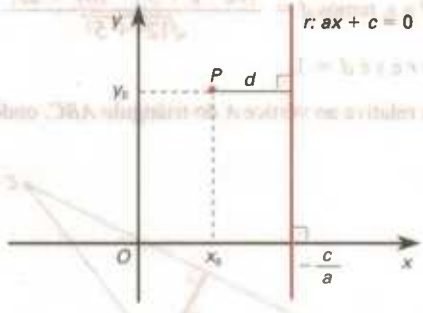
1º) $P \in r$

Se o ponto $P(x_0, y_0)$ pertence à reta r: $ax + by + c = 0$, então temos que $ax_0 + by_0 + c = 0$ e que a distância de P a r é igual a zero. Note, portanto, que a fórmula deduzida na primeira parte vale também para esse caso particular, pois:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.$$

2º) r é vertical

Se r é vertical, então sua equação geral é da forma $ax + c = 0$, com $a \neq 0$.



A distância d é dada por:

$$d = \left|x_0 + \frac{c}{a}\right| = \left|\frac{ax_0 + c}{a}\right| = \frac{|ax_0 + c|}{|a|}.$$

Note que a fórmula obtida na primeira parte vale também para esse caso, pois:

$$d = \frac{|ax_0 + Oy_0 + c|}{\sqrt{a^2 + 0^2}} = \frac{|ax_0 + c|}{|a|}.$$

3º) r é horizontal

Analogamente ao caso (II), prova-se que a fórmula obtida na primeira parte vale também para r horizontal.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular a distância do ponto $P(2, 1)$ à reta r: $3x - 4y + 8 = 0$.

Resolução

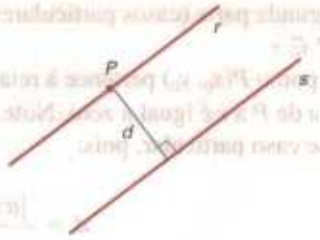
A distância d de P à reta r é dada por $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, em que $a = 3$; $b = -4$; $c = 8$; $x_0 = 2$; $y_0 = 1$.

Logo, $d = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$.

R.2 Calcular a distância entre as retas r: $12x + 5y + 38 = 0$ e s: $12x + 5y + 25 = 0$.

Resolução

As retas r e s são paralelas, pois têm o mesmo coeficiente angular: $-\frac{12}{5}$. Para calcular a distância entre elas, basta tomarmos um ponto P qualquer de uma delas e calcularmos a distância de P à outra reta.



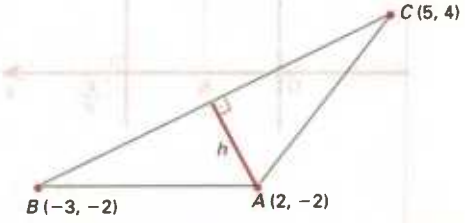
Para obter um ponto P em r, basta atribuir um valor qualquer a x e encontrar o correspondente valor de y. Por exemplo, atribuindo o valor 1 a x, temos $12 \cdot 1 + 5y + 38 = 0 \Rightarrow y = -10$.
Assim, um ponto de r é $P(1, -10)$.

Calculando a distância de P a s, temos $d = \dfrac{|12 \cdot 1 + 5(-10) + 25|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{\cancel{|-13|}}{\cancel{13}} = 1$.

Portanto a distância d entre r e s é $d = 1$.

R.3 Calcular a medida da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC, onde $A(2, -2)$, $B(-3, -2)$ e $C(5, 4)$.

Resolução



A medida h da altura relativa ao vértice A é a distância do ponto A à reta $\overleftrightarrow{BC}$. Uma equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 12 + 5y + 10 - 4x + 3y = 0$$

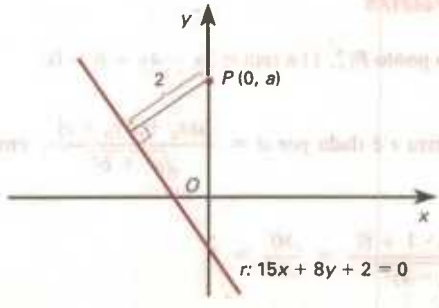
$$\therefore -6x + 8y - 2 = 0 \quad \therefore \overleftrightarrow{BC}: 3x - 4y + 1 = 0.$$

Portanto a medida de h é $h = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{\cancel{15}}{\cancel{5}} = 3$.

R.4 Determinar o(s) ponto(s) do eixo Oy que dista(m) 2 unidades da reta r: $15x + 8y + 2 = 0$.

Resolução

O ponto P procurado pertence ao eixo Oy; logo, sua abscissa é igual a zero, ou seja, o ponto é da forma $P(0, a)$.



Devemos ter: $d_{Pr} = 2 \Rightarrow \dfrac{|15 \cdot 0 + 8a + 2|}{\sqrt{15^2 + 8^2}} = 2 \therefore \dfrac{|8a + 2|}{17} = 2 \therefore |8a + 2| = 34.$

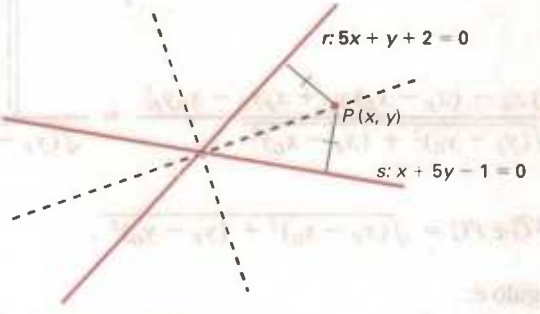
Logo, obtemos: $8a + 2 = 34 \Rightarrow a = 4$ ou $8a + 2 = -34 \Rightarrow a = -\dfrac{9}{2}$.

Assim, temos dois pontos que satisfazem a condição do problema: $P(0, 4)$ e $P'\left(0, -\dfrac{9}{2}\right)$.

R.5 Obter as equações das retas que contêm as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r: $5x + y + 2 = 0$ e s: $x + 5y - 1 = 0$.

Resolução

Seja $P(x, y)$ um ponto genérico pertencente a uma das bissetrizes dos ângulos formados por r e s:



Todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados desse ângulo. Assim, temos:

$$d_{Pr} = d_{Ps} \Rightarrow \frac{|5x + y + 2|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{|x + 5y - 1|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} \therefore |5x + y + 2| = |x + 5y - 1|.$$

Logo, obtemos:

$5x + y + 2 = x + 5y - 1 \Rightarrow 4x - 4y + 3 = 0$ ou $5x + y + 2 = -x - 5y + 1 \Rightarrow 6x + 6y + 1 = 0$.

Assim, as equações das retas suporte das bissetrizes são $4x - 4y + 3 = 0$ e $6x + 6y + 1 = 0$.

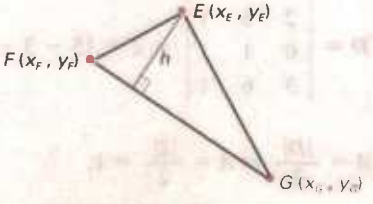
2. Área de um triângulo

Teorema

A área A de um triângulo cujos vértices são os pontos $E(x_E, y_E)$, $F(x_F, y_F)$ e $G(x_G, y_G)$ é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{vmatrix}.$$

Demonstração



Uma equação da reta $\overleftrightarrow{FG}$ é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \begin{vmatrix} y_F & 1 \\ y_G & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_F & 1 \\ x_G & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} x_F & y_F \\ x_G & y_G \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \overleftrightarrow{FG}: (y_F - y_G)x - (x_F - x_G)y + x_F y_G - x_G y_F = 0.$$

A medida h da altura relativa ao vértice E é:

$$h = \frac{|(y_F - y_G)\,x_E - (x_F - x_G)\,y_E + x_F y_G - x_G y_F|}{\sqrt{(y_F - y_G)^2 + (x_F - x_G)^2}} = \frac{\left\| \begin{matrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{(y_F - y_G)^2 + (x_F - x_G)^2}}$$

A medida do lado $\overline{FG}$ é $FG = \sqrt{(x_F - x_G)^2 + (y_F - y_G)^2}$.

- A área A do triângulo é:

$$A = \frac{FG \cdot h}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{(x_F - x_G)^2 + (y_F - y_G)^2}} \cdot \dfrac{\left\| \begin{matrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{matrix} \right\|}{\cancel{\sqrt{(y_F - y_G)^2 + (x_F - x_G)^2}}}}{2}$$

$$\therefore A = \frac{\left\| \begin{matrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{matrix} \right\|}{2}.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

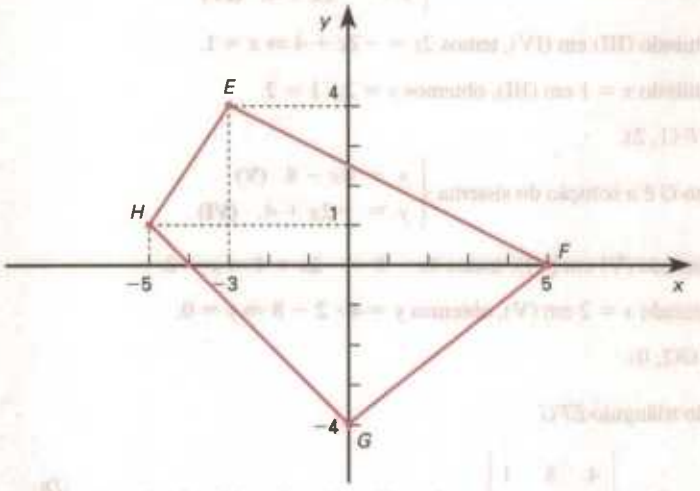
R.6 Determinar a área do triângulo cujos vértices são $E(2, 5)$, $F(0, 1)$ e $G(3, 6)$.

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 15 - 3 - 12 = 2.$$

A área A do triângulo EFG é $A = \frac{|D|}{2} \Rightarrow A = \frac{|2|}{2} = 1$.

R.7 Calcular a área do quadrilátero *EFGH* do gráfico a seguir:



Resolução

A área do quadrilátero *EFGH* é igual à soma das áreas dos triângulos *EFH* e *FHG*.

- Área do triângulo *EFH*

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 20 + 3 - 20 = -32 \quad \therefore A_{EFH} = \frac{|D|}{2} = \frac{|-32|}{2} = 16.$$

- Área do triângulo *FHG*

$$D' = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 20 + 20 = 45 \quad \therefore A_{FHG} = \frac{|D'|}{2} = \frac{|45|}{2} = 22{,}5.$$

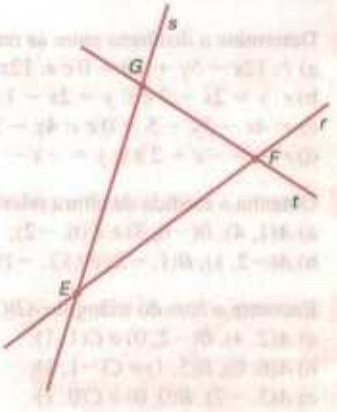
Logo, a área do quadrilátero *EFGH* é $A_{EFGH} = 16 + 22{,}5 = 38{,}5$.

R.8 Determinar a área do triângulo limitado pelas retas r: $y = 2x$, s: $y = 4x - 8$ e t: $y = -2x + 4$.

Resolução

Os vértices do triângulo são os pontos *E*, *F* e *G* tais que:

$$\{E\} = r \cap s,$$
$$\{F\} = r \cap t$$
e
$$\{G\} = s \cap t.$$



- O ponto *E* é a solução do sistema $\begin{cases} y = 2x & \text{(I)} \\ y = 4x - 8. & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), temos $2x = 4x - 8 \Rightarrow x = 4$.

Substituindo $x = 4$ em (I), obtemos $y = 2 \cdot 4 = 8$.

Logo, $E(4, 8)$.

- O ponto F é a solução do sistema $\begin{cases} y = 2x & \text{(III)} \\ y = -2x + 4. & \text{(IV)} \end{cases}$

  Substituindo (III) em (IV), temos $2x = -2x + 4 \Rightarrow x = 1$.

  Substituindo $x = 1$ em (III), obtemos $y = 2 \cdot 1 = 2$.

  Logo, $F(1, 2)$.

- O ponto G é a solução do sistema $\begin{cases} y = 4x - 8 & \text{(V)} \\ y = -2x + 4. & \text{(VI)} \end{cases}$

  Substituindo (V) em (VI), temos $4x - 8 = -2x + 4 \Rightarrow x = 2$.

  Substituindo $x = 2$ em (V), obtemos $y = 4 \cdot 2 - 8 \Rightarrow y = 0$.

  Logo, $G(2, 0)$.

- Área do triângulo EFG

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 16 - 4 - 8 = 12 \quad \therefore A_{EFG} = \frac{|D|}{2} = \frac{|12|}{2} = 6.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até d), B.2 (a, b), B.3 (a), B.4 (a), B.5, B.8, C.1, C.3, C.5, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (e até h), B.2 (c, d), B.3 (b), B.4 (b, c), B.6, B.7, B.9, B.10, C.2, C.4, C.7, C.8, C.9, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Calcule a distância do ponto P à reta r nos seguintes casos:

a) $P(3, 1)$ e r: $3x + 4y + 2 = 0$;

b) $P(1, -2)$ e r: $5x - 12y - 3 = 0$;

c) $P(-5, 2)$ e r: $y = -2x + 5$;

d) $P(-4, 6)$ e r: $y = 3$;

e) $P(1, 2)$ e r: $6x + 8y - 5 = 0$;

f) $P(0, -1)$ e r: $15x - 8y + 9 = 0$;

g) $P\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e r: $y = \frac{4x}{3} - 1$;

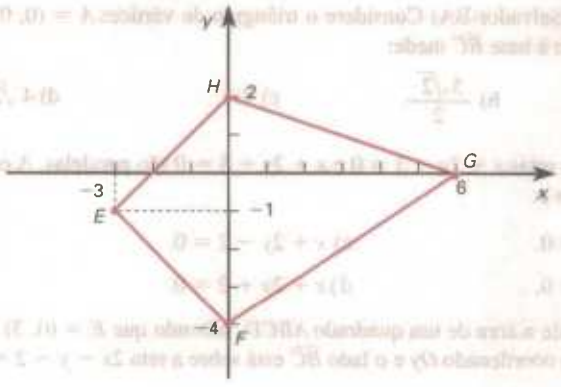
h) $P(8, -4)$ e r: $x = 5$.

B.2 Determine a distância entre as retas paralelas r e s, nos seguintes casos:
a) r: $12x - 5y + 10 = 0$ e s: $12x - 5y - 3 = 0$;
b) r: $y = 2x - 2$ e s: $y = 2x - 1$;
c) r: $4x - 3y - 5 = 0$ e s: $4x - 3y + 5 = 0$;
d) r: $y = -x + 2$ e s: $y = -x - 1$.

B.3 Obtenha a medida da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC nos seguintes casos:
a) $A(1, 4)$, $B(-6, 3)$ e $C(6, -2)$;
b) $A(-2, 1)$, $B(1, -2)$ e $C(2, -1)$.

B.4 Encontre a área do triângulo ABC nos seguintes casos:
a) $A(2, 4)$, $B(-2, 0)$ e $C(1, 1)$;
b) $A(6, 0)$, $B(5, 1)$ e $C(-1, 1)$;
c) $A(3, -2)$, $B(0, 0)$ e $C(0, 1)$.

B.5 Qual é a área do quadrilátero *EFGH* do gráfico?



B.6 Os vértices de um quadrilátero convexo são os pontos (1, 3), (4, 0), (5, 1) e (0, 2). Calcule a área desse polígono. **Cuidado!** Esboce o gráfico antes de dividir o quadrilátero em triângulos.

B.7 Obtenha a área do pentágono convexo cujos vértices são os pontos (1, 1), (1, −3), (−4, 0), (2, 0) e (−4, −3).

B.8 Determine a área do triângulo limitado pelas retas r: $y = 2x$, s: $y = 3x$ e t: $y = x + 2$.

B.9 Encontre a área do triângulo cujos lados estão contidos nas retas r: $x - 2y + 1 = 0$, s: $x + y + 4 = 0$ e t: $x + 2y - 3 = 0$.

B.10 Calcule a área do polígono convexo limitado pelas retas r: $y = 5$, s: $y = x$, t: $x = 4$ e u: $x = 0$.

Exercícios complementares

C.1 Obtenha o(s) ponto(s) do eixo das abscissas que dista(m) 2 unidades da reta r: $3x + 4y + 5 = 0$.

C.2 Encontre o(s) ponto(s) do eixo das ordenadas cuja distância à reta r: $y = 2x - 7$ é igual a $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C.3 Determine o(s) ponto(s) pertencente(s) à reta s: $y = x + 3$ e que dista(m) 3 unidades da reta r: $5x - 12y + 4 = 0$.

C.4 Dois lados de um quadrado estão contidos nas retas r: $3x + y - 1 = 0$ e s: $3x + y - 2 = 0$. Calcule a área desse quadrado.

C.5 Obtenha a equação da reta equidistante das retas r: $2x + 5y - 1 = 0$ e s: $2x + 5y + 7 = 0$.

C.6 Quais são as equações das retas que contêm as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r: $2x - 3y + 1 = 0$ e s: $3x - 2y - 3 = 0$?

C.7 Três lados de um losango estão contidos nas retas r: $y = 2x$, s: $x - 2y = 0$ e t: $y = 2x - 6$. Quais são as equações das retas que contêm as diagonais desse polígono?

C.8 Os vértices de um triângulo são os pontos $A(2, 1)$, $B(3, 6)$ e $C(x, 1)$. Determine x, sabendo que esse triângulo tem área igual a 5 unidades.

C.9 A reta r: $x + y - k = 0$, $k > 0$, determina com os eixos Ox e Oy um triângulo de área 18 unidades. Determine k.

C.10 Determine o valor de a, sabendo que a reta r: $ax + y - 6 = 0$ determina com os eixos coordenados um triângulo de área 9 unidades.

Questões dos vestibulares

V.1 (U. Católica de Salvador-BA) Considere o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 4)$ e $C = (4, 1)$. Sua altura em relação à base $\overline{BC}$ mede:

a) $2\sqrt{2}$. b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. c) 4. d) $4\sqrt{2}$. e) $5\sqrt{2}$.

V.2 (Cescem-SP) As retas $x + 2y - 3 = 0$ e $x + 2y + 5 = 0$ são paralelas. A equação da reta paralela equidistante dessas duas é:

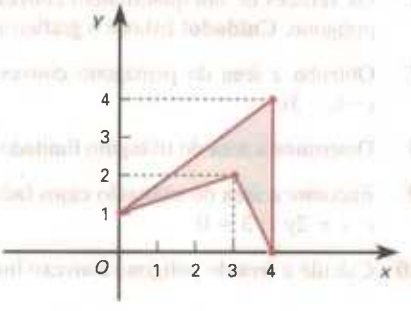
a) $x + 2y + 1 = 0$. c) $x + 2y - 2 = 0$. e) $x + 2y - \frac{5}{3} = 0$.

b) $x + 2y - 1 = 0$. d) $x + 2y + 2 = 0$.

V.3 (Faap-SP) Calcule a área de um quadrado $ABCD$, sabendo que $E = (0, 3)$ é um ponto sobre o lado $\overline{AB}$, C pertence ao eixo coordenado Oy e o lado $\overline{BC}$ está sobre a reta $2x - y - 2 = 0$.

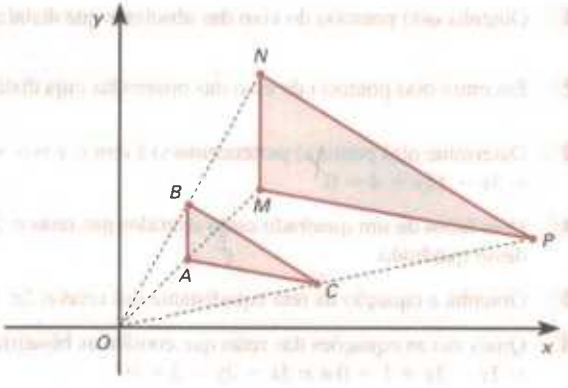
V.4 (FGV-SP) A área da figura hachurada no diagrama vale:

a) 4,0.
b) 3,5.
c) 3,0.
d) 5,0
e) 4,5.



V.5 (Fuvest-SP) Na figura, $A = (3, 4)$, $M = (9, 12)$, $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$ e $\overline{AC} \parallel \overline{MP}$. A área do triângulo ABC é 8. A área do triângulo MNP é:

a) $\frac{8}{9}$.
b) $\frac{8}{3}$.
c) 24.
d) $36\sqrt{3}$.
e) 72.

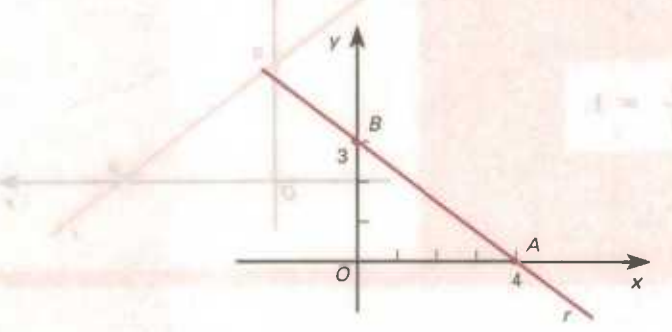


Capítulo 7

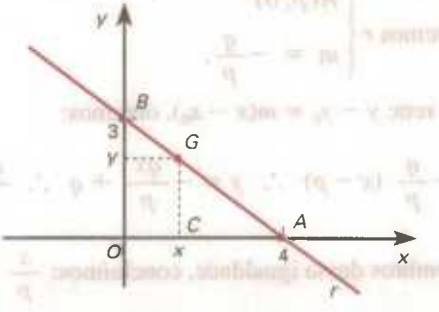
Complementos sobre a equação da reta

1. Equação segmentária da reta

Consideremos uma reta r cujo gráfico intercepta, **não** na origem, os eixos coordenados. Por exemplo:



Seja $G(x, y)$ um ponto genérico de r, distinto de $A(4, 0)$ e $B(0, 3)$:



Da semelhança entre os triângulos GCA e BOA, temos:

$$\frac{y}{3} = \frac{4 - x}{4} \Rightarrow \frac{y}{3} = \frac{4}{4} - \frac{x}{4} \therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$$

Essa equação é denominada "**equação segmentária** da reta r". Isso porque sua representação é dada em função das medidas algébricas dos **segmentos** $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.

Note que, qualquer que seja a posição do ponto $G(x, y)$, $G \neq A$ e $G \neq B$, obtêm-se triângulos semelhantes, cuja proporção entre os lados resulta na equação segmentária. Verifique!

Note ainda que os pontos $A(4, 0)$ e $B(0, 3)$ também satisfazem a equação de r. Observe:

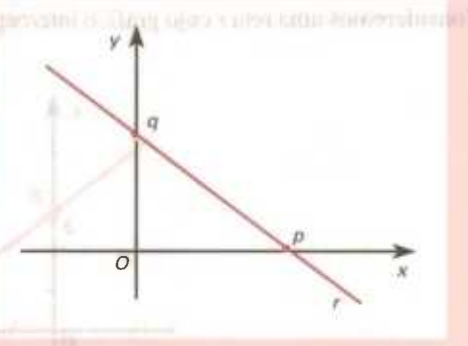
$$A(4, 0): \ \frac{\overbrace{x}^{4}}{4} + \frac{\overbrace{y}^{0}}{3} = 1 \ \text{ e } \ B(0, 3): \ \frac{\overbrace{x}^{0}}{4} + \frac{\overbrace{y}^{3}}{3} = 1.$$

Generalizando, temos:

Teorema

Se uma reta r do plano cartesiano intercepta os eixos Ox e Oy nos pontos $A(p, 0)$ e $B(0, q)$, $p \neq 0$ e $q \neq 0$, então sua equação pode ser apresentada sob a seguinte forma:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$



Demonstração

O coeficiente angular de r é $m = \dfrac{0 - q}{p - 0} = -\dfrac{q}{p}$.

Escolhendo o ponto $A(p, 0)$, temos $r \begin{cases} A(p, 0) \\ m = -\dfrac{q}{p}. \end{cases}$

Pela equação fundamental da reta: $y - y_0 = m(x - x_0)$, obtemos:

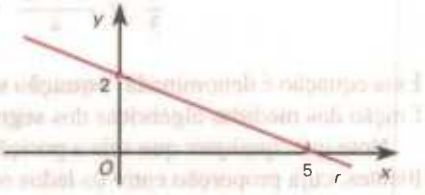
$$y - 0 = -\frac{q}{p}(x - p) \ \therefore \ y = -\frac{qx}{p} + q \ \therefore \ \frac{qx}{p} + y = q.$$

Dividindo por q ambos os membros dessa igualdade, concluímos: $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Obter uma equação da reta r do gráfico ao lado.



Resolução

Pela equação **segmentária** temos $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{2} = 1$.

R.2 Uma equação geral de uma reta r é $3x - 7y - 5 = 0$. Escrever essa equação sob a forma segmentária e, a partir dela, construir o gráfico de r.

Resolução

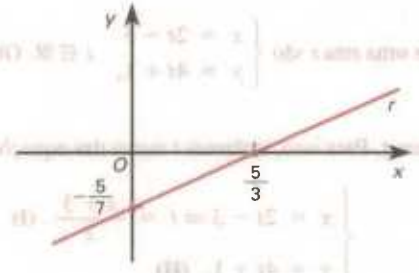
$$3x - 7y - 5 = 0 \Rightarrow 3x - 7y = 5.$$

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por 5, obtemos: $\frac{3x}{5} - \frac{7y}{5} = \frac{5}{5}$.

Assim, a equação segmentária de r é $\frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{-\frac{5}{7}} = 1$.

- Como o denominador de x é $\frac{5}{3}$, temos que r intercepta o eixo Ox no ponto $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.
- Como o denominador de y é $-\frac{5}{7}$, temos que r intercepta o eixo Oy no ponto $\left(0, -\frac{5}{7}\right)$.

Assim, o gráfico de r é:



2. Equações paramétricas da reta

Um físico, estudando o movimento de um projétil, conclui que sua trajetória é plana e que seus deslocamentos na horizontal e na vertical são descritos, respectivamente, pelas equações $\begin{cases} x = t + 5 \\ y = 3t + 6, \end{cases}$ em que t representa o tempo.

Se esse cientista quiser descrever a trajetória do projétil através de uma equação que relacione apenas os deslocamentos x e y, basta que isole a variável t em uma das equações e substitua o valor obtido na outra: $\begin{cases} x = t + 5 \Rightarrow t = x - 5 \text{ (I)} \\ y = 3t + 6. \text{ (II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtém-se $y = 3(x - 5) + 6 \therefore y = 3x - 9$.

As equações $x = t + 5$ e $y = 3t + 6$ são chamadas de "**equações paramétricas** da trajetória de equação $y = 3x - 9$". A variável t é chamada de "**parâmetro** das equações paramétricas".

De modo geral, podemos apresentar as coordenadas de cada ponto (x, y) de uma reta r em função de um parâmetro t:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t). \end{cases}$$

Essas são as equações **paramétricas** da reta r.

Se a partir das equações paramétricas de uma reta desejarmos obter uma equação geral ou reduzida, basta que eliminemos o parâmetro.

Exercícios resolvidos

R.3 As equações paramétricas de uma reta r são $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 4t + 1, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. Obter uma equação geral dessa reta.

Resolução

Devemos eliminar o parâmetro t. Para isso, isolamos t numa das equações e o substituímos na outra.

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \Rightarrow t = \dfrac{x + 3}{2} \quad \text{(I)} \\ y = 4t + 1. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos $y = 4 \cdot \dfrac{x + 3}{2} + 1 \therefore y = 2(x + 3) + 1 \therefore y = 2x + 7$.

Assim, uma equação geral da reta r é $2x - y + 7 = 0$.

R.4 Representar no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que $\begin{cases} x = t - 4 \\ y = 3t - 6, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Resolução

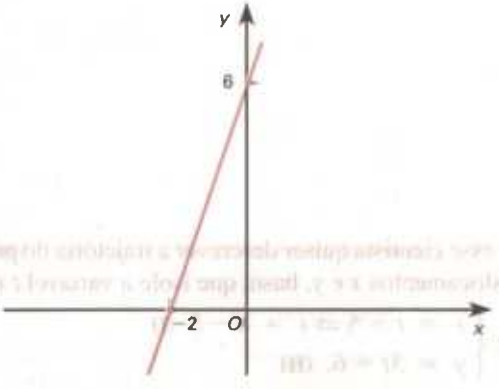
$$\begin{cases} x = t - 4 \Rightarrow t = x + 4 \quad \text{(I)} \\ y = 3t - 6. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos $y = 3(x + 4) - 6 \therefore y = 3x + 6$.

Concluímos assim que as equações apresentadas são **equações paramétricas** da reta de equação $y = 3x + 6$. Para construir seu gráfico, basta obtermos dois de seus pontos distintos:

x	y (= $3x + 6$)
0	6
−2	0

$\Rightarrow$



R.5 Representar no plano cartesiano o conjunto de pontos (x, y), tais que:

$$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = \dfrac{t}{2} + 2, \end{cases} \quad \text{com } t \in \mathbb{R} \text{ e } -4 \leq t \leq 0.$$

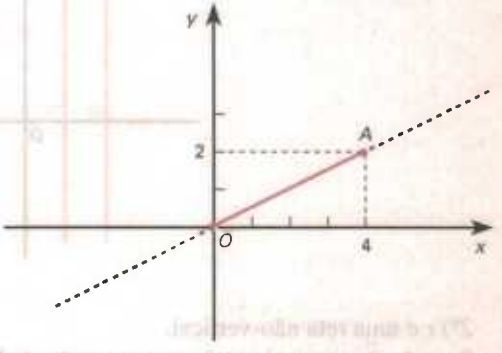
Resolução

Podemos escrever $\begin{cases} t = x - 4 \quad \textbf{(I)} \\ t = 2y - 4 \quad \textbf{(II)} \\ -4 \leq t \leq 0. \quad \textbf{(III)} \end{cases}$

- De (I) e (III), temos $-4 \leq x - 4 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$.
- De (II) e (III), temos $-4 \leq 2y - 4 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 2y \leq 4 \;\therefore\; 0 \leq y \leq 2$.
- De (I) e (II), temos $x - 4 = 2y - 4 \Rightarrow y = \dfrac{x}{2}$.

Temos então $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2; \end{cases}$

x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
4	2



Note que o gráfico é o segmento $\overline{OA}$ e não a reta $\overleftrightarrow{OA}$, pois $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq 2$.

3. Feixe plano de retas paralelas

Chama-se **feixe plano de retas paralelas** o conjunto de todas as retas de um plano α paralelas a uma reta r dada.

Nota: vamos tratar apenas de feixe **plano** de retas paralelas. Por comodidade, omitiremos a palavra **plano**, chamando-o simplesmente de **feixe de retas paralelas**.

3.1. Equação do feixe de paralelas

Definição

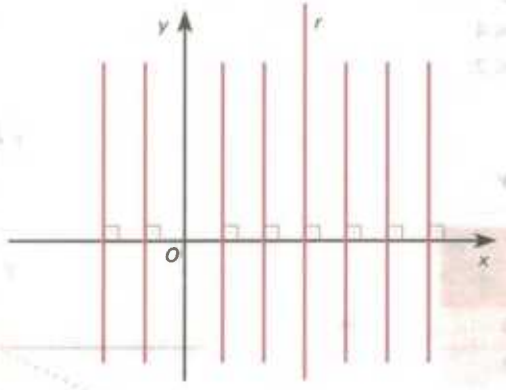
Dada uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, uma equação do feixe de retas paralelas a r é $ax + by + k = 0$, onde k varia em $\mathbb{R}$.

Para justificar essa afirmação, vamos separá-la em dois casos.

1º) r é uma reta vertical.

Se r é vertical, então sua equação é da forma $ax + c = 0$, com $a \neq 0$.

Ora, toda reta de equação $ax + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$, é vertical também e, portanto, paralela a r. Assim, ao variar k, em $\mathbb{R}$, obtemos todas as retas do plano paralelas a r.

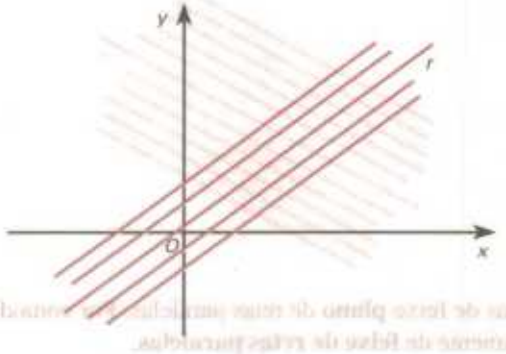


2º) r é uma reta não-vertical.

Se r é não-vertical, então sua equação é da forma $ax + by + c = 0$, com $b \neq 0$, e, portanto, seu coeficiente angular é $m_r = -\frac{a}{b}$.

Ora, toda reta s de equação $ax + by + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$, é paralela a r, pois tem o mesmo coeficiente angular de r, ou seja, $m_s = m_r = -\frac{a}{b}$.

Assim, ao variar k em $\mathbb{R}$, obtemos todas as retas do plano paralelas a r.

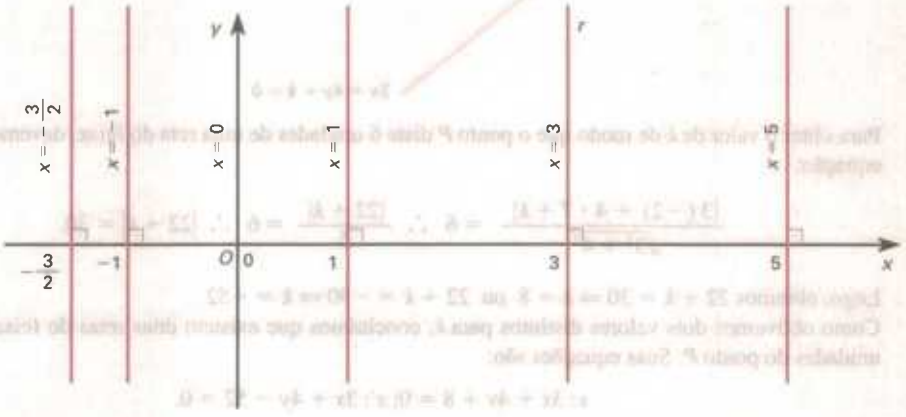


Exemplos

a) Uma equação do feixe de retas paralelas à reta vertical r: $x - 3 = 0$ é $x + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Note que ao variar k, em $\mathbb{R}$, obtemos todas as retas do plano paralelas a r:

$$k = 0 \Rightarrow x + 0 = 0 \therefore x = 0;$$
$$k = 1 \Rightarrow x + 1 = 0 \therefore x = -1;$$
$$k = \frac{3}{2} \Rightarrow x + \frac{3}{2} = 0 \therefore x = -\frac{3}{2};$$
$$k = -1 \Rightarrow x - 1 = 0 \therefore x = 1;$$
$$k = -5 \Rightarrow x - 5 = 0 \therefore x = 5.$$
$$\vdots$$

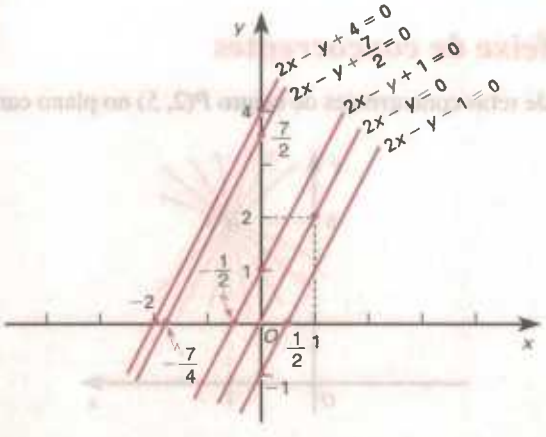


b) Uma equação do feixe de retas paralelas à reta não-vertical $2x - y + 4 = 0$ é:

$$2x - y + k = 0, k \in \mathbb{R}.$$

Note que ao variar k, em $\mathbb{R}$, obtemos todas as retas do plano paralelas a r:

$$k = 0 \Rightarrow 2x - y = 0;$$
$$k = 1 \Rightarrow 2x - y + 1 = 0;$$
$$k = -1 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0;$$
$$k = \frac{7}{2} \Rightarrow 2x - y + \frac{7}{2} = 0;$$
$$k = 4 \Rightarrow 2x - y + 4 = 0.$$
$$\vdots$$



Exercício resolvido

R.6 É dada a reta r de equação $3x + 4y + 1 = 0$.

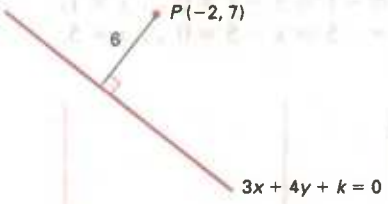
a) Determinar uma equação do feixe de retas paralelas a r.

b) Obter uma equação geral da reta desse feixe, que dista 6 unidades do ponto $P(-2, 7)$.

Resolução

a) Uma equação do feixe de paralelas a r é $3x + 4y + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

b)



Para obter o valor de k de modo que o ponto P diste 6 unidades de uma reta do feixe, devemos resolver a equação:

$$\frac{|3(-2) + 4 \cdot 7 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6 \;\therefore\; \frac{|22 + k|}{5} = 6 \;\therefore\; |22 + k| = 30.$$

Logo, obtemos $22 + k = 30 \Rightarrow k = 8$ ou $22 + k = -30 \Rightarrow k = -52$.

Como obtivemos dois valores distintos para k, concluímos que existem duas retas do feixe distantes 6 unidades do ponto P. Suas equações são:

$$s: 3x + 4y + 8 = 0;\; s': 3x + 4y - 52 = 0.$$

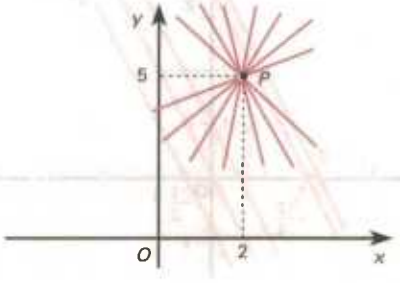
4. Feixe plano de retas concorrentes

Vimos no capítulo 4 que, dado um ponto P de um plano α, chama-se **feixe plano de retas concorrentes** de centro P o conjunto de todas as retas contidas em α que passam por P.

Nota: vamos tratar apenas de feixe **plano** de retas concorrentes. Por comodidade omitiremos a palavra **plano**, chamando-o simplesmente de **feixe de retas concorrentes**.

4.1. Equação do feixe de concorrentes

Consideremos o feixe de retas concorrentes de centro $P(2, 5)$ no plano cartesiano.



As retas **não-verticais** desse feixe são obtidas da seguinte equação:

$$y - 5 = m(x - 2),\ m \in \mathbb{R}.$$

Observe que ao variar m, em $\mathbb{R}$, obtemos todas as retas não-verticais que passam por $P(2, 5)$.

A reta vertical que passa por P tem equação $x = 2$.

É possível representar esse feixe de concorrentes através de uma única equação?

É perfeitamente possível. Basta, para isso, obtermos as equações de duas retas distintas desse feixe. As mais simples de obter são: a reta vertical $x = 2$ e a reta horizontal $y = 5$, ou seja:

$$x - 2 = 0;\ \text{(I)}$$
$$y - 5 = 0.\ \text{(II)}$$

Multipliquemos ambos os membros de (I) por um parâmetro real α e ambos os membros de (II) por um parâmetro real β (α e β não simultaneamente nulos):

$$\alpha(x - 2) = 0;\ \beta(y - 5) = 0.$$

Somando membro a membro essas equações obtemos: $\alpha(x - 2) + \beta(y - 5) = 0$. **(III)**

Atribuindo a α e β todos os valores reais, não simultaneamente nulos, obtemos todas as equações de todas as retas que passam pelo ponto $P(2, 5)$, inclusive a reta vertical.

- Para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, temos $1(x - 2) + 0(y - 5) = 0 \Rightarrow x = 2$, que é a equação da reta **vertical** que passa por $P(2, 5)$.
- Para $\beta \neq 0$, temos:

$$\alpha(x - 2) + \beta(y - 5) = 0 \Rightarrow \beta(y - 5) = -\alpha(x - 2) \ \therefore y - 5 = -\frac{\alpha}{\beta}(x - 2).$$

A expressão $-\frac{\alpha}{\beta}$, com $\beta \neq 0$, assume qualquer valor real. Portanto essa última equação representa **todas as retas não-verticais** que passam por $P(2, 5)$.

Generalizando, podemos enunciar:

> Se duas retas $r: ax + by + c = 0$ e $s: dx + ey + f = 0$ concorrem num ponto $P(x_0, y_0)$, então uma equação do feixe de retas concorrentes de centro P é:
>
> $$\alpha(ax + by + c) + \beta(dx + ey + f) = 0,$$
>
> em que α e β são parâmetros reais não simultaneamente nulos.

Exercícios resolvidos

R.7 Determinar uma equação do feixe de retas concorrentes de centro $P(4, 6)$.

Resolução

Inicialmente devemos obter as equações de duas retas distintas desse feixe. As mais simples são a reta vertical $x = 4$ e a horizontal $y = 6$, ou seja:

$$x - 4 = 0;\ \text{(I)}$$
$$y - 6 = 0.\ \text{(II)}$$

Multiplicando ambos os membros de (I) por um parâmetro real α e ambos os membros de (II) por um parâmetro real β, α e β não simultaneamente nulos, obtemos: $\alpha(x - 4) = 0;\ \beta(y - 6) = 0$.

Somando membro a membro essas duas equações, obtemos uma equação do feixe:

$$\alpha(x - 4) + \beta(y - 6) = 0.$$

R.8 Obter uma equação do feixe de retas concorrentes que contém as retas $r: 2x - y + 3 = 0$ e $s: x + 4y = 0$.

Resolução

$$2x - y + 3 = 0; \text{ (I)}$$
$$x + 4y = 0. \text{ (II)}$$

Multiplicando por α ambos os membros de (I) e por β ambos os membros de (II), α e β reais e não simultaneamente nulos, obtemos $\alpha(2x - y + 3) = 0$; $\beta(x + 4y) = 0$.
Somando membro a membro essas equações, obtemos uma equação do feixe:

$$\alpha(2x - y + 3) + \beta(x + 4y) = 0.$$

R.9 Obter o centro do feixe de retas concorrentes $\alpha(2x + y - 3) + \beta(x - y + 6) = 0$, em que α e β são parâmetros reais não simultaneamente nulos.

Resolução

Para obter as equações de duas retas distintas desse feixe, basta atribuirmos valores a α e β, não simultaneamente nulos. Por exemplo:

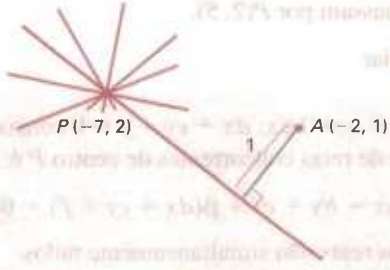
$$\alpha = 1 \text{ e } \beta = 0 \Rightarrow 2x + y - 3 = 0; \text{ (I)}$$
$$\alpha = 0 \text{ e } \beta = 1 \Rightarrow x - y + 6 = 0. \text{ (II)}$$

As equações (I) e (II) representam duas retas do feixe. Resolvendo o sistema formado por essas equações obtemos o centro do feixe: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \text{ (I)} \\ x - y + 6 = 0. \text{ (II)} \end{cases}$

Somando membro a membro (I) e (II), obtemos $3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$.
Substituindo $x = -1$ em (I), temos $2(-1) + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 5$.
Logo, o centro do feixe é o ponto $P(-1, 5)$.

R.10 Obter uma equação da reta do feixe de concorrentes de centro $P(-7, 2)$ que dista 1 unidade do ponto $A(-2, 1)$.

Resolução



Para obter uma equação do feixe, vamos considerar as retas vertical e horizontal que passam por P:

$$x + 7 = 0 \Rightarrow \alpha(x + 7) = 0 \text{ e } y - 2 = 0 \Rightarrow \beta(y - 2) = 0.$$

Logo, uma equação do feixe é:

$$\alpha(x + 7) + \beta(y - 2) = 0 \text{ (I)} \Rightarrow \alpha x + \beta y + 7\alpha - 2\beta = 0,$$

com α e β não simultaneamente nulos. Para conseguir um par de valores para α e β de modo que a equação (I) represente uma reta que dista 1 unidade do ponto $A(-2, 1)$, devemos resolver a seguinte equação:

$$\frac{|\alpha \cdot (-2) + \beta \cdot 1 + 7\alpha - 2\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 1 \Rightarrow |5\alpha - \beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow 24\alpha^2 - 10\alpha\beta = 0 \therefore \alpha(24\alpha - 10\beta) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \frac{5\beta}{12}.$$

Temos então duas possibilidades.

1ª) Substituindo $\alpha = 0$ em (I), temos $0(x + 7) + \beta(y - 2) = 0 \Rightarrow \beta(y - 2) = 0$.
Como $\beta \neq 0$, pois α e β não podem ser simultaneamente nulos, obtemos $y - 2 = 0$.

2ª) Substituindo $\alpha = \frac{5\beta}{12}$ em (I), temos:

$$\frac{5\beta}{12}(x + 7) + \beta(y - 2) = 0 \ (\div \beta) \ \therefore \ \frac{5}{12}(x + 7) + (y - 2) = 0$$

$$\therefore 5(x + 7) + 12(y - 2) = 0 \Rightarrow 5x + 12y + 11 = 0.$$

Portanto há duas retas que satisfazem as condições exigidas. Suas equações são:

$$r: y - 2 = 0; \ r': 5x + 12y + 11 = 0.$$

Nota: outra maneira de se resolver esse exercício é apresentar o feixe através das equações:

$$y - 2 = m(x + 7), \ m \in \mathbb{R}, \quad \text{ou} \quad x = -7.$$

- Verificamos se a reta vertical $v: x + 7 = 0$ dista 1 unidade do ponto $A(-2, 1)$: $d_{vA} = \frac{|-2 + 7|}{\sqrt{1^2}} = 5$.
  Como $d_{vA} \neq 1$, concluímos que a reta v não convém ao problema.
- Procuramos, dentre as retas da forma $mx - y + 7m + 2 = 0$, aquelas que distam 1 unidade do ponto $A(-2, 1)$:

$$\frac{|m \cdot (-2) - 1 + 7m + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1 \ \therefore \ |5m + 1| = \sqrt{m^2 + 1} \ \therefore \ (|5m + 1|)^2 = (\sqrt{m^2 + 1})^2$$

$$\therefore 25m^2 + 10m + 1 = m^2 + 1 \ \therefore \ 24m^2 + 10m = 0 \ \therefore \ m(24m + 10) = 0$$

$$\therefore m = 0 \text{ ou } m = -\frac{10}{24} = -\frac{5}{12}.$$

Logo, as retas procuradas têm equações:

$$r: 0x - y + 7 \cdot 0 + 2 = 0 \text{ e } r': -\frac{5x}{12} - y + 7\left(-\frac{5}{12}\right) + 2 = 0, \text{ ou seja, } r: y - 2 = 0 \text{ e } r': 5x + 12y + 11 = 0.$$

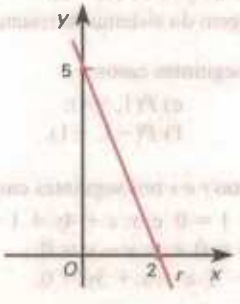
Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c), B.2 (a, b, c), B.3 (a, b), B.4 (a, b), B.5, B.7 (a, b, c), B.8 (a, b, c), B.9 (a, b), C.1, C.3, C.4, C.8.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (d, e, f), B.2 (d, e, f), B.3 (c, d), B.4 (c, d), B.6, B.7 (d, e, f), B.8 (d, e, f), C.2, C.5, C.6, C.7, C.9.

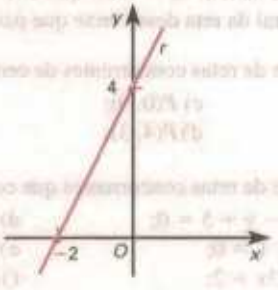
Exercícios básicos

B.1 Obtenha uma equação da reta r em cada um dos casos a seguir:

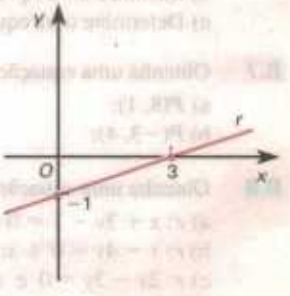
a)



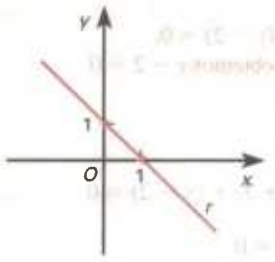
b)



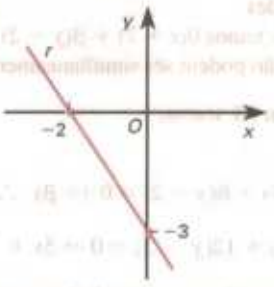
c)



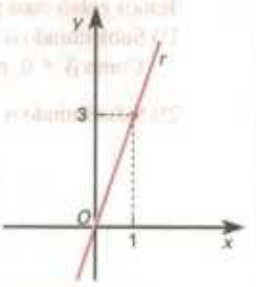
d)



e)



f)



B.2 Escreva na forma segmentária a equação da reta r e a seguir represente-a graficamente nos seguintes casos:

a) $r: 6x - 5y - 7 = 0$;

b) $r: 3x + y - 3 = 0$;

c) $r: y = 4x - 5$;

d) $r: 4x + 2y - 7 = 0$;

e) $r: 2x - \frac{5y}{3} - 1 = 0$;

f) $r: y = \frac{6x}{5} - 4$.

B.3 Dê uma equação geral da reta cujas equações paramétricas são:

a) $\begin{cases} x = t - 4 \\ y = 3t + 5, \end{cases} t \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 6t - 4, \end{cases} t \in \mathbb{R}$;

c) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 4, \end{cases} t \in \mathbb{R}$;

d) $\begin{cases} x = \frac{4t}{3} - 1 \\ y = \frac{2t}{5} + \frac{1}{3}, \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

B.4 Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que:

a) $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 1, \end{cases} t \in \mathbb{R}$;

b) $\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = t + 1, \end{cases} t \in \mathbb{R}$ e $-1 \leqslant t \leqslant 2$;

c) $\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = 4t + 1, \end{cases} t \in \mathbb{R}$;

d) $\begin{cases} x = 5t - 50 \\ y = \frac{t}{5} - 2, \end{cases} t \in \mathbb{R}$ e $10 \leqslant t \leqslant 11$.

B.5 É dada a reta r de equação $5x - 12y + 1 = 0$.

a) Determine uma equação do feixe de retas paralelas a r.

b) Obtenha uma equação geral da reta desse feixe que dista 2 unidades do ponto $P(1, -2)$.

c) Obtenha uma equação geral da reta desse feixe que passa pelo ponto $A(3, 4)$.

B.6 A equação reduzida de uma reta r é $y = \frac{3x}{4} + 4$.

a) Obtenha uma equação do feixe de retas paralelas a r.

b) Encontre uma equação geral da reta desse feixe que dista 3 unidades do ponto $P(1, -2)$.

c) Determine uma equação geral da reta desse feixe que passa pela origem do sistema cartesiano.

B.7 Obtenha uma equação do feixe de retas concorrentes de centro P, nos seguintes casos:

a) $P(8, 1)$;

b) $P(-3, 4)$;

c) $P(0, 0)$;

d) $P(4, 3)$;

e) $P(1, -4)$;

f) $P(-1, -1)$.

B.8 Obtenha uma equação do feixe de retas concorrentes que contém as retas r e s nos seguintes casos:

a) $r: x + 3y - 1 = 0$ e $s: 2x - y + 5 = 0$;

b) $r: x - 4y = 0$ e $s: x + y - 1 = 0$;

c) $r: 2x - 3y = 0$ e $s: y = -3x + 2$;

d) $r: x - y - 1 = 0$ e $s: x + 4y + 1 = 0$;

e) $r: 4x + 5y = 0$ e $s: x - y = 0$;

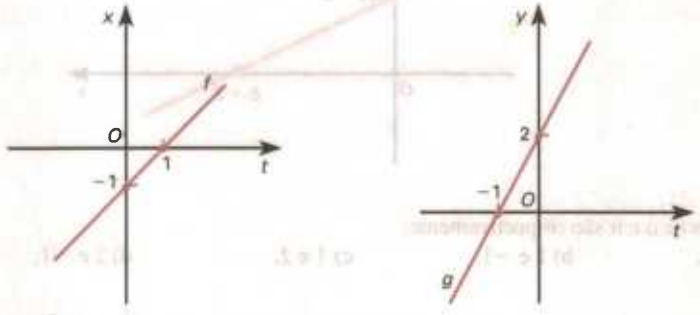
f) $r: y = 6x - 1$ e $s: x + 3y = 0$.

B.9 Sendo α e β parâmetros reais não simultaneamente nulos, obtenha o centro de cada um dos seguintes feixes de retas concorrentes:

a) $\alpha(4x + y - 3) + \beta(x - y - 2) = 0$;
b) $\alpha(3x + 2y + 2) + \beta(x - y + 4) = 0$;
c) $\alpha(x + y - 4) + \beta(3x - 2y - 7) = 0$;
d) $\alpha(x - 2y) + \beta(x - 1) = 0$.

Exercícios complementares

C.1 Os gráficos das equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, com $t \in \mathbb{R}$, são:



a) Obtenha uma equação relacionando apenas as variáveis x e y.
b) Represente no plano cartesiano o conjunto de pontos (x, y), determinados pela equação do item (a).

C.2 As equações paramétricas de uma reta r são:

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = at - 2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine a constante real a, sabendo que o coeficiente angular da reta r é igual a 3.

C.3 Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$\begin{cases} x = \cos^2 \theta \\ y = \operatorname{sen}^2 \theta, \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

C.4 Obtenha uma equação geral da reta do feixe de paralelas $x + 2y + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$, que forma com os eixos coordenados um triângulo de área 1.

C.5 Um feixe de retas concorrentes tem equação $\alpha(x - y + 3) + \beta(x + y + 1) = 0$, com α e β reais não simultaneamente nulos. Obtenha uma equação da reta desse feixe paralela à reta r: $2x + y + 5 = 0$.

C.6 A equação $\alpha(2x + y - 2) + \beta x = 0$, com α e β reais não simultaneamente nulos, representa um feixe de concorrentes. Obtenha a equação reduzida da reta desse feixe perpendicular à reta r: $2x - y + 1 = 0$.

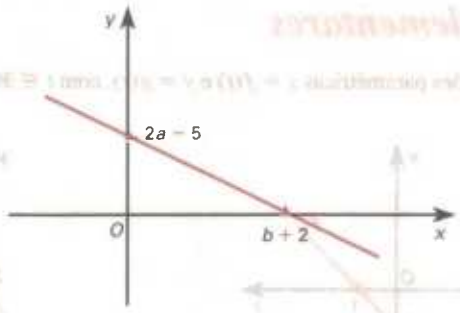
C.7 Obtenha uma equação da reta do feixe de concorrentes $\alpha(x + y - 3) + \beta(2x - y) = 0$, α e β reais não simultaneamente nulos, que forma com os eixos Ox e Oy um triângulo de área 4.

C.8 Obtenha a equação da reta do feixe de concorrentes de centro $P(5, 0)$ que dista 4 unidades do ponto $A(1, -2)$.

C.9 Encontre uma equação da reta do feixe de concorrentes de centro $P(2, 3)$ que dista 6 unidades do ponto $A(0, 9)$.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) A reta r de equação $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ tem como gráfico:



Os valores de a e b são respectivamente:

a) -1 e 1. b) 1 e -1. c) 1 e 2. d) 2 e -1. e) 3 e 1.

V.2 (Cescea-SP) O coeficiente angular da reta de equações paramétricas $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 4 \end{cases}$ é:

a) $-\frac{3}{2}$. b) $-\frac{1}{2}$. c) -2. d) $-\frac{2}{3}$. e) $\frac{1}{2}$.

V.3 (Cescem-SP) A equação $y = kx - 3$, $k \in \mathbb{R}$, representa retas de um feixe. A equação da reta desse feixe, perpendicular à reta de equação $2x + y - 5 = 0$, é:

a) $2x - y - 3 = 0$.
b) $2x - y + 3 = 0$.
c) $x + 2y + 6 = 0$.
d) $x - 2y - 6 = 0$.
e) $x - y + 3 = 0$.

V.4 (E.E. Mauá-SP) Considere-se o feixe de retas $\alpha(x + y - 2) + \beta(2x + y - 4) = 0$. A equação da reta desse feixe que forma com os eixos coordenados ortogonais um triângulo retângulo de área igual a 3 unidades é:

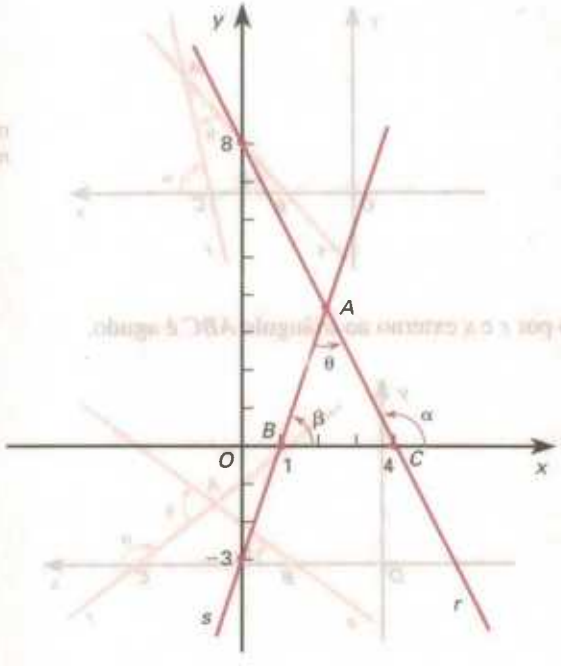
a) $2x + 3y - 6 = 0$.
b) $2x - 3y - 6 = 0$.
c) $18x + y - 18 = 0$.
d) $2x - y = 0$.
e) $3x + 2y - 6 = 0$.

Capítulo 8

Ângulos formados por duas retas e inequações do 1º grau

1. Cálculo da medida de um ângulo formado por duas retas

Os gráficos das retas r: $2x + y - 8 = 0$ e s: $3x - y - 3 = 0$ são:



Temos que $m_r = \operatorname{tg} \alpha = -2$ e $m_s = \operatorname{tg} \beta = 3$.

O ângulo de medida α é externo do triângulo ABC; logo, temos que:

$$\alpha = \theta + \beta \quad \therefore \quad \theta = \alpha - \beta.$$

Desse modo, podemos calcular a tangente do ângulo $B\hat{A}C$, formado pelas retas r e s:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} = \frac{-2 - 3}{1 + (-2) \cdot 3} = 1.$$

Portanto $\theta = 45°$.

Note, por esse exemplo, a simplicidade do cálculo da medida de um ângulo formado por duas retas não-verticais.

Generalizando, podemos enunciar:

Teorema

Se duas retas r e s, **não-verticais**, de coeficientes angulares respectivamente iguais a m_r e m_s, formam entre si um ângulo agudo de medida θ, então:

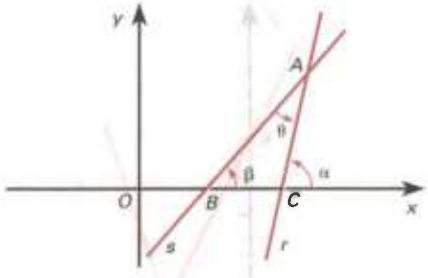
$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|.$$

Demonstração

• Primeiro caso: nenhuma das retas r ou s é horizontal.

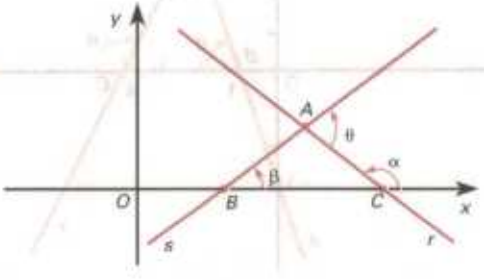
As retas r, s e o eixo Ox determinam um triângulo ABC. Temos duas possibilidades.

1ª) O ângulo formado por r e s interno ao triângulo ABC é agudo.



$m_r = \operatorname{tg}\alpha$;
$m_s = \operatorname{tg}\beta$.

2ª) O ângulo formado por r e s externo ao triângulo ABC é agudo.



$m_r = \operatorname{tg}\alpha$;
$m_s = \operatorname{tg}\beta$.

Na primeira possibilidade, temos:

$$\alpha = \theta + \beta \Rightarrow \theta = \alpha - \beta$$

$$\therefore \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad \therefore \operatorname{tg}\theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \quad \text{(I)}$$

Na segunda possibilidade, temos:

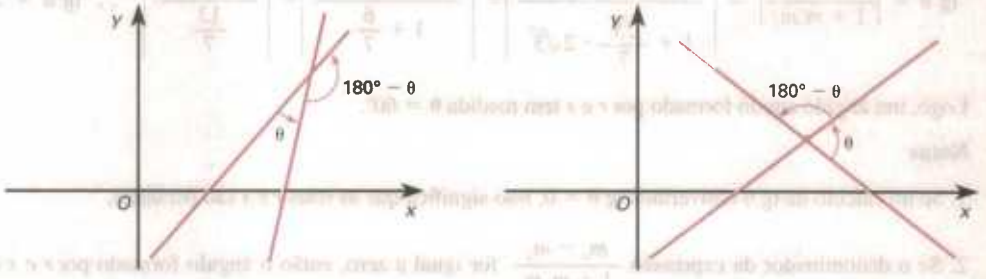
$$\theta = 180° - \alpha + \beta \quad \therefore \theta = 180° - (\alpha - \beta)$$

$$\therefore \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}[180° - (\alpha - \beta)] = -\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

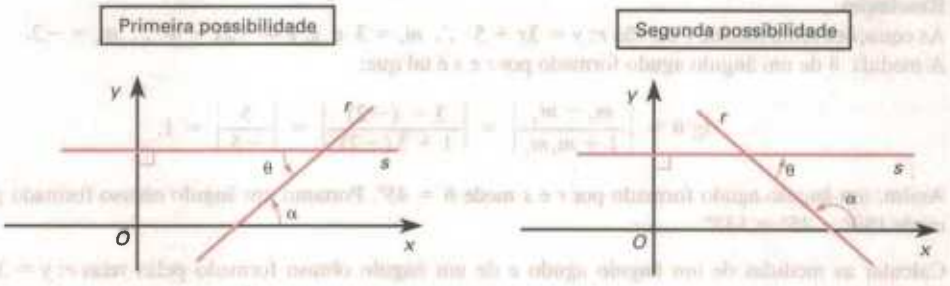
$$\therefore \operatorname{tg}\theta = -\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \quad \therefore \operatorname{tg}\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r m_s} \quad \text{(II)}$$

Podemos sintetizar os resultados (I) e (II) escrevendo: $\operatorname{tg} \theta = \left| \dfrac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$.

Note que a expressão $\left| \dfrac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$, para $m_r \neq m_s$ e $m_r m_s \neq -1$, é sempre positiva, o que garante que θ é ângulo agudo. Se desejarmos calcular a medida de um ângulo obtuso formado por r e s, basta efetuar $180° - \theta$:



- Segundo caso: uma das retas r ou s é horizontal.



$m_s = \operatorname{tg} 0° = 0$;
$m_r = \operatorname{tg} \alpha$, $0° < \alpha < 90°$.

$m_s = \operatorname{tg} 0° = 0$;
$m_r = \operatorname{tg} \alpha$, $90° < \alpha < 180°$.

Na primeira possibilidade, temos: $\theta = \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$.
Na segunda, temos: $\theta + \alpha = 180° \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Esses dois resultados podem ser sintetizados da seguinte maneira: $\operatorname{tg} \theta = |\operatorname{tg} \alpha| = |m_r|$.

Observe que, para $m_s = \operatorname{tg} 0° = 0$, temos: $\left| \dfrac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right| = |m_r|$.

Assim, também nesse segundo caso podemos escrever: $\operatorname{tg} \theta = \left| \dfrac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Determinar a medida de um ângulo agudo formado pelas retas:

$r: \sqrt{3}\,x - 7y + 3 = 0$ e $s: 2\sqrt{3}\,x - y + 8 = 0$.

Resolução

As equações reduzidas das retas r e s são:

$$r: y = \frac{\sqrt{3}\,x}{7} + \frac{3}{7} \;\therefore\; m_r = \frac{\sqrt{3}}{7} \quad \text{e} \quad s: y = 2\sqrt{3}\,x + 8 \;\therefore\; m_s = 2\sqrt{3}.$$

A medida θ de um ângulo agudo formado por r e s é tal que:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{7} - 2\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{7}\cdot 2\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{7} - 2\sqrt{3}}{1 + \frac{6}{7}}\right| = \left|\frac{-\frac{13\sqrt{3}}{7}}{\frac{13}{7}}\right| \;\therefore\; \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}.$$

Logo, um ângulo agudo formado por r e s tem medida $\theta = 60°$.

Notas

1. Se no cálculo da tg θ obtivermos tg $\theta = 0$, isso significa que as retas r e s são paralelas.

2. Se o denominador da expressão $\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$ for igual a zero, então o ângulo formado por r e s é 90°, pois $1 + m_r m_s = 0 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$.

R.2 Determinar a medida de um ângulo obtuso formado pelas retas r: $3x - y + 5 = 0$ e s: $2x + y + 4 = 0$.

Resolução

As equações reduzidas de r e s são r: $y = 3x + 5 \;\therefore\; m_r = 3$ e s: $y = -2x - 4 \;\therefore\; m_s = -2$.

A medida θ de um ângulo agudo formado por r e s é tal que:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{3 - (-2)}{1 + 3(-2)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1.$$

Assim, um ângulo agudo formado por r e s mede $\theta = 45°$. Portanto um ângulo obtuso formado por r e s mede $180° - 45° = 135°$.

R.3 Calcular as medidas de um ângulo agudo e de um ângulo obtuso formado pelas retas r: $y = 3x - 5$ e s: $y = 2x + 1$.

Resolução

Temos que $m_r = 3$ e que $m_s = 2$. Assim, a medida θ do ângulo agudo formado por r e s é tal que:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{3 - 2}{1 + 3\cdot 2}\right| = \left|\frac{1}{7}\right| = \frac{1}{7}.$$

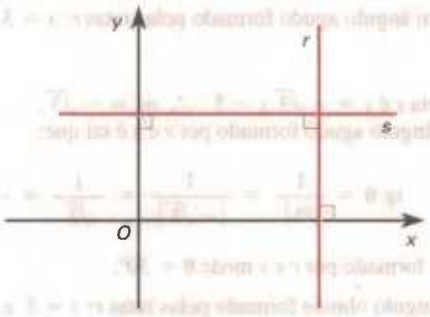
Portanto temos que:

- o ângulo agudo formado por r e s tem medida $\theta = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$;
- o ângulo obtuso formado por r e s tem medida $180° - \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$.

1.1. Cálculo da medida de um ângulo formado por uma reta vertical e outra não-vertical

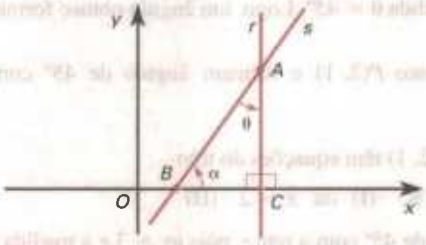
Vimos como se calcula a medida de um ângulo formado por duas retas r e s não-verticais. Vejamos agora como se faz esse cálculo quando uma das retas é vertical e a outra é não-vertical.

• Primeiro caso: r é vertical e s é horizontal. Nesse caso r e s formam entre si ângulos de 90°.



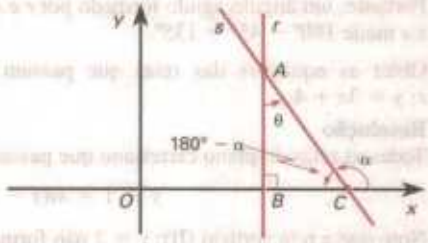
• Segundo caso: r é vertical e s é não-vertical e não-horizontal.

Primeira possibilidade



$m_s = \text{tg } \alpha,\ 0° < \alpha < 90°.$

Segunda possibilidade



$m_s = \text{tg } \alpha,\ 90° < \alpha < 180°.$

Ocorrendo a primeira possibilidade, temos:

$$\begin{cases} \text{tg } \alpha = \dfrac{CA}{BC} \\ \text{tg } \theta = \dfrac{BC}{CA} \end{cases} \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{1}{\text{tg } \alpha},\ \text{tg } \alpha > 0. \quad \textbf{(I)}$$

Ocorrendo a segunda possibilidade, temos:

$$\begin{cases} \text{tg } (180° - \alpha) = \dfrac{BA}{BC} \Rightarrow -\text{tg } \alpha = \dfrac{BA}{BC} \\ \text{tg } \theta = \dfrac{BC}{BA} \end{cases} \therefore \text{tg } \theta = -\frac{1}{\text{tg } \alpha},\ \text{tg } \alpha < 0. \quad \textbf{(II)}$$

Por (I) e (II), temos: $\text{tg } \theta = \dfrac{1}{|m_s|}$.

Generalizando, podemos enunciar:

Se r é uma reta vertical e s é uma reta de coeficiente angular m_s, $m_s \neq 0$, então a medida θ de um ângulo agudo formado por r e s é tal que:

$$\text{tg } \theta = \frac{1}{|m_s|}.$$

Exercícios resolvidos

R.4 Determinar a medida de um ângulo agudo formado pelas retas $r: x = 3$ e $s: \sqrt{3}x + y + 5 = 0$.

Resolução

• A reta r é vertical.

• A equação reduzida da reta s é $y = -\sqrt{3}x - 5 \therefore m_s = -\sqrt{3}$.

Assim, a medida θ de um ângulo agudo formado por r e s é tal que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{|m_s|} = \frac{1}{|-\sqrt{3}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto um ângulo agudo formado por r e s mede $\theta = 30°$.

R.5 Calcular a medida de um ângulo obtuso formado pelas retas $r: x = 5$ e $s: y = -x + 6$.

Resolução

• A reta r é vertical.

• O coeficiente angular da reta s é $m_s = -1$.

Assim, a medida θ de um ângulo agudo formado por r e s é tal que: $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{|m_s|} = \frac{1}{|-1|} = \frac{1}{1} = 1$.

Portanto, um ângulo agudo formado por r e s tem medida $\theta = 45°$. Logo, um ângulo obtuso formado por r e s mede $180° - 45° = 135°$.

R.6 Obter as equações das retas que passam pelo ponto $P(2, 1)$ e formam ângulo de 45° com a reta $r: y = 3x + 4$.

Resolução

Todas as retas do plano cartesiano que passam por $P(2, 1)$ têm equações do tipo:

$$y - 1 = m(x - 2),\ m \in \mathbb{R}, \quad \text{(I) ou } x = 2. \quad \text{(II)}$$

Note que a reta vertical (II): $x = 2$ não forma ângulo de 45° com a reta r, pois $m_r = 3$ e a medida θ de um ângulo agudo formado por r e (II) é tal que: $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{|m_r|} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{|3|} = \frac{1}{3}$.

Logo, $\theta \neq 45°$.

Assim, as retas procuradas são do tipo (I): $y - 1 = m(x - 2)$.

Um ângulo agudo formado por r e uma reta do tipo (I) deve medir 45°. Logo:

$$\operatorname{tg} 45° = \left|\frac{m_r - m_{(I)}}{1 + m_r m_{(I)}}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{3 - m}{1 + 3m}\right|.$$

Temos:

$$1 = \frac{3 - m}{1 + 3m} \Rightarrow 1 + 3m = 3 - m \therefore m = \frac{1}{2} \text{ ou } -1 = \frac{3 - m}{1 + 3m} \Rightarrow -1 - 3m = 3 - m \therefore m = -2$$

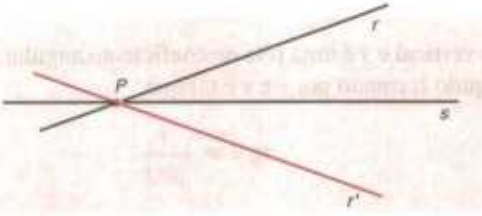
Concluímos então que existem duas retas que satisfazem a condição exigida. São elas:

$$s: y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \text{ e } t: y - 1 = -2(x - 2).$$

R.7 Obter a simétrica da reta $r: 2x - y + 3 = 0$ em relação à reta $s: 7x + y + 6 = 0$.

Resolução

A reta r', simétrica de r em relação a s, é formada pelos simétricos dos pontos de r em relação a s.



O ponto P da intersecção de r e s é obtido através do sistema: $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 & r \\ 7x + y + 6 = 0. & s \end{cases}$

Somando, membro a membro, as equações de r e s, temos: $9x + 9 = 0 \Rightarrow x = -1$.
Substituindo $x = -1$ na equação de s, obtemos: $-7 + y + 6 = 0 \Rightarrow y = 1$.
Logo, $P(-1, 1)$. Todas as retas que passam por $P(-1, 1)$ têm equações do tipo:

$$y - 1 = m(x + 1) \quad \text{(I)} \quad \text{ou} \quad x = -1. \quad \text{(II)}$$

Os ângulos formados por r e s e por r' e s devem ter medidas iguais. A medida θ de um ângulo agudo formado por r e s é tal que: $\operatorname{tg}\theta = \left|\dfrac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|$.

Como $m_r = 2$ e $m_s = -7$, temos: $\operatorname{tg}\theta = \left|\dfrac{2 - (-7)}{1 + 2 \cdot (-7)}\right| = \left|\dfrac{9}{-13}\right| = \dfrac{9}{13}$.

Note que um ângulo agudo de medida γ formado por s e pela reta vertical (II): $x = -1$ é tal que:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{|m_s|} \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{|-7|} = \frac{1}{7}.$$

Logo, como $\operatorname{tg}\theta \neq \operatorname{tg}\gamma$, temos que $\theta \neq \gamma$, ou seja, a reta (II): $x = -1$ não é simétrica de r em relação a s.
Assim, a reta procurada é do tipo (I): $y - 1 = m(x + 1)$ e, por isso, devemos ter:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_s - m_{(I)}}{1 + m_s m_{(I)}}\right| \Rightarrow \frac{9}{13} = \left|\frac{-7 - m}{1 - 7m}\right|$$

$$\therefore \frac{9}{13} = \frac{-7 - m}{1 - 7m} \Rightarrow 9 - 63m = -91 - 13m \therefore m = 2 \text{ ou}$$

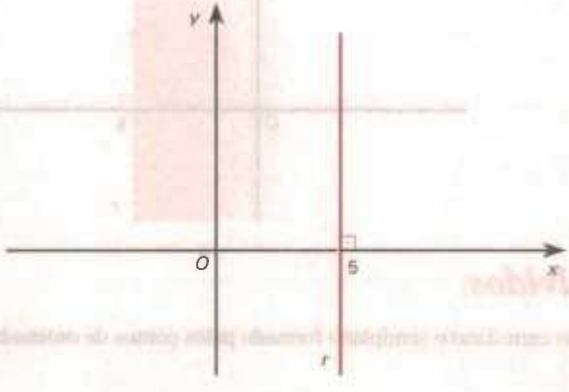
$$-\frac{9}{13} = \frac{-7 - m}{1 - 7m} \Rightarrow -9 + 63m = -91 - 13m \therefore m = -\frac{41}{38}.$$

- Para $m = 2$, obtém-se a própria reta r.
- Para $m = -\dfrac{41}{38}$, obtém-se a reta r', ou seja, r': $y - 1 = -\dfrac{41}{38}(x + 1)$.

2. Representação gráfica de uma inequação do 1º grau

2.1. Semiplanos de origem paralela a um dos eixos coordenados

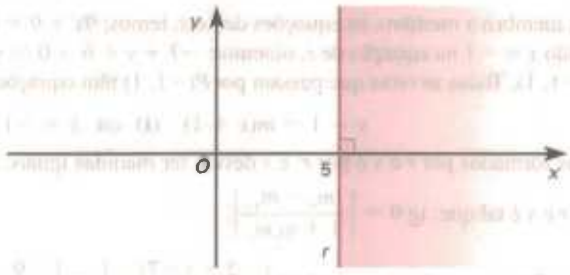
Consideremos a reta r de equação $x = 5$, cujo gráfico é:



A reta r é origem de dois semiplanos contidos no plano cartesiano:

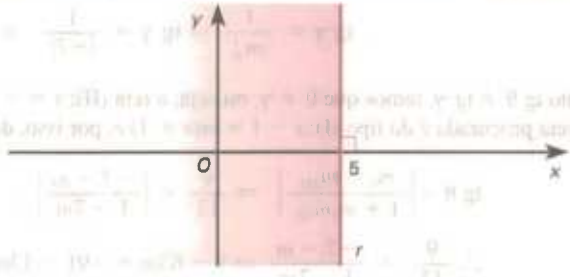
I. o semiplano formado pelos pontos cujas abscissas são maiores ou iguais a 5:

$x \geqslant 5 \Rightarrow$



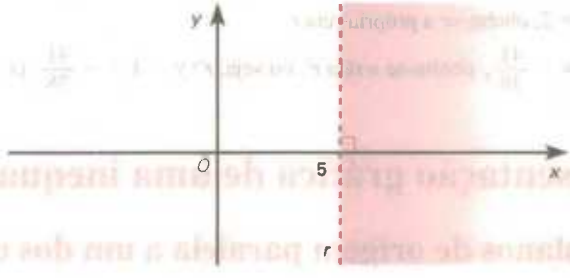
II. o semiplano formado pelos pontos de abscissas menores ou iguais a 5:

$x \leqslant 5 \Rightarrow$



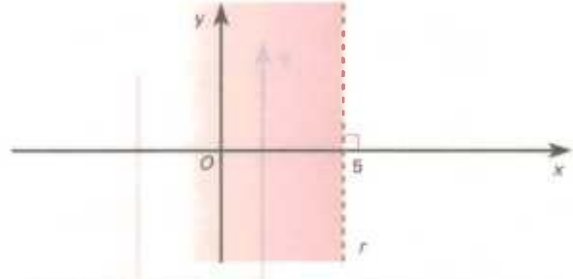
Se quisermos representar o semiplano aberto (que não contém a reta origem) formado pelos pontos de abscissas maiores que 5, basta, em (I), desenharmos a reta r tracejada (seccionada):

$x > 5 \Rightarrow$



Analogamente, o semiplano aberto formado pelos pontos de abscissas menores que 5 é:

$x < 5 \Rightarrow$



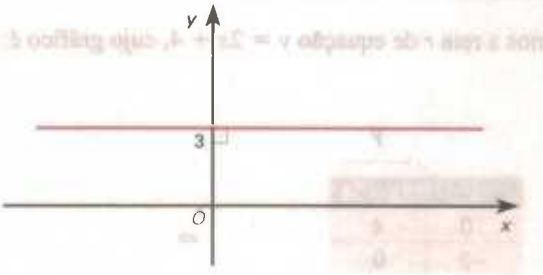
Exercícios resolvidos

R.8 Representar no plano cartesiano o semiplano formado pelos pontos de ordenadas maiores ou iguais a 3, ou seja, $y \geqslant 3$.

Resolução

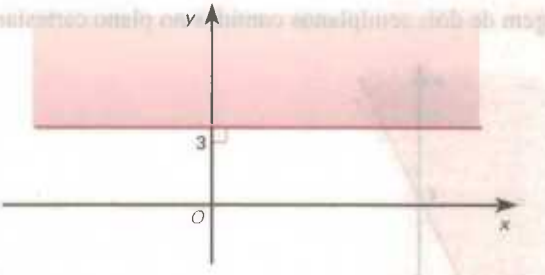
Inicialmente representamos a reta origem do semiplano, isto é, $y = 3$.

$y = 3 \Rightarrow$



O semiplano formado pelos pontos de ordenadas maiores ou iguais a 3 é:

$y \geqslant 3 \Rightarrow$

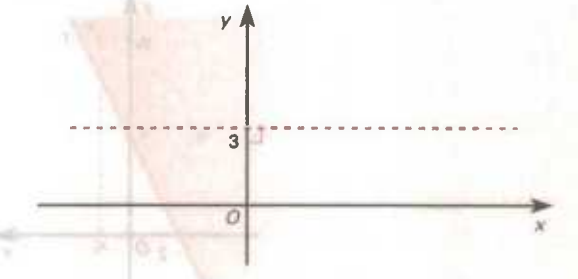


R.9 Representar no plano cartesiano o semiplano formado pelos pontos de ordenadas menores do que 3, ou seja, $y < 3$.

Resolução

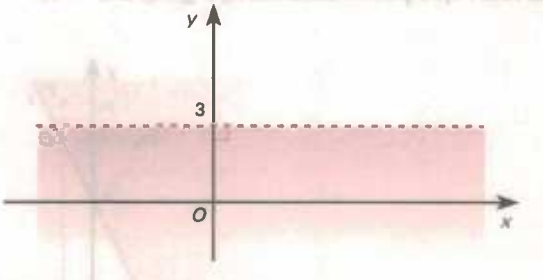
A reta origem do semiplano é:

$y = 3 \Rightarrow$



O semiplano formado pelos pontos de ordenadas menores que 3 é:

$y < 3 \Rightarrow$

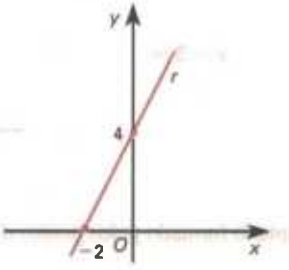


Quando representamos a reta origem tracejada, estamos indicando que essa reta **não** faz parte do gráfico da inequação.

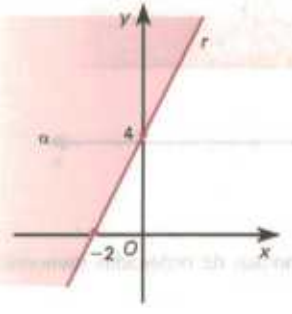
2.2. Semiplano de origem não-paralela a nenhum dos eixos coordenados

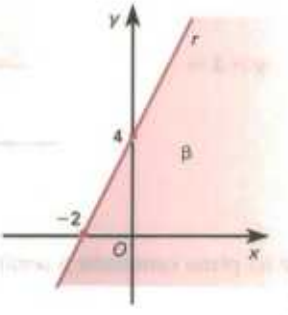
Consideremos a reta r de equação $y = 2x + 4$, cujo gráfico é:

x	y = $2x + 4$
0	4
−2	0

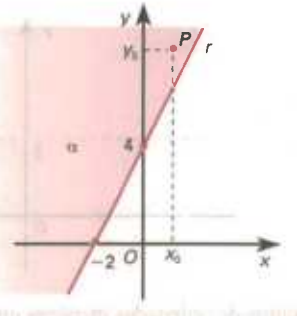


A reta r é origem de dois semiplanos contidos no plano cartesiano.

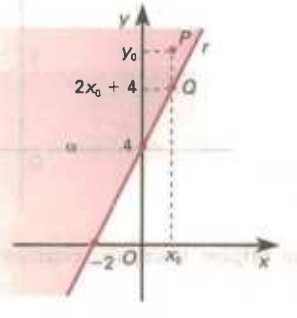




Consideremos um ponto $P(x_0, y_0)$ do semiplano α, não pertencente à reta r:



O ponto Q da reta r que possui abscissa x_0 é $Q(x_0, 2x_0 + 4)$:



Note que $y_0 > 2x_0 + 4$.

Temos então que:

I. para que um ponto $P(x_0, y_0)$ pertença ao semiplano α e não pertença à origem r, deve-se ter:

$$y_0 > 2x_0 + 4;$$

II. para que um ponto $P(x_0, y_0)$ pertença à reta r, deve-se ter:

$$y_0 = 2x_0 + 4.$$

Por (I) e (II), podemos concluir que o semiplano α é determinado pela inequação:

$$y \geqslant 2x + 4, x \in \mathbb{R}.$$

De modo análogo, concluímos que o semiplano β é determinado pela inequação:

$$y \leqslant 2x + 4, x \in \mathbb{R}.$$

Exercícios resolvidos

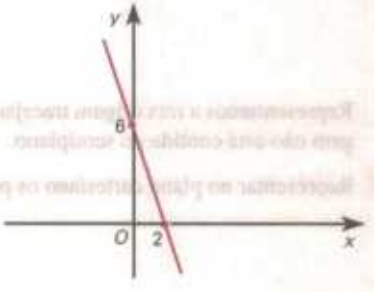
R.10 Representar no plano cartesiano o semiplano determinado pela inequação $y \geqslant -3x + 6$.

Resolução

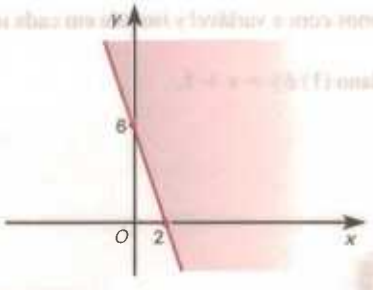
Inicialmente representamos a reta origem do semiplano, isto é, $y = -3x + 6$.

x	y $-3x + 6$
0	6
2	0

$\Rightarrow$



O semiplano determinado pela inequação $y \geqslant -3x + 6$ é a reunião da reta origem com o conjunto dos pontos "acima" (>) dessa reta:



R.11 Representar no plano cartesiano o semiplano determinado pela inequação $2x - y - 5 > 0$.

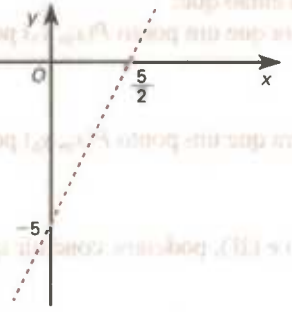
Resolução

É conveniente isolarmos a variável y na inequação, pois assim é mais fácil visualizar o semiplano.

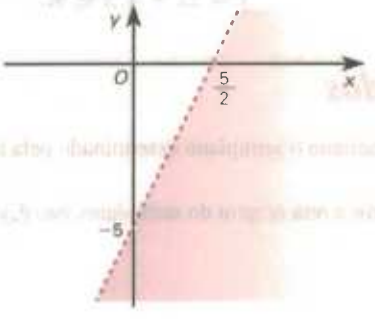
$$2x - y - 5 > 0 \Rightarrow -y > -2x + 5 \therefore y < 2x - 5.$$

A reta origem desse semiplano tem equação $y = 2x - 5$:

x	$2x - 5$
0	-5
$\frac{5}{2}$	0



O semiplano determinado pela inequação $y < 2x - 5$ é o conjunto dos pontos "abaixo" ($<$) da reta origem:



Representamos a reta origem tracejada (seccionada) para indicar que o semiplano é aberto, isto é, a reta origem não está contida no semiplano.

R.12 Representar no plano cartesiano os pontos (x, y) que satisfaçam o seguinte sistema de inequações:

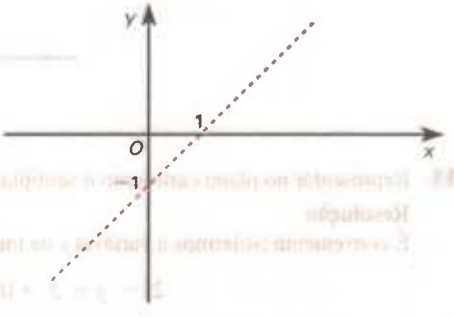
$$\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ y - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Resolução

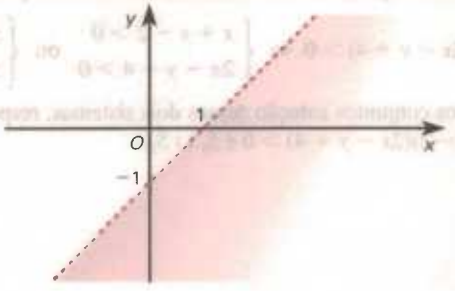
É mais cômodo trabalharmos com a variável y isolada em cada inequação: $\begin{cases} y < x + 1 \ \textbf{(I)} \\ y \geqslant 2. \ \textbf{(II)} \end{cases}$

• A reta origem do semiplano (I) é $y = x + 1$.

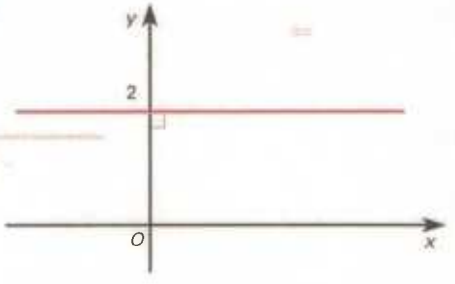
x	$x + 1$
0	1
-1	0



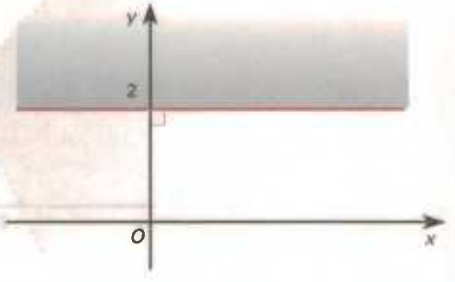
O semiplano determinado por $y < x + 1$ é:



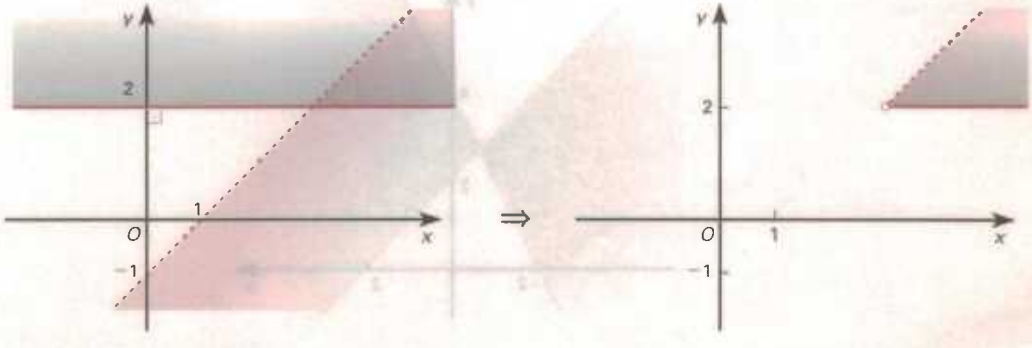
• A reta origem do semiplano (II) é $y = 2$.



O semiplano determinado por $y \geqslant 2$ é:



• Os pontos (x, y) que satisfazem (I) e (II) simultaneamente são obtidos pela intersecção dos semiplanos (I) e (II):



R.13 Dar o gráfico cartesiano da inequação: $(x + y - 2)(2x - y + 4) > 0$.

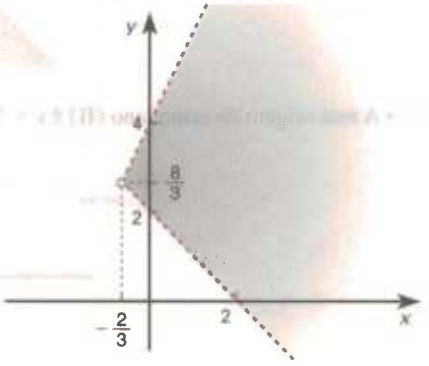
Resolução

O produto de dois fatores é positivo se, e somente se, ambos são positivos ou ambos são negativos. Assim, temos: $(x + y - 2)(2x - y + 4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ 2x - y + 4 > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ 2x - y + 4 < 0. \end{cases}$

Isto é, se S_1 e S_2 são os conjuntos solução desses dois sistemas, respectivamente, então o conjunto solução da inequação $(x + y - 2)(2x - y + 4) > 0$ é $S_1 \cup S_2$.

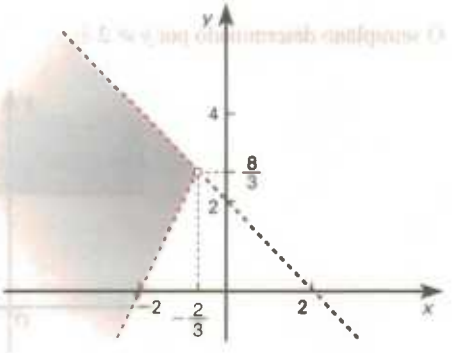
• Obtendo S_1:

$$\begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ 2x - y + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

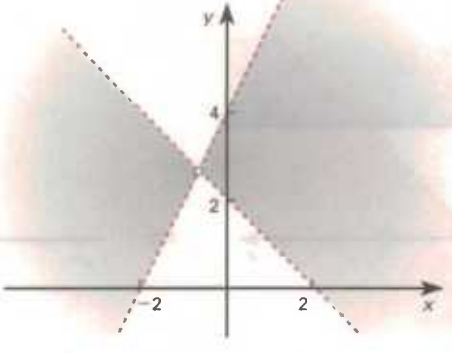


• Obtendo S_2:

$$\begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ 2x - y + 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$



A representação da inequação $(x + y - 2)(2x - y + 4) > 0$ é $S_1 \cup S_2$, ou seja:



R.14 Representar no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que $|x| + y \geq 3$.

Resolução

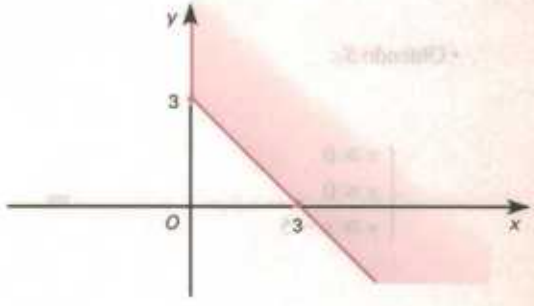
Lembrando que $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x \leqslant 0, \end{cases}$ temos que a inequação proposta equivale a:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + y \geqslant 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \leqslant 0 \\ -x + y \geqslant 3. \end{cases}$$

Isto é, se S_1 e S_2 são os conjuntos solução desses sistemas, respectivamente, então o conjunto solução da inequação $|x| + y \geqslant 3$ é $S_1 \cup S_2$.

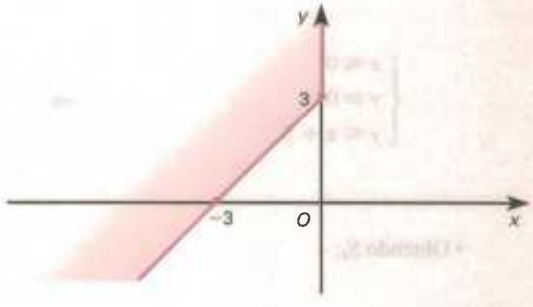
• Obtendo S_1:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 3 - x \end{cases} \Rightarrow$$

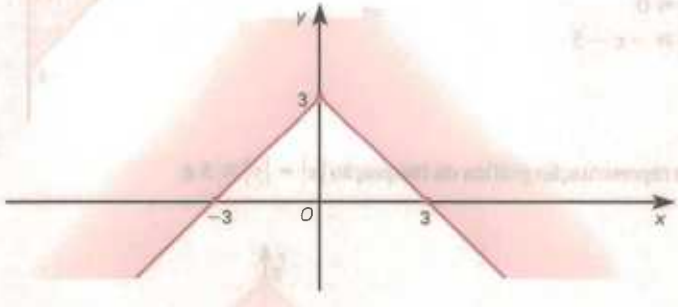


• Obtendo S_2:

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \geqslant 3 + x \end{cases} \Rightarrow$$



• A representação da inequação $|x| + y \geqslant 3$ é $S_1 \cup S_2$, ou seja:



R.15 Representar no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que $|x| + |y| \leqslant 5$.

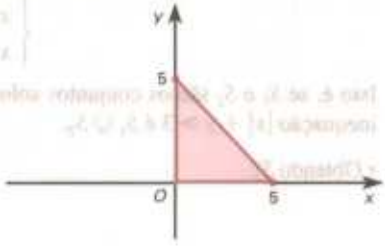
Resolução

A inequação é equivalente a: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \leqslant 0 \\ x - y \leqslant 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ -x + y \leqslant 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \\ -x - y \leqslant 5. \end{cases}$

Se S_1, S_2, S_3 e S_4 são os conjuntos solução desses sistemas, respectivamente, então o conjunto solução da inequação $|x| + |y| \leq 5$ é $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$.

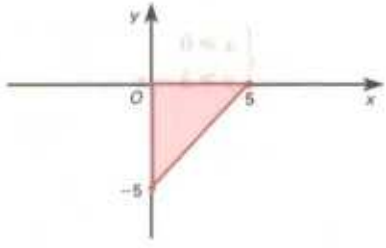
• Obtendo S_1:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -x + 5 \end{cases} \Rightarrow$$



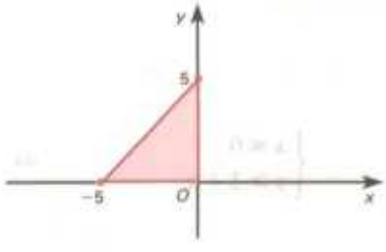
• Obtendo S_2:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ y \geq x - 5 \end{cases} \Rightarrow$$



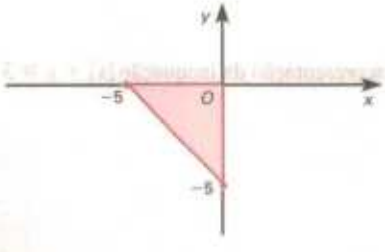
• Obtendo S_3:

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq x + 5 \end{cases} \Rightarrow$$

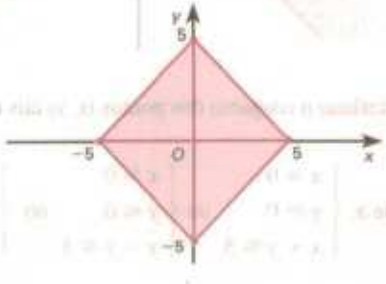


• Obtendo S_4:

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ y \geq -x - 5 \end{cases} \Rightarrow$$



Portanto a representação gráfica da inequação $|x| + |y| \leq 5$ é:



R.16 **(um problema de aplicação)** Uma confecção dispõe de 80 m² de brim e 120 m² de popeline. Cada unidade de um modelo *A* de vestido requer 1 m² de brim e 3 m² de popeline, e cada unidade de um outro modelo *B* requer 2 m² de brim e 2 m² de popeline. Se cada unidade de qualquer um dos modelos é vendida por R$ 80,00, quantas unidades de cada modelo devem ser confeccionadas para se obter a renda bruta máxima?

Resolução

Resumindo os dados em uma tabela, temos:

	Modelo *A*	Modelo *B*	Tecido em estoque
Brim	1 m²	2 m²	80 m²
Popeline	3 m²	2 m²	120 m²

Sejam:

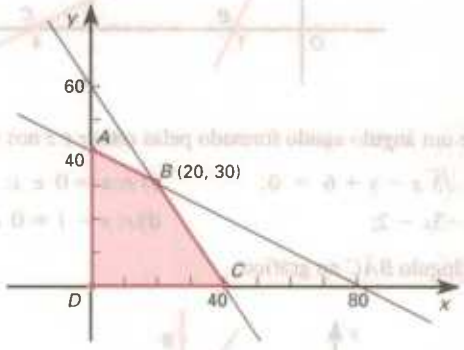
- x o número de unidades do modelo *A* a serem fabricadas;
- y o número de unidades do modelo *B* a serem fabricadas.

Temos que a função de duas variáveis $f(x, y) = 80x + 80y$ dá a renda bruta obtida com a venda de x unidades do modelo *A* e y unidades do modelo *B*.

Para o cálculo do máximo de f, observemos que:

$$\begin{cases} x + 2y \leqslant 80 \\ 3x + 2y \leqslant 120 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Representando as soluções desse sistema no plano cartesiano, obtemos:



Demonstra-se que o máximo valor de f é obtido ao atribuirmos às variáveis x e y de f as coordenadas de um determinado vértice do polígono *ABCD*. Para descobrir qual é esse vértice, basta testarmos cada um deles:

$A(0, 40) \Rightarrow f(0, 40) = 80 \cdot 0 + 80 \cdot 40 = 3200$; $B(20, 30) \Rightarrow f(20, 30) = 80 \cdot 20 + 80 \cdot 30 = 4000$;
$C(40, 0) \Rightarrow f(40, 0) = 80 \cdot 40 + 80 \cdot 0 = 3200$; $D(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 80 \cdot 0 + 80 \cdot 0 = 0$.

Assim, o máximo valor de f é obtido no ponto $B(20, 30)$. Portanto, para obter a renda máxima, devemos confeccionar vinte vestidos do modelo *A* e trinta vestidos do modelo *B*.

Notas

1. Problemas como esse são estudados em um ramo da matemática aplicada denominado **programação linear**.
2. Não vamos exigir, nos exercícios propostos, problemas como esse. Nossa intenção foi apenas mostrar uma aplicação prática do assunto estudado.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a, b), B.4 (a, b), B.6 (a até d), B.7 (a, b), B.8 (a), B.9 (a), C.1, C.3, C.5, C.7, C.9.

Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2 (c, d), B.3, B.4 (c, d), B.5, B.6 (e até h), B.7 (c, d), B.8 (b), B.9 (b), C.2, C.4, C.6, C.8, C.10, C.11.

Exercícios básicos

B.1 Determine a medida de um ângulo agudo formado pelas retas r e s, em cada um dos seguintes casos:

a) $r: 2x - 3y + 5 = 0$ e $s: 5x - y + 6 = 0$;

b) $r: 4x + y - 7 = 0$ e $s: x - y + 6 = 0$;

c) $r: y = 4\sqrt{3}x$ e $s: 3\sqrt{3}x - 13y + 1 = 0$;

d) $s: y = \frac{x}{2} - 1$ e $s: 3x + y - 9 = 0$.

B.2 Obtenha a medida de um ângulo obtuso formado pelas retas r e s, nos seguintes casos:

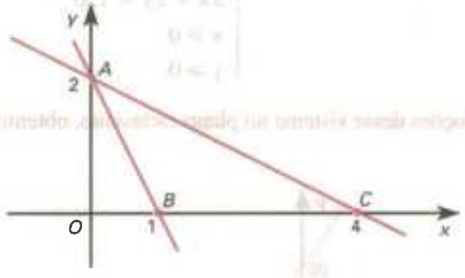
a) $r: y = 6x$ e $s: 5x - 7y + 2 = 0$;

b) $r: 4x + y = 0$ e $s: x - y + 3 = 0$;

c) $r: \sqrt{3}x - 3y + 2 = 0$ e $s: \sqrt{3}x - y = 0$;

d) $r: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ e $s: y = 4$.

B.3 Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$ no gráfico:



B.4 Encontre a medida de um ângulo agudo formado pelas retas r e s nos seguintes casos:

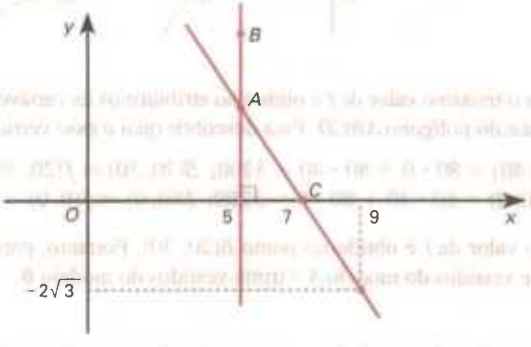
a) $r: x - 5 = 0$ e $s: \sqrt{3}x - y + 6 = 0$;

b) $r: x = 3$ e $s: y = -3x - 2$;

c) $r: x = 0$ e $s: \sqrt{3}x + 3y + 5 = 0$;

d) $r: x - 1 = 0$ e $s: 3x + 6y - 1 = 0$.

B.5 Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$ no gráfico:



B.6 Construa o gráfico, no plano cartesiano, de cada uma das inequações a seguir:

a) $x \geq 1$;

b) $y < 2$;

c) $y \geq 3x - 6$;

d) $2x + y - 4 < 0$;

e) $x < -1$;

f) $y \geq -3$;

g) $y < x + 4$;

h) $2x - 3y - 6 \leq 0$.

B.7 Represente no plano cartesiano o conjunto solução de cada um dos sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} x \geq 4 \\ 2x + y - 4 > 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \geq 2x - 6; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y - 5 < 0 \\ x + y - 5 \geq 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 4 \\ 5y - 4x > 0. \end{cases}$

B.8 Represente no plano cartesiano o conjunto de pontos (x, y) tais que:

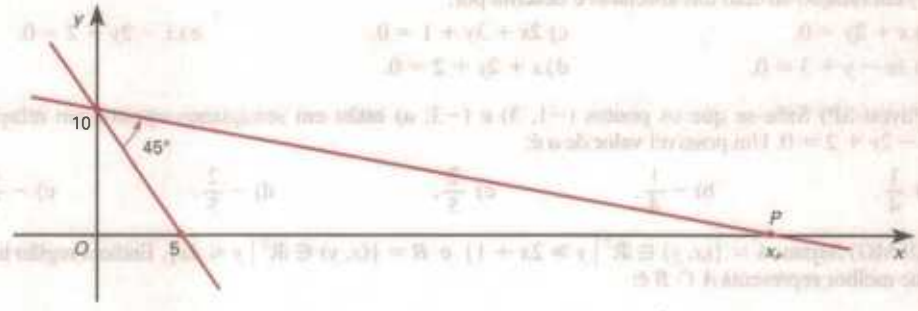
a) $|x| + y - 5 > 0$; b) $x + 2|y| \geq 3$.

B.9 Esboce o gráfico, no plano cartesiano, de cada uma das seguintes inequações:

a) $|x| + |y| \geq 3$; b) $|x| - |y| - 1 < 0$.

Exercícios complementares

C.1 Determine a abscissa x_P, $x_P > 5$, do ponto P do gráfico.



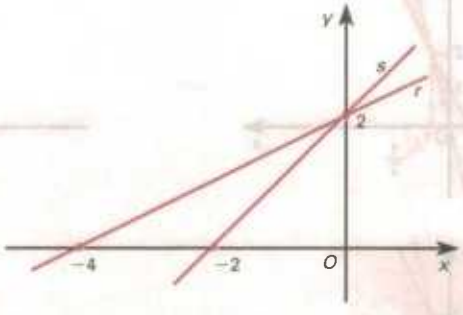
C.2 Obtenha a equação reduzida da reta que passa pelo ponto $P(1, 2)$ e forma com a reta r: $y = 3\sqrt{3}x - 1$ um ângulo de medida 60°.

C.3 Calcule as medidas dos ângulos internos do triângulo cujos vértices são os pontos $A(-1, -2)$, $B(0, -4)$ e $C(-3, -3)$.

C.4 Qual é a medida do ângulo $B\hat{A}C$, sendo $B(2, 1)$, $A(3, 4)$ e $C(5, 3)$?

C.5 Obtenha uma equação da reta simétrica de r: $2x - y - 4 = 0$ em relação à reta s: $x + y - 2 = 0$.

C.6 Encontre a equação reduzida da reta simétrica de r em relação à reta s do gráfico:



C.7 Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que $(x + y - 3)(x + 4) < 0$.

Sugestão: $ab < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0. \end{cases}$

C.8 Obtenha o gráfico, no plano cartesiano, da inequação: $(2x - y)(x - 3y + 3) \geqslant 0$.

C.9 Construa o gráfico, no plano cartesiano, da seguinte inequação: $(x + 3)^2 - y^2 > 0$.
Sugestão: $a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b) > 0$.

C.10 Esboce no plano cartesiano o gráfico da seguinte inequação: $(y - 1)^2 \leqslant x^2 - 2xy + y^2$.

C.11 Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que $x^2 - 6x + 5 > 0$.
Sugestão: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, em que $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$, e x_1 e x_2 são raízes do trinômio.

Questões dos vestibulares

V.1 (U. F. Uberlândia-MG) O co-seno do ângulo agudo formado pelas retas $2x - y + 1 = 0$ e $y = 1$ é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. d) 1. e) $\sqrt{2}$.

V.2 (ITA-SP) Sendo (r) uma reta dada pela equação $x - 2y + 2 = 0$, então a equação da reta (s) simétrica à reta (r) em relação ao eixo das abscissas é descrita por:

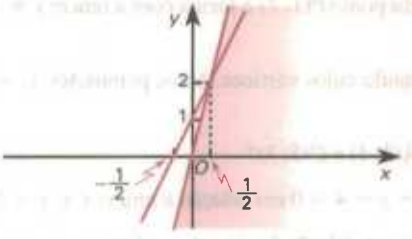
a) $x + 2y = 0$. c) $2x + 3y + 1 = 0$. e) $x - 2y - 2 = 0$.
b) $3x - y + 3 = 0$. d) $x + 2y + 2 = 0$.

V.3 (Fuvest-SP) Sabe-se que os pontos $(-1, 3)$ e $(-3, a)$ estão em semiplanos opostos em relação à reta $x - 2y + 2 = 0$. Um possível valor de a é:

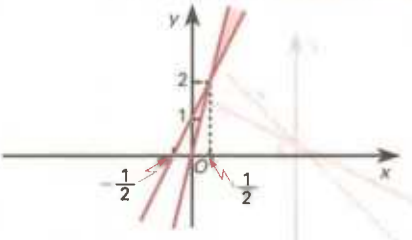
a) $\frac{1}{4}$. b) $-\frac{1}{4}$. c) $\frac{2}{5}$. d) $-\frac{2}{5}$. e) $-\frac{4}{7}$.

V.4 (UFMG) Sejam: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 2x + 1\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 4x\}$. Então a região hachurada que melhor representa $A \cap B$ é:

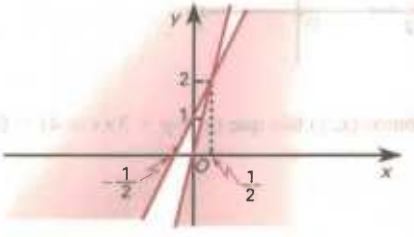
a)



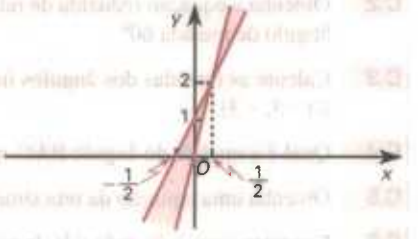
b)



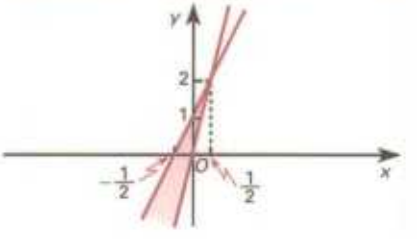
c)



d)

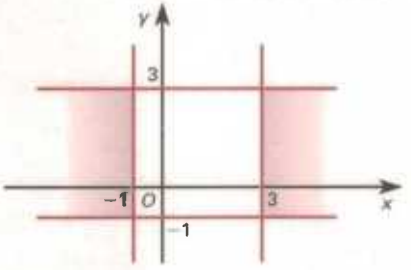


e)

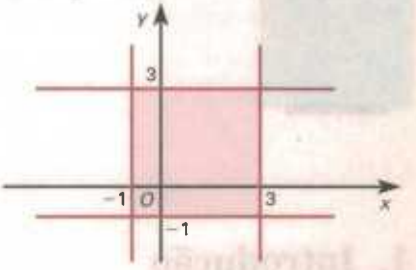


V.5 (UFMG) Seja: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \text{ e } -1 \leq y \leq 3\}$. Então, a região hachurada que melhor representa o conjunto A é:

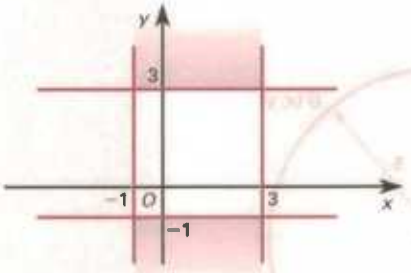
a)



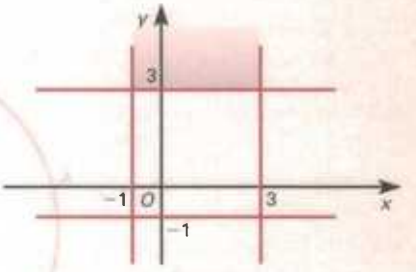
d)



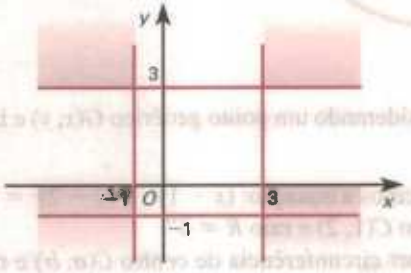
b)



e)



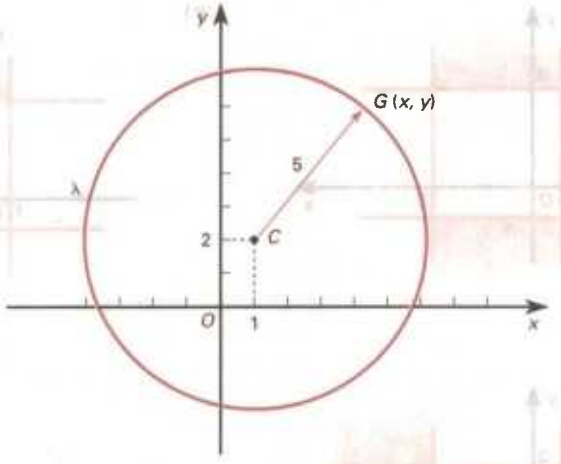
c)



Capítulo 9
Equação da circunferência

1. Introdução

Consideremos no plano cartesiano uma circunferência λ de centro $C(1, 2)$ e raio $R = 5$.



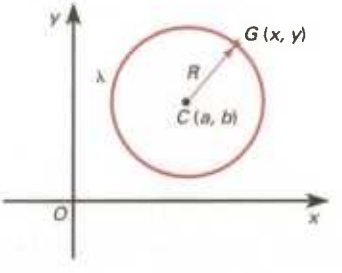
Obtém-se uma equação dessa circunferência considerando um ponto genérico $G(x, y)$ e impondo que $CG = 5$, ou seja: $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 5$.

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos a equação: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, denominada "**equação reduzida** da circunferência de centro $C(1, 2)$ e raio $R = 5$".

Podemos generalizar esse raciocínio para qualquer circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R, como veremos a seguir.

2. Equação reduzida da circunferência

Seja, no plano cartesiano, uma circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio R.



Para obter uma equação dessa circunferência, consideramos um ponto genérico $G(x, y)$ e impomos que: $CG = R \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$.

Quadrando ambos os membros dessa igualdade obtemos a equação: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$,

denominada "**equação reduzida** da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R".

Nota: ao quadrarmos ambos os membros de uma equação, a nova equação obtida pode não ser equivalente à original. Isso não ocorre na equação da circunferência, ou seja, a equação:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \quad \text{(I)}$$

é equivalente à equação: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. (II)

Para provar que as equações (I) e (II) são equivalentes, devemos provar que toda solução de qualquer uma delas também é solução da outra. De fato:

- como a implicação: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ é verdadeira, temos que toda solução de (I) também é solução de (II);
- seja (x_0, y_0) uma solução de (II), isto é: $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$; extraindo a raiz quadrada de cada membro dessa equação, obtemos:

$$\sqrt{(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2} = \sqrt{R^2} \quad \therefore \sqrt{(x_0-a)^2 + (y_0-b)^2} = |R| = R, \text{ pois } R > 0.$$

Portanto toda solução de (II) também é solução de (I).

Exercícios resolvidos

R.1 Obter a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R, nos seguintes casos:

a) $C(4, 6)$ e $R = 3$; b) $C(0, 2)$ e $R = \sqrt{5}$; c) $C(-3, 1)$ e $R = \frac{3}{2}$.

Resolução

a) Na equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, substituindo a, b e R por 4, 6 e 3, respectivamente, obtemos:

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = 9.$$

b) Fazendo $a = 0$, $b = 2$ e $R = \sqrt{5}$ na equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, obtemos: $x^2 + (y-2)^2 = 5$.

c) $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ a = -3 \\ b = 1 \\ R = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\therefore (x+3)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{4}$.

R.2 Determinar o centro e o raio da circunferência que tem por equação:

a) $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 16$; b) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 3$; c) $(x+2)^2 + y^2 = \frac{16}{25}$.

Resolução

a) Comparando a equação $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 16$ com $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, temos que:

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \\ R^2 = 16 \Rightarrow R = 4. \end{cases}$$

Assim, o centro da circunferência é o ponto $C(6, 2)$ e o raio é $R = 4$.

b) A equação $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 3$ pode ser escrita na forma $[x - (-4)]^2 + [y - 1]^2 = 3$. Comparando essa equação com $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, temos:

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \\ R^2 = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3}. \end{cases}$$

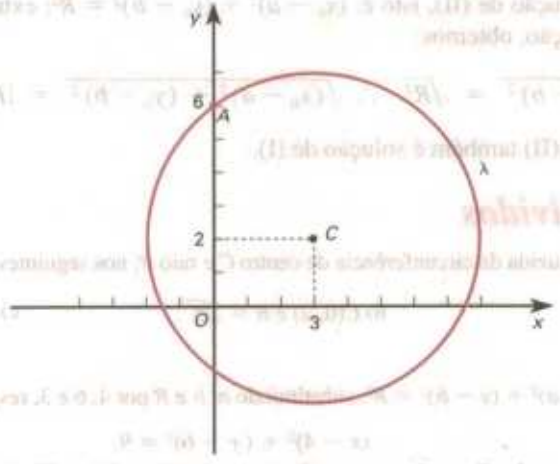
Portanto o centro da circunferência é o ponto $C(-4, 1)$ e o raio é $R = \sqrt{3}$.

c) Podemos escrever a equação $(x + 2)^2 + y^2 = \frac{16}{25}$ sob a forma $[x - (-2)]^2 + [y - 0]^2 = \frac{16}{25}$. Comparando essa equação com $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, concluímos que:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ R^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow R = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Logo, o centro e o raio dessa circunferência são, respectivamente, $C(-2, 0)$ e $R = \frac{4}{5}$.

R.3 Obter a equação reduzida da circunferência λ de centro C cujo gráfico é:



Resolução

A circunferência λ passa pelo ponto $A(0, 6)$ e tem centro $C(3, 2)$. Logo, seu raio R é a distância entre A e C:

$$R = \sqrt{(0 - 3)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Portanto, temos que: $\lambda \begin{cases} C(3, 2) \\ R = 5 \end{cases} \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25.$

R.4 Para que valores reais de k a equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = k$ representa uma circunferência?

Resolução

Comparando a equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = k$ com $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, temos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ R^2 = k. \end{cases}$$

Como $R^2 > 0$, temos que a equação representa uma circunferência de centro $C(2, 3)$ e raio $R = \sqrt{k}$ se, e somente se, $k > 0$.

R.5 Qual é o conjunto de pontos (x, y) do plano cartesiano tal que $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$?

Resolução

Como $(x - 2)^2 \geqslant 0$ e $(y - 3)^2 \geqslant 0$ temos que:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \quad \text{e} \quad (y - 3)^2 = 0 \quad \therefore \; x = 2 \text{ e } y = 3.$$

Assim, a equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ representa um único ponto $C(2, 3)$.

R.6 Qual é o conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano tal que $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -16$?

Resolução

Temos que $(x - 2)^2 \geqslant 0$ e $(y - 3)^2 \geqslant 0 \quad \forall x, y, \{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

Assim sendo, a igualdade $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -16$ é impossível. Portanto essa equação representa o conjunto vazio.

Conclusão

Através dos exercícios R.4, R.5 e R.6, percebemos o seguinte:

A equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ nas variáveis x e y com $\{a, b, k\} \subset \mathbb{R}$ representa:

- uma circunferência se, e somente se, $k > 0$;
- um único ponto se, e somente se, $k = 0$;
- o conjunto vazio se, e somente se, $k < 0$.

3. Equação normal da circunferência

Vimos que a **equação reduzida** da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Eliminando os parênteses dessa equação, obtemos: $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$, ou ainda:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

Essa equação é denominada "**equação normal** da circunferência".

Nota: multiplicando ambos os membros da equação anterior por uma constante real k, $k \neq 0$, obtemos uma outra equação da mesma circunferência: $kx^2 + ky^2 - 2kax - 2kby + ka^2 + kb^2 - kR^2 = 0$.

Exercício resolvido

R.7 Qual a equação normal da circunferência de centro $C(4, 1)$ e raio 5?

Resolução

A equação reduzida da circunferência é: $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$.

Eliminando os parênteses dessa equação, obtemos: $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 25$.

Assim, a equação normal dessa circunferência é: $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$.

3.1. Obtenção do centro e do raio de uma circunferência a partir de sua equação normal

Dada a equação normal de uma circunferência λ, por exemplo, $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$, podemos determinar o centro e o raio de λ de duas maneiras: por comparação e por redução.

Por comparação

Comparando a equação: $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$ com a equação:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0, \text{ temos: } \begin{cases} -2a = 6 \Rightarrow a = -3 \quad \text{(I)} \\ -2b = -10 \Rightarrow b = 5 \quad \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = 18. \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos: $(-3)^2 + 5^2 - R^2 = 18 \Rightarrow R^2 = 16 \therefore R = 4$.
Logo, o centro e o raio da circunferência λ são, respectivamente, $C(-3, 5)$ e $R = 4$.

Por redução

Esse método consiste em obter a **forma reduzida** a partir da equação normal.

- Agrupamos os termos em x e os termos em y, isolando num dos membros da equação o termo independente: $(x^2 + 6x) + (y^2 - 10y) = -18$.
- Somamos a ambos os membros da igualdade um mesmo termo, de modo que o agrupamento em x se transforme num **quadrado perfeito**: $(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 10y) = -18 + 9$.

Note que, se o coeficiente de x^2 é 1, o termo que deve ser somado a ambos os membros é o **quadrado da metade do coeficiente** de x.

- Somamos a ambos os membros da igualdade anterior um mesmo termo, de modo que o agrupamento em y se transforme num **quadrado perfeito**:

$$\underbrace{(x^2 + 6x + 9)}_{\downarrow} + \underbrace{(y^2 - 10y + 25)}_{\downarrow} = \underbrace{-18 + 9 + 25}_{\downarrow}.$$

$$\therefore \quad \overbrace{(x + 3)^2}^{} + \overbrace{(y - 5)^2}^{} = \overbrace{16}^{}.$$

Obtivemos assim a equação reduzida da circunferência λ. Portanto seu centro e seu raio são, respectivamente, $C(-3, 5)$ e $R = 4$.

Exercícios resolvidos

R.8 Aplicando o método da comparação, obter o centro e o raio da circunferência de equação:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 14 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$;

c) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 31 = 0$.

Resolução

Devemos comparar cada uma das equações com: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$. (λ)

a) Comparando com (λ) a equação $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 14 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = -2 \Rightarrow a = 1 \quad \text{(I)} \\ -2b = 8 \Rightarrow b = -4 \quad \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = 14. \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos: $1^2 + (-4)^2 - R^2 = 14 \Rightarrow R^2 = 3 \therefore R = \sqrt{3}$.

Logo, o centro C e o raio R da circunferência são $C(1, -4)$ e $R = \sqrt{3}$.

b) Comparando com (λ) a equação $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{(I)} \\ -2b = 6 \Rightarrow b = -3 \quad \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = -16. \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos: $0^2 + (-3)^2 - R^2 = -16 \Rightarrow R^2 = 25 \therefore R = 5$.

Portanto o centro C e o raio R da circunferência são $C(0, -3)$ e $R = 5$.

c) Para poder comparar com (λ) a equação $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 31 = 0$, devemos dividir por 16 ambos os membros dessa igualdade: $x^2 + y^2 + x - \frac{y}{2} - \frac{31}{16} = 0$.

Assim temos:

$$\begin{cases} -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ (I)} \\ -2b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{4} \text{ (II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = -\frac{31}{16}. \text{ (III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III):

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - R^2 = -\frac{31}{16} \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{31}{16} \therefore R^2 = \frac{36}{16} \Rightarrow R = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Portanto o centro C e o raio R dessa circunferência são $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $R = \frac{3}{2}$.

R.9 Aplicando o método da redução, determinar o centro e o raio da circunferência de equação:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 14 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$;

c) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 31 = 0$.

Resolução

a) Agrupando os termos em x, os termos em y e isolando o termo independente, temos:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 8y) = -14.$$

Completando os quadrados perfeitos, obtemos:

$$(x^2 - 2x + \underline{1}) + (y^2 + 8y + \underline{16}) = -14 + 1 + 16.$$

Quadrado da metade do coeficiente de x — **Quadrado da metade do coeficiente de y**

Essa equação pode ser escrita na forma reduzida: $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 3$.

Temos que o centro C e o raio R dessa circunferência são $C(1, -4)$ e $R = \sqrt{3}$.

b) Agrupamos os termos em x, os termos em y e isolamos o termo independente: $(x^2) + (y^2 + 6y) = 16$.
Completando o quadrado perfeito no agrupamento em y, temos:

$$(x^2) + (y^2 + 6y + \underline{9}) = 16 + 9.$$

Quadrado da metade do coeficiente de y

Assim, a equação reduzida da circunferência é: $x^2 + (y + 3)^2 = 25$.
Logo, o centro C e o raio R da circunferência são $C(0, -3)$ e $R = 5$.

c) Para obter a equação reduzida, convém dividirmos por 16 ambos os membros da equação:

$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{2} - \frac{31}{16} = 0.$$

Agrupamos os termos em x, os termos em y e isolamos o termo independente:

$$(x^2 + x) + \left(y^2 - \frac{y}{2}\right) = \frac{31}{16}.$$

Completando os quadrados, obtemos:

$$\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{16}\right) = \frac{31}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}.$$

Quadrado da metade do coeficiente de x — **Quadrado da metade do coeficiente de y**

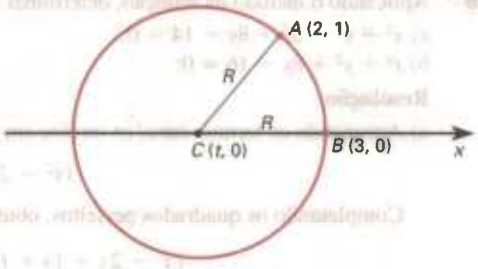
Assim, a equação reduzida da circunferência é: $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{36}{16}$.

Portanto o centro C e o raio R da circunferência são $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $R = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

R.10 Obter uma equação da circunferência λ que passa pelos pontos $A(2, 1)$ e $B(3, 0)$, cujo centro C pertence ao eixo das abscissas.

Resolução

Como o centro C pertence ao eixo das abscissas, temos que sua ordenada é zero, ou seja, o centro é da forma $C(t, 0)$, conforme a figura ao lado.



Devemos ter $d_{CA} = d_{CB}$: $\sqrt{(t-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(t-3)^2 + (0-0)^2}$.

Quadramos ambos os membros dessa igualdade:

$$(t-2)^2 + 1 = (t-3)^2 \therefore t^2 - 4t + 4 + 1 = t^2 - 6t + 9 \therefore 2t = 4 \therefore t = 2.$$

Assim, o centro de λ é $C(2, 0)$ e o raio é a distância entre C e A (ou entre C e B):

$$R = d_{CA} = \sqrt{(2-2)^2 + (1-0)^2} = 1.$$

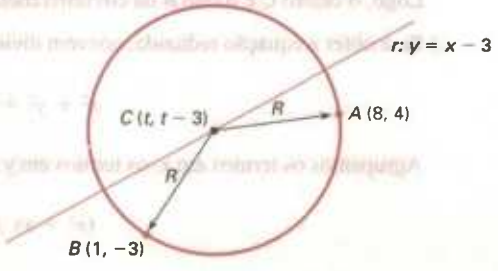
Logo, temos: $\lambda \begin{cases} C(2, 0) \\ R = 1 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1.$

R.11 Encontrar uma equação da circunferência λ que passa pelos pontos $A(8, 4)$ e $B(1, -3)$, cujo centro pertence à reta r de equação $y = x - 3$.

Resolução

Tomemos um ponto genérico da reta r. Para isso, atribuímos um valor genérico t à variável x da equação da reta r, obtendo assim $y = t - 3$.

Como o centro C de λ pertence à reta r, temos que C é da forma $C(t, t - 3)$, conforme a figura ao lado.



Devemos ter $d_{CA} = d_{CB}$:

$\sqrt{(t-8)^2 + (t-3-4)^2} = \sqrt{(t-1)^2 + (t-3+3)^2} \therefore (t-8)^2 + (t-7)^2 = (t-1)^2 + t^2$

$\therefore t^2 - 16t + 64 + t^2 - 14t + 49 = t^2 - 2t + 1 + t^2 \therefore 28t = 112 \Rightarrow t = 4.$

Portanto o centro de λ é $C(4, 1)$ e o raio é a distância entre C e A (ou C e B):

$$R = d_{CA} = \sqrt{(4-8)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Logo, obtemos: $\lambda \begin{cases} C(4, 1) \\ R = 5 \end{cases} \Rightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 = 25.$

R.12 Determinar uma equação da circunferência λ que passa pelos pontos $E(4, 0)$, $F(5, 1)$ e $G(8, 0)$.

Resolução

O centro C da circunferência λ é o ponto de intersecção das mediatrizes dos segmentos $\overline{EF}$, $\overline{EG}$ e $\overline{FG}$.

- Como o segmento $\overline{EG}$ está contido no eixo Ox, temos que sua mediatriz é a reta r vertical que passa pelo seu ponto médio $M\left(\frac{4+8}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = M(6, 0)$, ou seja, $r: x = 6$.

- O coeficiente angular m da reta que passa por E e F é: $m = \frac{1-0}{5-4} = 1$.

  Logo, o coeficiente angular da mediatriz s de $\overline{EF}$ é o oposto do inverso de m, ou seja, $m_s = -1$.

  O ponto médio de $\overline{EF}$ é $N\left(\frac{5+4}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

  Logo, como a mediatriz s passa por $N\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e tem coeficiente angular $m_s = -1$, temos que sua equação é: $y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{9}{2}\right) \therefore s: y = -x + 5$. O ponto de intersecção de r e s, que é o centro C da circunferência, é dado por: $\begin{cases} x = 6 & \text{(I)} \\ y = -x + 5. & \text{(II)} \end{cases}$

  Substituímos (I) em (II): $y = -6 + 5 \Rightarrow y = -1$.

  Assim, o centro C de λ é $C(6, -1)$ e o raio é a distância entre C e E (ou C e F ou C e G):

$$R = d_{CE} = \sqrt{(6-4)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5}.$$

Temos então: $\lambda \begin{cases} C(6, -1) \\ R = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow (x-6)^2 + (y+1)^2 = 5.$

4. Reconhecimento de uma circunferência

Chama-se "equação do 2º grau em duas variáveis x e y" toda equação que pode ser apresentada sob a seguinte forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{(I)}$$

com $\{A, B, C, D, E, F\} \subset \mathbb{R}$, sendo que A, B e C não são simultaneamente nulos.

Lembrando que a equação normal de uma circunferência é da forma:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0,$$

com $\{a, b, R\} \subset \mathbb{R}$ e $R > 0$, temos: para que a equação (I) possa representar uma circunferência é **necessário** que $A = B \neq 0$ e $C = 0$. Desse modo, dividindo ambos os membros de (I) por A, obtemos:

$$x^2 + y^2 + \frac{Dx}{A} + \frac{Ey}{A} + \frac{F}{A} = 0. \quad \text{(II)}$$

Porém essa condição não é suficiente para que a equação represente uma circunferência. É necessário, ainda, mais uma condição; comparando a equação (II) com a equação normal devemos ter:

$$\begin{cases} -2a = \dfrac{D}{A} \Rightarrow a = -\dfrac{D}{2A} \quad \text{(III)} \\ -2b = \dfrac{E}{A} \Rightarrow b = -\dfrac{E}{2A} \quad \text{(IV)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = \dfrac{F}{A}. \quad \text{(V)} \end{cases}$$

Substituímos (III) e (IV) em (V):

$$\left(-\frac{D}{2A}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2A}\right)^2 - R^2 = \frac{F}{A} \quad \therefore R^2 = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Devemos ter $R^2 > 0$, ou seja:

$$\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} > 0 \Leftrightarrow D^2 + E^2 - 4AF > 0.$$

VEJA R13, d

Resumindo:

Uma equação do 2º grau nas variáveis x e y: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ representa uma circunferência se, e somente se, forem obedecidas as três condições:

$$A = B \neq 0,\ C = 0 \text{ e } D^2 + E^2 - 4AF > 0.$$

Exercício resolvido

R.13 Qual das equações a seguir representa uma circunferência?

a) $2x^2 + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$;
b) $x^2 - y^2 + 3x - 6y + 8 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 1 = 0$;
d) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 24y + 24 = 0$.

Resolução

a) Não é equação de uma circunferência, pois os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes.
b) Não é equação de uma circunferência, pois os coeficientes x^2 e y^2 são diferentes.
c) Não é equação de uma circunferência, pois o coeficiente do produto xy é diferente de zero.
d) É equação de uma circunferência, pois são obedecidas as três condições:
- $A = B \neq 0$, ou seja, os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais e não-nulos.
- $C = 0$, ou seja, o coeficiente do produto xy é zero.
- $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, pois, como $D = -6$, $E = 24$, $A = 3$ e $F = 24$, temos que:

$$D^2 + E^2 - 4AF = (-6)^2 + 24^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24 = 36 + 576 - 288 = 324 > 0.$$

Nota: como a condição $D^2 + E^2 - 4AF > 0$ é um tanto complicada, podemos substituí-la, escrevendo a equação na forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ e observando o valor de k:

É melhor! →

$k > 0 \Rightarrow$ a equação representa circunferência;
$k = 0 \Rightarrow$ a equação representa um ponto;
$k < 0 \Rightarrow$ a equação representa o conjunto vazio.

Vejamos:

$3x^2 + 3y^2 - 6x + 24y + 24 = 0 \therefore x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0 \therefore (x^2 - 2x) + (y^2 + 8y) = -8$
$\therefore (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) = -8 + 1 + 16 \therefore (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9.$

Como $9 > 0$, temos que a equação representa uma circunferência.

R.14 Verificar se a equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6 = 0$ representa uma circunferência.

Resolução

A equação deve obedecer às três condições:

$$A = B \neq 0,\ C = 0 \text{ e } D^2 + E^2 - 4AF > 0.$$

A primeira condição é obedecida, pois os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais a 1.
A segunda condição é obedecida, pois o coeficiente do produto xy é zero.
Em vez de testar a terceira condição, vamos escrever a equação na forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$:

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) = -6$$
$$\therefore (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = -6 + 4 + 1 \ \therefore\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = -1.$$

Como $-1 < 0$, concluímos que a equação não representa uma circunferência. Ela representa o conjunto vazio.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até d), B.2 (a, b, c), B.3, B.5, B.7, B.9 (a até d), B.10 (a, b, c), B.11, B.13, B.15, B.17, B.18, B.20, C.1, C.3 (a), C.4, C.6, C.8, C.11.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (e até h), B.2 (d, e, f), B. 4, B.6, B.8, B.9 (e, f, g), B.10 (d, e, f), B.12, B.14, B.16, B.19, B.21, C.2, C.3 (b), C.5, C.7, C.9, C.10, C.12.

Exercícios básicos

B.1 Determine a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R, nos seguintes casos:

a) $C(4, 7)$ e $R = 8$;

b) $C(0, 2)$ e $R = \sqrt{7}$;

c) $C(-4, 1)$ e $R = \frac{1}{3}$;

d) $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ e $R = 1$;

e) $C(1, 8)$ e $R = 3$;

f) $C(-2, 0)$ e $R = \frac{2}{5}$;

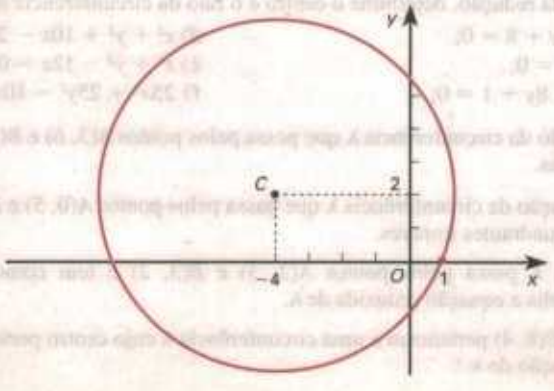
g) $C\left(-\frac{3}{4}, 1\right)$ e $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$;

h) $C(0, 0)$ e $R = 1$.

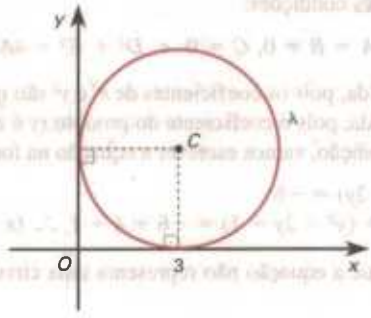
B.2 Obtenha o centro e raio da circunferência cuja equação reduzida é:

a) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$;
b) $(x + 5)^2 + y^2 = 3$;
c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 9$;
d) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$;
e) $x^2 + (y + 1)^2 = 2$;
f) $x^2 + y^2 = 4$.

B.3 Encontre a equação reduzida da circunferência de centro C cujo gráfico é:



B.4 A circunferência λ representada no gráfico é tangente aos eixos coordenados. Determine sua equação reduzida.



B.5 Para que valores reais de k a equação $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3k - 4$ representa uma circunferência?

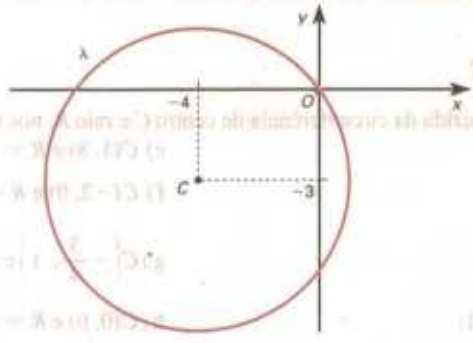
B.6 Obtenha os valores reais de k para que a equação $(x + 3)^2 + y^2 = 1 - 2k$:

a) represente uma circunferência;

b) represente um ponto;

c) represente o conjunto vazio.

B.7 Dê a equação normal da circunferência λ, de centro C, do gráfico.



B.8 Qual é a equação normal da circunferência de centro $C(3, 0)$ que tangencia o eixo das ordenadas?

B.9 Aplicando o método da comparação, obtenha o centro e o raio da circunferência de equação:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 6x + 6 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$;

d) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$;

e) $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$;

f) $x^2 + y^2 - 2y - 5 = 0$;

g) $3x^2 + 3y^2 - 3x + 6y + 3 = 0$.

B.10 Através do método da redução, determine o centro e o raio da circunferência de equação:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$;

c) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 1 = 0$;

d) $x^2 + y^2 + 10x - 20y + 121 = 0$;

e) $x^2 + y^2 - 12x = 0$;

f) $25x^2 + 25y^2 - 10x - 50y + 1 = 0$.

B.11 Obtenha uma equação da circunferência λ que passa pelos pontos $A(3, 6)$ e $B(4, -1)$, cujo centro pertence ao eixo das ordenadas.

B.12 Determine uma equação da circunferência λ que passa pelos pontos $A(0, 5)$ e $B(1, 0)$, cujo centro pertence à reta bissetriz dos quadrantes ímpares.

B.13 Uma circunferência λ passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(3, 2)$ e tem como centro um ponto da reta r: $y = 2x - 1$. Obtenha a equação reduzida de λ.

B.14 Os pontos $A(1, 3)$ e $B(8, 4)$ pertencem a uma circunferência λ cujo centro pertence à reta r: $x - y - 5 = 0$. Determine uma equação de λ.

B.15 Obtenha uma equação da circunferência λ que passa pelos pontos $A(6, 0)$, $B(0, 0)$ e $C(1, -1)$.

B.16 Determine a equação reduzida da circunferência circunscrita ao triângulo cujos vértices são os pontos $A(4, 6)$, $B(-2, -2)$ e $C(5, -1)$.

B.17 Qual das equações representa uma circunferência?

a) $x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 9 = 0$;
b) $x^2 + 6x - 4y + 1 = 0$;
c) $x^2 + y^2 + 4xy - 2 = 0$;
d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$;
e) $-x^2 - y^2 + 8x - 7 = 0$.

B.18 Para que valores reais de k a equação $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 27 - k = 0$ representa uma circunferência?

B.19 Obtenha os valores reais de k e m de modo que a equação $x^2 + ky^2 - 6x + 4y + 16 - m = 0$ represente uma circunferência.

B.20 Dê uma equação geral da reta r que passa pelo centro da circunferência λ: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 10 = 0$ e é paralela à reta s: $2x + 5y - 2 = 0$.

B.21 Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo centro da circunferência λ: $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$ e é perpendicular à reta s: $x - 2y + 5 = 0$.

Exercícios complementares

C.1 Represente graficamente a equação $(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

C.2 Construa o gráfico da equação $(|x| - 2)^2 + (|y| - 2)^2 = 4$.

C.3 Obtenha o centro e o raio da circunferência de equação:

a) $(2x - 1)^2 + (2y - 4)^2 = 36$ (**sugestão:** divida por 4 ambos os membros da igualdade);
b) $(3x - 1)^2 + (3y + 9)^2 = 1$.

C.4 Para que valor real de k a equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = k - 1$ representa uma circunferência que passa pela origem do sistema cartesiano?

C.5 Obtenha k, $k \in \mathbb{R}$, de modo que a equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = k^2 - 7$ represente uma circunferência que passa pelo ponto $P(3, 4)$.

C.6 Determine os possíveis valores reais de k de modo que a equação $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y + 1)^2 = k^2 - 9$ represente uma circunferência.

C.7 Construa o gráfico da equação $x^2 + y^2 - 2|x| - 2y + 1 = 0$.

C.8 Quais são os valores de m e k de modo que a equação $mx^2 + 3y^2 - 18x - 18y + k = 0$ represente uma circunferência, tangente aos eixos coordenados?

C.9 Um segmento $\overline{AB}$ é diâmetro de uma circunferência λ de centro $C(-1, 4)$. Sabendo que a abscissa e a ordenada do ponto A são respectivamente iguais à metade da abscissa e ao dobro da ordenada de B, obtenha uma equação da circunferência λ.

C.10 Um triângulo ABC é retângulo em A. Obtenha uma equação da circunferência circunscrita a esse triângulo, sabendo que $B(5, 8)$ e $C(-1, 0)$.

C.11 Represente no plano cartesiano os pontos (x, y) tais que: $\begin{cases} x = \text{sen } t \\ y = \cos t, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

C.12 Construa no plano cartesiano o gráfico formado pelos pontos (x, y) tais que: $\begin{cases} x = 1 + \text{sen } t \\ y = 3 + \cos t, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fesp-SP) A reta r passa pelo centro da circunferência $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ e é paralela à reta $3x - y + 7 = 0$. A equação da reta r é:

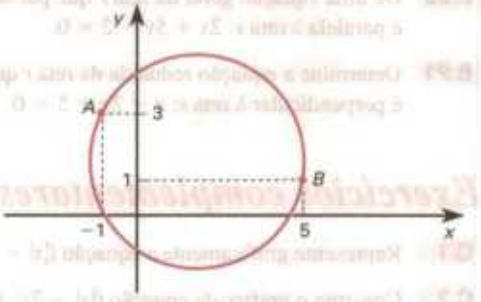
a) $y = 3x + 1$.
b) $y = 3x + 2$.
c) $y = 3x - 1$.
d) $y = -3x + 2$.
e) $y = -3x - 1$.

V.2 (UFSE) Considere as circunferências: λ_1, dada por $x^2 + y^2 = 1$, e λ_2, dada por $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$. A distância entre seus centros é:

a) 3. b) $2\sqrt{2}$. c) $\sqrt{5}$. d) 2. e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

V.3 (Unisinos-RS) A equação da circunferência com diâmetro $\overline{AB}$, sendo $A(-1, 3)$ e $B(5, 1)$ é:

a) $x^2 + y^2 - x + 3y - 6 = 0$.
b) $x^2 + y^2 + 5x + y - 3 = 0$.
c) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$.
d) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$.
e) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$.



V.4 (Fuvest-SP) O segmento $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10y$. Se A é o ponto $(3, 1)$, então B é o ponto:

a) $(-3, 9)$. b) $(3, 9)$. c) $(0, 10)$. d) $(-3, 1)$. e) $(1, 3)$.

V.5 (Ulbra-RS) Das equações seguintes, indique aquela que é equação de circunferência:

a) $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 4 = 0$.
b) $2x^2 + y^2 - x - y + 2 = 0$.
c) $x^2 + y^2 + 3xy - 2x - 1 = 0$.
d) todas são equações de circunferência.
e) nenhuma é equação de circunferência.

Capítulo 10

Algumas posições relativas à circunferência

1. Posições relativas de um ponto e uma circunferência

Sendo λ uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R, e P um ponto tal que $P(x_0, y_0)$, temos que:

I. P é **interior** a λ se, e somente se, $d_{CP} < R$, ou seja:

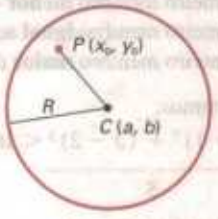
$$\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} < R,$$

que é equivalente a:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < R^2$$

ou

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - R^2 < 0;$$



II. P **pertence** a λ se, e somente se, $d_{CP} = R$, ou seja:

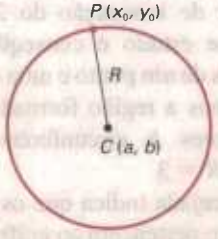
$$\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} = R,$$

que é equivalente a:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$$

ou

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - R^2 = 0;$$



III. P é **exterior** a λ se, e somente se, $d_{CP} > R$, ou seja:

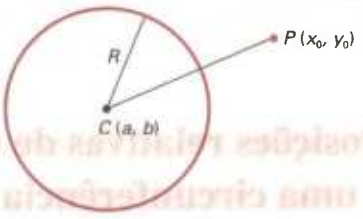
$$\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} > R,$$

que é equivalente a:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > R^2$$

ou

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - R^2 > 0.$$



Exercício resolvido

R.1 Qual é a posição do ponto P em relação à circunferência λ, em cada um dos casos a seguir?

a) $P(1, 3)$ e $\lambda: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$;

b) $P(5, 6)$ e $\lambda: (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 4$;

c) $P(3, 1)$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$.

Resolução

Basta substituir as variáveis x e y da equação pelas coordenadas do ponto P. Se com essa substituição obtivermos:

- o primeiro membro **menor** do que o segundo, então o ponto é **interior** à circunferência;
- o primeiro membro **igual** ao segundo, então o ponto **pertence** à circunferência;
- o primeiro membro **maior** do que o segundo, então o ponto é **exterior** à circunferência.

Assim, temos:

a) $\underbrace{(1 + 1)^2 + (3 - 2)^2}_{5} < 16.$

Logo, P é interior a λ.

b) $\underbrace{(5 - 3)^2 + (6 - 6)^2}_{4} = 4.$

Logo, P pertence a λ.

c) $\underbrace{3^2 + 1^2 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2}_{2} > 0.$

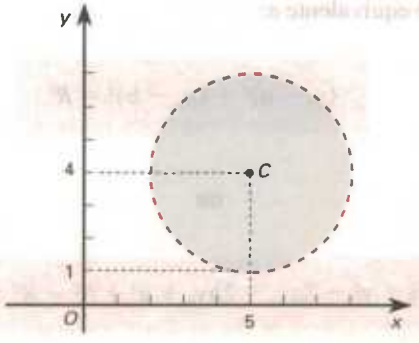
Logo, P é exterior à circunferência.

1.1. Inequação do 2º grau em duas variáveis

Vamos estudar a representação gráfica de um tipo particular de inequação do 2º grau a duas variáveis. Esse estudo é conseqüência das posições relativas de um ponto e uma circunferência.

Consideremos a região formada por todos os pontos interiores à circunferência de centro $C(5, 4)$ e raio $R = 3$.

A linha tracejada indica que os pontos da circunferência não pertencem ao gráfico. Essa região é denominada **círculo aberto**.

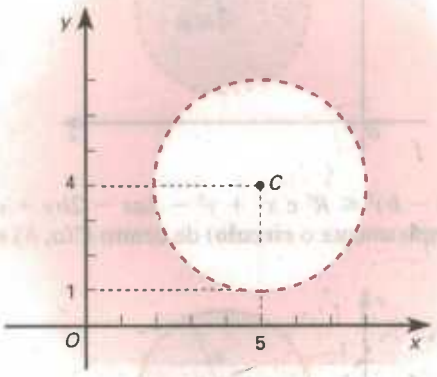


Qualquer ponto $P(x, y)$ dessa região dista do centro $C(5, 4)$ uma distância menor do que o raio $R = 3$:

$$d_{CP} < R \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} < 3 \therefore (x-5)^2 + (y-4)^2 < 9,$$

ou ainda: $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 32 < 0$.

Analogamente, a região exterior a essa circunferência:

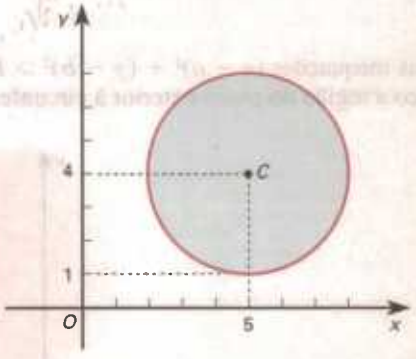


é determinada pela inequação: $(x-5)^2 + (y-4)^2 > 9$, ou ainda: $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 32 > 0$.

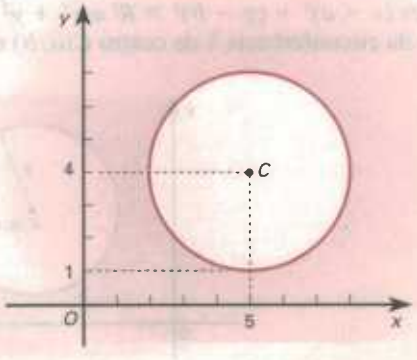
Se quisermos incluir a circunferência em cada um dos gráficos anteriores, então devemos usar as relações "$\leqslant$" e "$\geqslant$" nas inequações:

$(x-5)^2 + (y-4)^2 \leqslant 9$

(essa região é denominada **círculo fechado** ou simplesmente **círculo**);

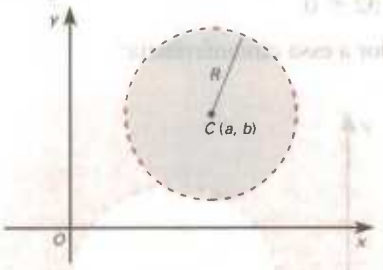


$(x-5)^2 + (y-4)^2 \geqslant 9$.

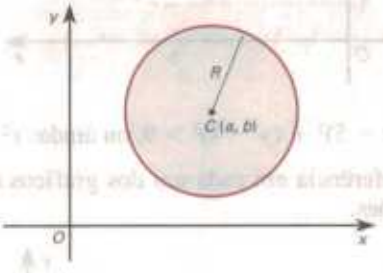


Generalizando, temos: se a equação de uma circunferência λ é $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ ou, na forma normal, $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, então:

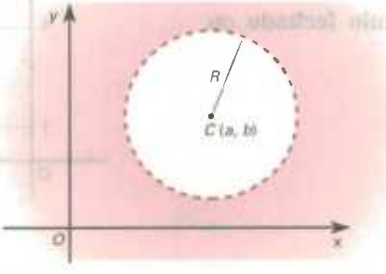
• as inequações $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$ e $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 < 0$ têm como gráfico o **círculo aberto** de centro $C(a, b)$ e raio R;



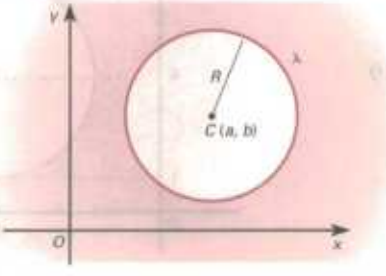
• as inequações $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant R^2$ e $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 \leqslant 0$ têm como gráfico o **círculo fechado** (ou simplesmente o **círculo**) de centro $C(a, b)$ e raio R;



• as inequações $(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$ e $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 > 0$ têm como gráfico a região do plano exterior à circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R;



• as inequações $(x - a)^2 + (y - b)^2 \geqslant R^2$ e $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 \geqslant 0$ têm como gráfico a reunião da circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio R com a região do plano exterior a λ.



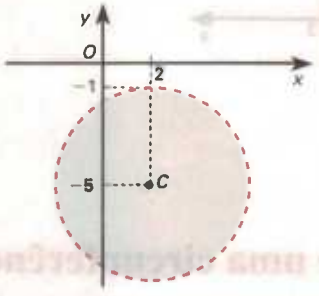
Exercícios resolvidos

R.2 Representar no plano cartesiano cada uma das seguintes inequações:

a) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 < 16$; b) $x^2 + y^2 - 2y - 8 \geqslant 0$.

Resolução

a) A inequação representa todos os pontos interiores à circunferência λ de equação $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$.



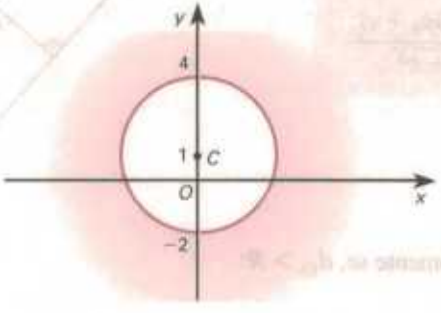
Círculo aberto de centro $C(2, -5)$ e raio $R = 4$.

b) A inequação representa a reunião da circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ com o conjunto dos pontos exteriores a λ.

Para obter o centro C e o raio R de λ, vamos usar o método da redução:

$(x^2) + (y^2 - 2y) = 8 \Rightarrow (x^2) + (y^2 - 2y + 1) = 8 + 1 \therefore \lambda: x^2 + (y - 1)^2 = 9 \therefore C(0, 1)$ e $R = 3$.

Logo, o gráfico da inequação é:

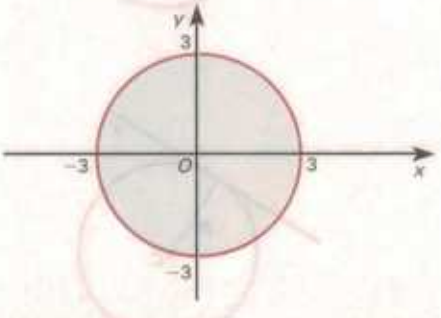


R.3 Representar graficamente o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9 \\ x^2 + y^2 \geqslant 4. \end{cases}$

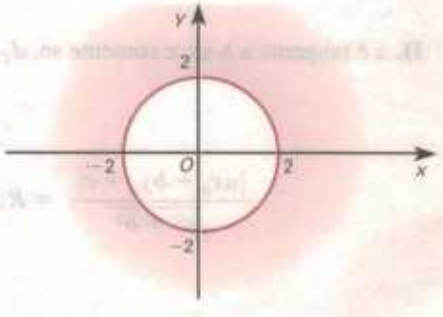
Resolução

Um ponto $P(x, y)$ é solução do sistema se, e somente se, é solução de cada uma das inequações que o compõem. Assim, a representação gráfica do sistema é a **intersecção** das regiões determinadas pelas duas inequações:

$x^2 + y^2 \leqslant 9$ **(I)** e $x^2 + y^2 \geqslant 4$ **(II)**

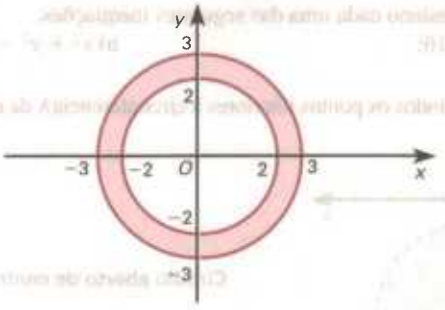


(I)



(II)

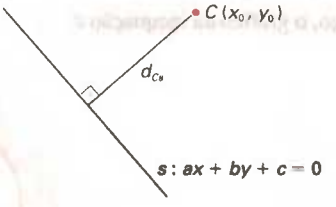
A intersecção das regiões (I) e (II) é a coroa circular:



2. Posições relativas de uma reta e uma circunferência

Sejam λ uma circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio R e s uma reta de equação geral $ax + by + c = 0$. A distância entre C e s é calculada pela fórmula deduzida no capítulo 6:

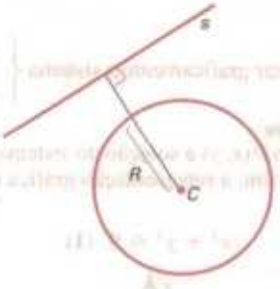
$$d_{Cs} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Temos que:

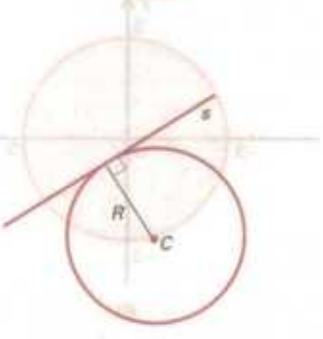
I. s é **exterior** a λ se, e somente se, $d_{Cs} > R$:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > R;$$



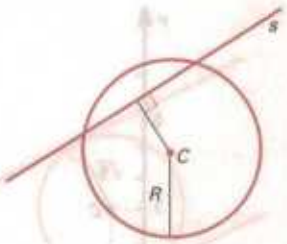
II. s é tangente a λ se, e somente se, $d_{Cs} = R$:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R;$$



III. s é secante a λ, se, e somente se, $d_{Cs} < R$:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < R.$$



Exercícios resolvidos

R.4 Qual é a posição da reta s em relação à circunferência λ, em cada um dos casos a seguir?

a) $s: 3x + 4y + 4 = 0$ e $\lambda: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$;

b) $s: 12x - 5y - 5 = 0$ e $\lambda: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$;

c) $s: y = \frac{4x}{3} + \frac{10}{3}$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Resolução

a) O centro C e o raio R de λ são $C(1, 2)$ e $R = 1$. A distância entre C e s é:

$$d_{Cs} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Temos que $d_{Cs} > R$, pois $3 > 1$; logo, a reta s é exterior à circunferência.

b) O centro C e o raio R de λ são $C(3, 1)$ e $R = 2$. A distância entre C e s é:

$$d_{Cs} = \frac{|12 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|26|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2.$$

Temos que $d_{Cs} = R$, pois $2 = 2$; logo, a reta s é tangente a λ.

c) Para obter o centro C e o raio R de λ, vamos aplicar o método da redução:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 20 \;\therefore\; (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 20 + 1 + 4$$
$$\therefore\; (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25 \;\therefore\; C(1, -2) \text{ e } R = 5.$$

Passamos para a **forma geral** a equação da reta s: $4x - 3y + 10 = 0$.

A distância entre C e s é $d_{Cs} = \frac{|4 \cdot 1 - 3(-2) + 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$.

Temos que $d_{Cs} < R$, pois $4 < 5$; logo, a reta é secante à circunferência λ.

R.5 Seja o feixe de retas paralelas $x + 2y + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Pedem-se as equações das retas desse feixe tangentes à circunferência $\lambda: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Resolução

O centro C e o raio R de λ são $C(1, 3)$ e $R = \sqrt{5}$.

Sendo $s: x + 2y + m = 0$ uma reta do feixe, temos que s é tangente a λ se, e somente se, $d_{Cs} = R$:

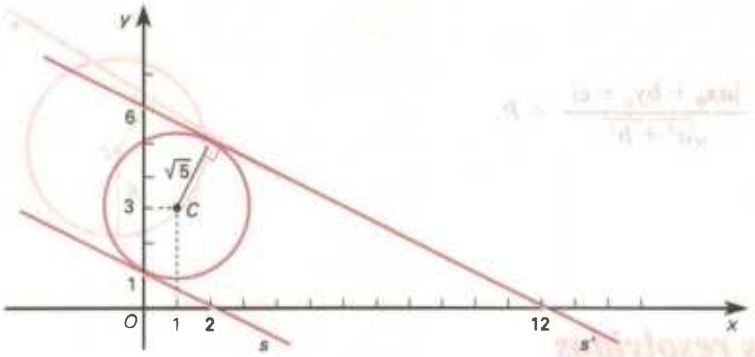
$$\frac{|1 + 2 \cdot 3 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5} \;\therefore\; \frac{|7 + m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \;\therefore\; |7 + m| = 5.$$

Assim, temos que: $7 + m = 5 \Rightarrow m = -2$ ou $7 + m = -5 \Rightarrow m = -12$.

Logo, existem duas retas s e s' do feixe de paralelas que são tangentes a λ:

$$s: x + 2y - 2 = 0 \text{ e } s': x + 2y - 12 = 0.$$

Observando esse resultado, graficamente, temos:



R.6 Obter as equações das retas paralelas à reta $t: 4x + 3y - 1 = 0$ e tangentes à circunferência λ de equação $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Resolução

O centro C e o raio R de λ são $C(-2, 1)$ e $R = 2$.

A equação do feixe de paralelas a t é $4x + 3y + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Sendo $s: 4x + 3y + m = 0$ uma reta desse feixe, temos que s é tangente a λ se, e somente se, $d_{Cs} = R$:

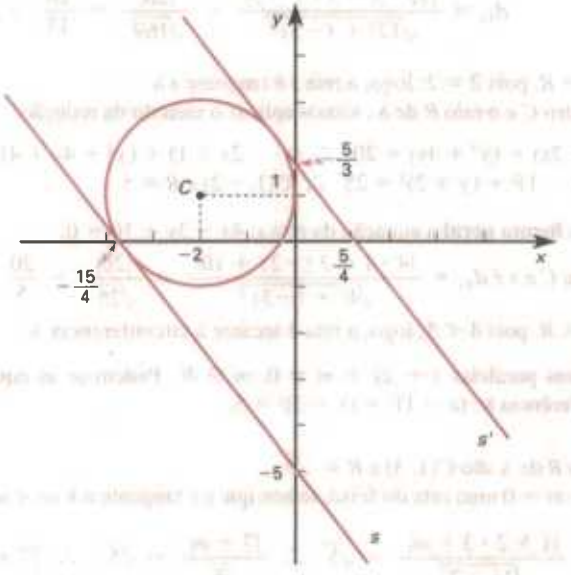
$$\frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \therefore \frac{|m - 5|}{\sqrt{25}} = 2 \therefore |m - 5| = 10.$$

Assim, temos que: $m - 5 = 10 \Rightarrow m = 15$ ou $m - 5 = -10 \Rightarrow m = -5$.

Assim, obtivemos duas retas s e s' paralelas a t e tangentes a λ. São elas:

$$s: 4x + 3y + 15 = 0 \quad \text{e} \quad s': 4x + 3y - 5 = 0.$$

Graficamente, temos:



R.7 Determinar uma equação da reta s que passa pelo ponto $P(5, 4)$ e tangencia a circunferência λ:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0.$$

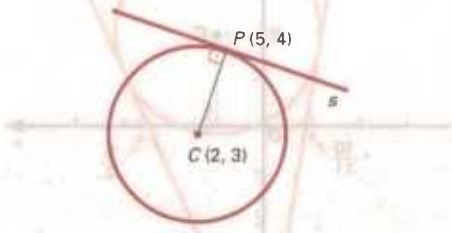
Resolução

O ponto P pertence à circunferência λ, pois: $5^2 + 4^2 - 4 \cdot 5 - 6 \cdot 4 + 3 = 0$.

Logo, existe uma única reta s que passa por P e é tangente a λ.
Vamos obter o centro C e o raio R de λ pelo método da redução:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) = -3 \;\therefore\; (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -3 + 4 + 9$$
$$\therefore (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10 \;\therefore\; C(2, 3) \text{ e } R = \sqrt{10}.$$

A reta s tangente à circunferência λ em P é **perpendicular ao raio no ponto de tangência**:



Assim, o coeficiente angular da reta s é o oposto do inverso do coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CP}$, ou seja:

$$m_s = -\frac{1}{m_{CP}}.$$

Como $m_{CP} = \dfrac{4 - 3}{5 - 2} = \dfrac{1}{3}$, concluímos que $m_s = -3$.

Logo, pela equação fundamental da reta: $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$s \begin{cases} P(5, 4) \\ m_s = -3 \end{cases} \Rightarrow y - 4 = -3(x - 5) \;\therefore\; s: 3x + y - 19 = 0.$$

R.8 Seja o conjunto A formado por todas as retas cujas equações são da forma $y = mx - 5$, $m \in \mathbb{R}$. Pedem-se as equações das retas do conjunto A que são tangentes à circunferência λ: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Resolução

O centro C e o raio R de λ são $C(1, 2)$ e $R = \sqrt{5}$.

Sendo s: $y = mx - 5$ uma reta do conjunto A, sua **forma geral** é s: $mx - y - 5 = 0$. A reta s é tangente a λ se, e somente se, $d_{Cs} = R$:

$$\frac{|m \cdot 1 - 2 - 5|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \;\therefore\; |m - 7| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{m^2 + 1}.$$

Quadrando ambos os membros da igualdade, temos:

$$m^2 - 14m + 49 = 5(m^2 + 1) \;\therefore\; m^2 - 14m + 49 = 5m^2 + 5 \;\therefore\; 4m^2 + 14m - 44 = 0$$

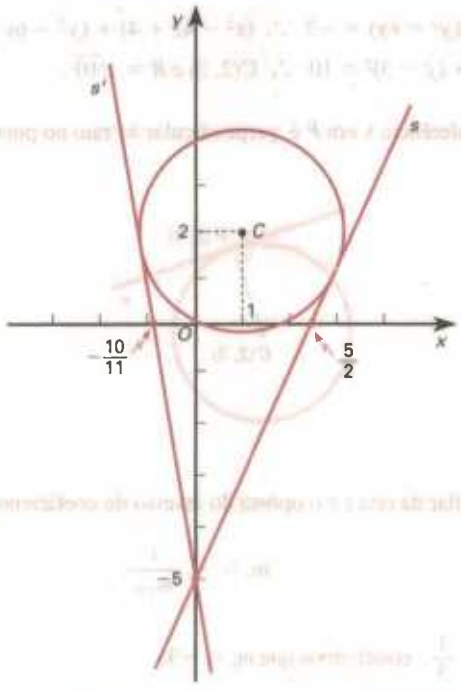
$$\therefore 2m^2 + 7m - 22 = 0 \;\therefore\; \Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-22) = 225$$

$$\therefore m = \frac{-7 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 15}{4} \;\therefore\; m = 2 \text{ ou } m = -\frac{11}{2}.$$

Logo, existem duas retas s e s' do conjunto A que tangenciam a circunferência λ:

$$s: y = 2x - 5 \quad \text{e} \quad s': y = -\frac{11x}{2} - 5.$$

Observando no plano cartesiano esse resultado, temos:



R.9 Determinar as equações das retas do feixe de concorrentes de centro $P(2, 7)$ que tangenciam a circunferência λ: $(x - 8)^2 + (y + 1)^2 = 80$.

Resolução

O centro C e o raio R de λ são: $C(8, -1)$ e $R = 4\sqrt{5}$.

O ponto P é exterior à circunferência λ, pois:

$$\underbrace{(2 - 8)^2 + (7 + 1)^2}_{100} > 80.$$

Portanto existem duas retas que passam por P e são tangentes a λ.

O feixe de concorrentes de centro P é determinado pelas equações:

$$y - 7 = m(x - 2),\ m \in \mathbb{R},\ \text{ou}\ x = 2 \ \therefore\ mx - y + 7 - 2m = 0,\ m \in \mathbb{R},\ \text{ou}\ x = 2.$$

Nota: é necessário incluir a reta $x = 2$ porque a equação $y - 7 = m(x - 2)$, $m \in \mathbb{R}$, só representa as equações de retas não-verticais que passam por $P(2, 7)$.

A reta vertical t: $x - 2 = 0$ não é tangente a λ, pois $d_{Ct} < R$:

$$\underbrace{\frac{|8 - 2|}{\sqrt{1}}}_{d_{Ct}} < \underbrace{4\sqrt{5}}_{R}.$$

Portanto as equações das retas tangentes a λ terão a forma $mx - y + 7 - 2m = 0$.

Para que uma reta s: $mx - y + 7 - 2m = 0$ seja tangente a λ, devemos ter $d_{Cs} = R$, ou seja:

$$\frac{|m \cdot 8 - (-1) + 7 - 2m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 4\sqrt{5} \ \therefore\ |6m + 8| = 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{m^2 + 1}.$$

Quadrando ambos os membros da igualdade, obtemos:

$36m^2 + 96m + 64 = 80(m^2 + 1) \therefore 36m^2 + 96m + 64 = 80m^2 + 80$

$\therefore 44m^2 - 96m + 16 = 0 \therefore 11m^2 - 24m + 4 = 0$

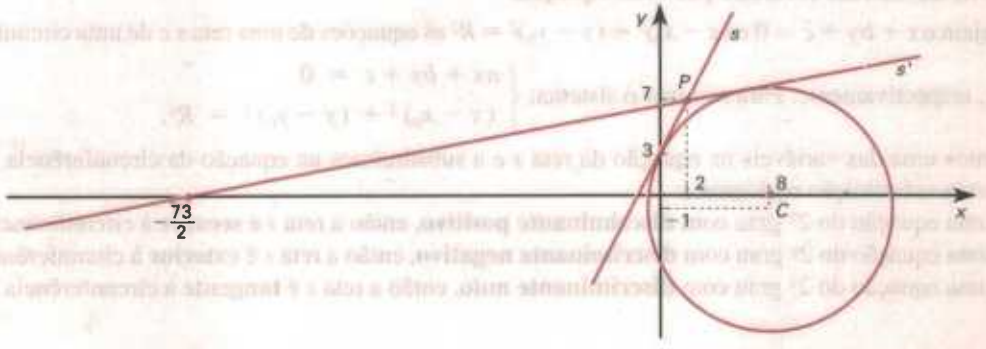
$\therefore \Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 4 = 400 \therefore m = \dfrac{24 \pm \sqrt{400}}{22} = \dfrac{24 \pm 20}{22} \therefore m = 2 \text{ ou } m = \dfrac{2}{11}.$

Portanto as retas que passam por $P(2, 7)$ e tangenciam a circunferência λ são:

$$s: 2x - y + 7 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow s: 2x - y + 3 = 0 \text{ e}$$

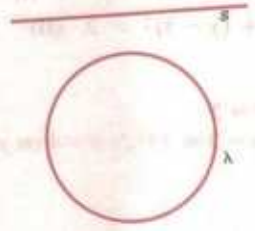
$$s': \frac{2x}{11} - y + 7 - 2 \cdot \frac{2}{11} = 0 \Rightarrow s': 2x - 11y + 73 = 0.$$

Graficamente, temos:

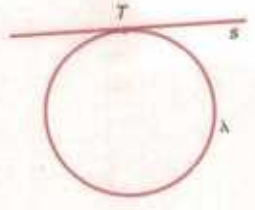


2.1. Intersecção de reta e circunferência

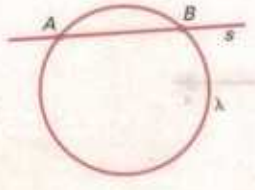
O conjunto intersecção de uma reta s com uma circunferência λ, contidas em um mesmo plano, pode ser vazio, unitário ou binário.



$s \cap \lambda = \varnothing$ (**s é exterior a λ**);



$s \cap \lambda = \{T\}$ (**s é tangente a λ**);



$s \cap \lambda = \{A, B\}$ (**s é secante a λ**).

Em qualquer um dos três casos, sendo conhecidas as equações de s: $ax + by + c = 0$ e λ: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, o conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \end{cases}$$

Esse sistema:

- é impossível se, e somente se, s é **exterior** a λ;
- tem uma única solução se, e somente se, s é **tangente** a λ;
- tem exatamente duas soluções se, e somente se, s é **secante** a λ.

Conclusão sobre a posição relativa entre reta e circunferência a partir do sistema formado por suas equações

Sejam $ax + by + c = 0$ e $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ as equações de uma reta s e de uma circunferência λ, respectivamente. Para resolver o sistema: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \end{cases}$ isolamos uma das variáveis na equação da reta s e a substituímos na equação da circunferência λ. Se com essa substituição obtivermos:

- uma equação do 2º grau com **discriminante positivo**, então a reta s é **secante** à circunferência λ;
- uma equação do 2º grau com **discriminante negativo**, então a reta s é **exterior** à circunferência λ;
- uma equação do 2º grau com **discriminante nulo**, então a reta s é **tangente** à circunferência λ.

Exercícios resolvidos

R.10 Obter a intersecção da reta s: $x - y + 1 = 0$ com a circunferência λ: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

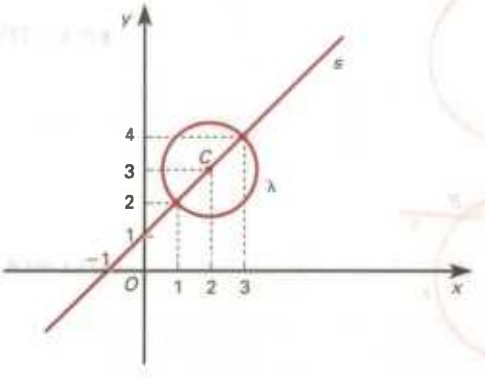
Resolução

O conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \Rightarrow x = y - 1 \quad \text{(I)} \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2. \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$(y - 1 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2 \therefore (y - 3)^2 + (y - 3)^2 = 2$$
$$\therefore 2(y - 3)^2 = 2 \therefore (y - 3)^2 = 1 \therefore y - 3 = 1 \text{ ou } y - 3 = -1 \therefore y = 4 \text{ ou } y = 2.$$

Substituindo $y = 4$ em (I), temos $x = 4 - 1 \therefore x = 3$.
Substituindo $y = 2$ em (I), temos $x = 2 - 1 \therefore x = 1$.
Logo, $s \cap \lambda = \{(3, 4), (1, 2)\}$.
Graficamente, temos:



R.11 Determinar a intersecção da circunferência $\lambda: (x-1)^2 + (y+4)^2 = 10$ com o eixo das ordenadas.

Resolução

A equação do eixo Oy é $x = 0$. Assim, a intersecção de λ com esse eixo é o conjunto solução do sistema:

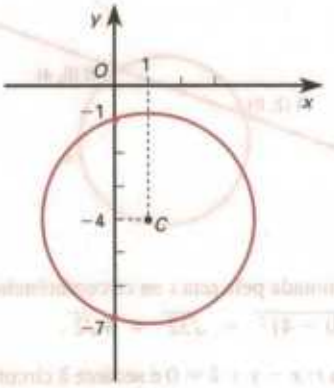
$$\begin{cases} x = 0 \text{ (I)} \\ (x-1)^2 + (y+4)^2 = 10. \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$(0-1)^2 + (y+4)^2 = 10 \;\therefore\; (y+4)^2 = 9 \;\therefore\; y + 4 = 3$ ou $y + 4 = -3 \;\therefore\; y = -1$ ou $y = -7$.

Logo, $\lambda \cap Oy = \{(0, -1), (0, -7)\}$.

Graficamente, temos:



R.12 Determinar a intersecção da reta $s: x - y = 0$ com a circunferência $\lambda: (x-5)^2 + y^2 = 1$.

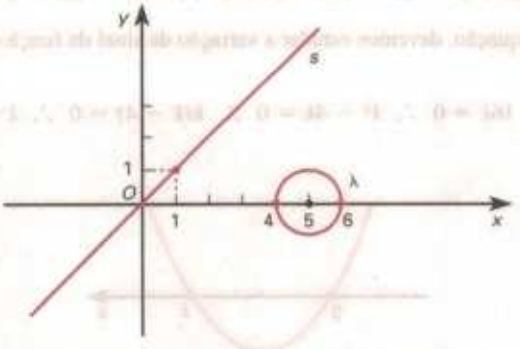
Resolução

O conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} x - y = 0 \Rightarrow x = y \text{ (I)} \\ (x-5)^2 + y^2 = 1. \text{ (II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos: $(y-5)^2 + y^2 = 1 \;\therefore\; y^2 - 10y + 25 + y^2 = 1 \;\therefore\; 2y^2 - 10y + 24 = 0$
$\therefore\; y^2 - 5y + 12 = 0 \;\therefore\; \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 \;\therefore\; \Delta = -23$.

Como $\Delta < 0$, temos que o sistema é impossível em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, isto é: $s \cap \lambda = \varnothing$.

Graficamente, temos:



R.13 Determinar o comprimento da corda determinada pela reta $s: x - y - 2 = 0$ na circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 10x - 2y + 16 = 0$.

Resolução

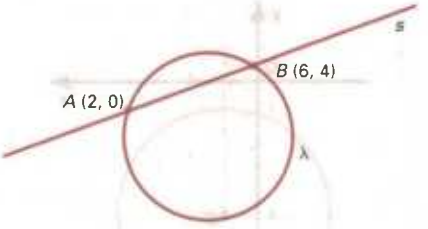
Inicialmente, vamos determinar os pontos de intersecção de s com λ:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \Rightarrow x = y + 2 \text{ (I)} \\ x^2 + y^2 - 10x - 2y + 16 = 0. \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II):

$$(y + 2)^2 + y^2 - 10(y + 2) - 2y + 16 = 0 \therefore y^2 + 4y + 4 + y^2 - 10y - 20 - 2y + 16 = 0$$
$$\therefore 2y^2 - 8y = 0 \therefore y^2 - 4y = 0 \therefore y(y - 4) = 0 \therefore y = 0 \text{ ou } y = 4.$$

Substituindo $y = 0$ em (I), temos $x = 0 + 2 \therefore x = 2$.
Substituindo $y = 4$ em (I), temos $x = 4 + 2 \therefore x = 6$.
Assim, $s \cap \lambda = \{(2, 0), (6, 4)\}$.



O comprimento da corda determinada pela reta s na circunferência λ é a distância entre os pontos $A(2, 0)$ e $B(6, 4)$: $AB = \sqrt{(2 - 6)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

R.14 Para que valores reais de k a reta $r: x - y + k = 0$ é secante à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$?

Resolução

Consideremos o sistema: $\begin{cases} x - y + k = 0 \Rightarrow x = y - k \text{ (I)} \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0. \text{ (II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

$$(y - k)^2 + y^2 - 2(y - k) - 6y + 8 = 0$$
$$\therefore y^2 - 2ky + k^2 + y^2 - 2y + 2k - 6y + 8 = 0 \therefore 2y^2 - (2k + 8)y + k^2 + 2k + 8 = 0. \text{ (III)}$$

A reta r é secante à circunferência λ se, e somente se, o discriminante da equação (III) for positivo:

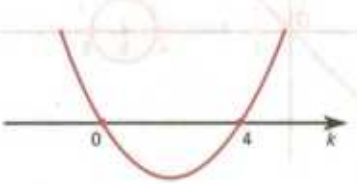
$$\Delta > 0 \Rightarrow [-(2k + 8)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 + 2k + 8) > 0$$
$$\therefore 4k^2 + 32k + 64 - 8k^2 - 16k - 64 > 0 \therefore -4k^2 + 16k > 0 \therefore 4k^2 - 16k < 0.$$

Para resolver essa inequação, devemos estudar a variação de sinal da função $f(k) = 4k^2 - 16k$.

- Raízes de f:

$$4k^2 - 16k = 0 \therefore k^2 - 4k = 0 \therefore k(k - 4) = 0 \therefore k = 0 \text{ ou } k = 4.$$

- Gráfico de f:



A inequação exige que $f(k) < 0$; logo, temos que $0 < k < 4$.
Assim, a reta r é secante à circunferência λ para todo k real tal que $0 < k < 4$.

R.15 Obter k, $k \in \mathbb{R}$, de modo que a reta r: $3x - y + k = 0$ seja tangente à circunferência λ: $x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0$.

Resolução

Consideremos o sistema: $\begin{cases} 3x - y + k = 0 \Rightarrow y = 3x + k \text{ (I)} \\ x^2 + y^2 - 4y - 6 = 0. \text{ (II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

$$x^2 + (3x + k)^2 - 4(3x + k) - 6 = 0 \therefore x^2 + 9x^2 + 6kx + k^2 - 12x - 4k - 6 = 0$$
$$\therefore 10x^2 + (6k - 12)x + k^2 - 4k - 6 = 0. \text{ (III)}$$

A reta r é tangente à circunferência λ se, e somente se, o discriminante da equação (III) for nulo, ou seja:

$\Delta = 0 \Rightarrow (6k - 12)^2 - 4 \cdot 10(k^2 - 4k - 6) = 0$
$\therefore 36k^2 - 144k + 144 - 40k^2 + 160k + 240 = 0 \therefore -4k^2 + 16k + 384 = 0$
$\therefore k^2 - 4k - 96 = 0$

$$\therefore k = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-96)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{4 \pm 20}{2} \therefore k = 12 \text{ ou } k = -8.$$

Assim, a reta r é tangente à circunferência λ, para $k = 12$ ou $k = -8$.

R.16 Sejam a reta s: $y = x + 1$ e a circunferência λ: $x^2 + (y - 1)^2 = 2$.

a) Determinar $s \cap \lambda$. b) Representar no plano cartesiano o seguinte sistema: $\begin{cases} y > x + 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 \leq 2. \end{cases}$

Resolução

a) O conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} y = x + 1 \text{ (I)} \\ x^2 + (y - 1)^2 = 2 \text{ (II)} \end{cases}$

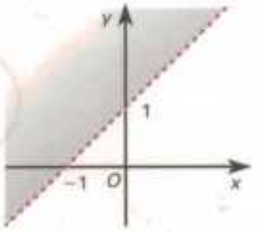
Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$x^2 + (x + 1 - 1)^2 = 2 \therefore x^2 + x^2 = 2 \therefore 2x^2 = 2 \therefore x^2 = 1 \therefore x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

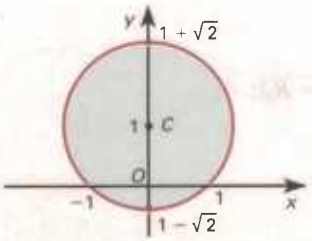
- Substituindo $x = 1$ em (I), temos $y = 1 + 1 \therefore y = 2$.
- Substituindo $x = -1$ em (I), temos $y = -1 + 1 \therefore y = 0$.

Assim, $s \cap \lambda = \{(1, 2), (-1, 0)\}$.

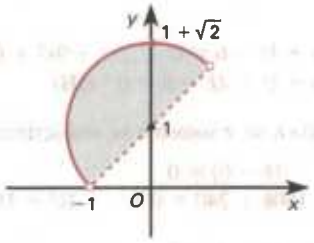
b) A representação gráfica de $y > x + 1$ é:



A representação gráfica de $x^2 + (y - 1)^2 \leq 2$ é:



Finalmente, a representação gráfica do sistema $\begin{cases} y > x + 1 \\ x^2 + (y-1)^2 \leq 2 \end{cases}$ é a intersecção dos gráficos anteriores.

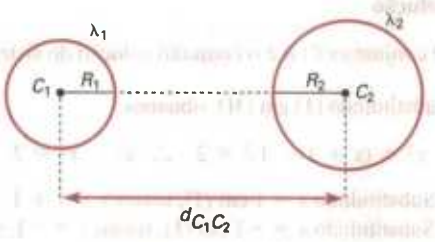


3. Posições relativas de duas circunferências

Sejam λ_1 e λ_2 duas circunferências, contidas em um mesmo plano, de centros C_1 e C_2 e raios R_1 e R_2, respectivamente. Então temos:

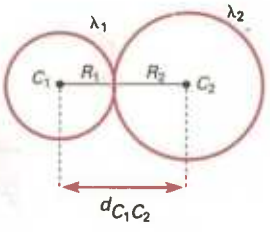
• λ_1 e λ_2 são **exteriores** se, e somente se:

$$d_{C_1C_2} > R_1 + R_2;$$



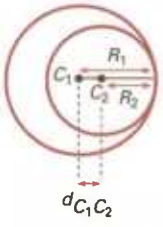
• λ_1 e λ_2 são **tangentes exteriormente** se, e somente se:

$$d_{C_1C_2} = R_1 + R_2;$$



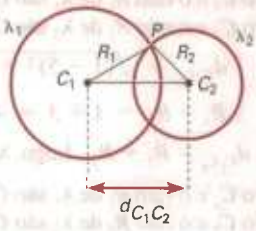
• λ_1 e λ_2 são **tangentes interiormente** se, e somente se:

$$d_{C_1C_2} = |R_1 - R_2|;$$



• λ_1 e λ_2 são **secantes** se, e somente se:

$$|R_2 - R_1| < d_{C_1C_2} < R_1 + R_2$$



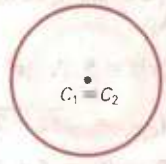
(note que essa é a condição de existência para o triângulo PC_1C_2);

• supondo que as circunferências tenham raios com medidas diferentes, a de menor raio será **interior** à outra se, e somente se:

$$d_{C_1C_2} < |R_1 - R_2|$$

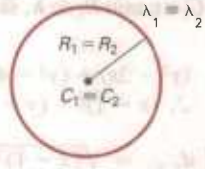
(note que as circunferências são concêntricas se, e somente se, $d_{C_1C_2} = 0$);

$$d_{C_1C_2} = 0$$



• as circunferências coincidem se, e somente se:

$$d_{C_1C_2} = 0 \text{ e } R_1 = R_2$$



(note que λ_1 e λ_2 também são concêntricas).

Exercícios resolvidos

R.17 Determinar a posição relativa entre as circunferências λ_1 e λ_2, nos seguintes casos:

a) $\lambda_1: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ e $\lambda_2: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 9$;

b) $\lambda_1: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ e $\lambda_2: x^2 + (y+3)^2 = 4$;

c) $\lambda_1: (x-6)^2 + (y+10)^2 = 196$ e $\lambda_2: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$;

d) $\lambda_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ e $\lambda_2: x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$;

e) $\lambda_1: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ e $\lambda_2: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$;

f) $\lambda_1: 3x^2 + 3y^2 + 6y - 9 = 0$ e $\lambda_2: x^2 + (y+1)^2 = 4$.

Resolução

a) O centro C_1 e o raio R_1 de λ_1 são $C_1(1, 2)$ e $R_1 = 1$.
O centro C_2 e o raio R_2 de λ_2 são $C_2(5, -1)$ e $R_2 = 3$.

Temos: $\begin{cases} d_{C_1C_2} = \sqrt{(1-5)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{25} = 5 \\ R_1 + R_2 = 1 + 3 = 4. \end{cases}$

Assim, $d_{C_1C_2} > R_1 + R_2$. Logo, λ_1 e λ_2 são exteriores.

b) O centro C_1 e o raio R_1 de λ_1 são $C_1(3, 1)$ e $R_1 = 3$.
O centro C_2 e o raio R_2 de λ_2 são $C_2(0, -3)$ e $R_2 = 2$.

Temos: $\begin{cases} d_{C_1C_2} = \sqrt{(3-0)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{25} = 5 \\ R_1 + R_2 = 3 + 2 = 5. \end{cases}$

Assim, $d_{C_1C_2} = R_1 + R_2$. Logo, λ_1 e λ_2 são tangentes exteriormente.

c) O centro C_1 e o raio R_1 de λ_1 são $C_1(6, -10)$ e $R_1 = 14$.

Para obter o centro C_2 e o raio R_2 de λ_2, vamos aplicar o método da redução:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) = -4 \therefore (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -4 + 1 + 4$$
$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \therefore C_2(1, 2) \text{ e } R_2 = 1.$$

Temos: $\begin{cases} d_{C_1C_2} = \sqrt{(6-1)^2 + (-10-2)^2} = \sqrt{169} = 13 \\ R_1 - R_2 = 13. \end{cases}$

Assim, $d_{C_1C_2} = |R_1 - R_2|$. Logo, λ_1 e λ_2 são tangentes interiormente.

d) O centro C_1 e o raio R_1 de λ_1 são $C_1(2, -3)$ e $R_1 = 5$. Pelo método da redução, obtemos o centro C_2 e o raio R_2 de λ_2:

$$(x^2 - 4x) + (y^2) = 5 \therefore (x^2 - 4x + 4) + (y^2) = 5 + 4 \therefore (x-2)^2 + y^2 = 9 \therefore C_2(2, 0) \text{ e } R_2 = 3.$$

Temos: $\begin{cases} d_{C_1C_2} = \sqrt{(2-2)^2 + (-3-0)^2} = 3 \\ R_1 + R_2 = 5 + 3 = 8 \\ R_1 - R_2 = 5 - 3 = 2. \end{cases}$

Assim, $|R_1 - R_2| < d_{C_1C_2} < R_1 + R_2$. Logo, λ_1 e λ_2 são secantes.

e) O centro C_1 e o raio R_1 de λ_1 são $C_1(2, 1)$ e $R_1 = 2$. Pelo método da redução, obtemos o centro C_2 e o raio R_2 de λ_2:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) = 31 \therefore (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 31 + 1 + 4$$
$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 36 \therefore C_2(1, 2) \text{ e } R_2 = 6.$$

Temos: $\begin{cases} d_{C_1C_2} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2} \\ R_2 - R_1 = 6 - 2 = 4. \end{cases}$

Assim, $d_{C_1C_2} < |R_2 - R_1|$. Logo, a circunferência de raio menor, λ_1, é interior à circunferência de raio maior, λ_2.

f) Dividindo por 3 ambos os membros da equação de λ_1 e aplicando o método da redução, obtemos seu centro C_1 e seu raio R_1:

$$3x^2 + 3y^2 + 6y - 9 = 0 \therefore x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$$
$$\therefore (x^2) + (y^2 + 2y) = 3 \therefore (x^2) + (y^2 + 2y + 1) = 3 + 1$$
$$\therefore x^2 + (y+1)^2 = 4 \therefore C_1(0, -1) \text{ e } R_1 = 2.$$

O centro C_2 e o raio R_2 de λ_2 são $C_2(0, -1)$ e $R_2 = 2$. Como λ_1 e λ_2 têm o mesmo centro e o mesmo raio, temos que $\lambda_1 = \lambda_2$.

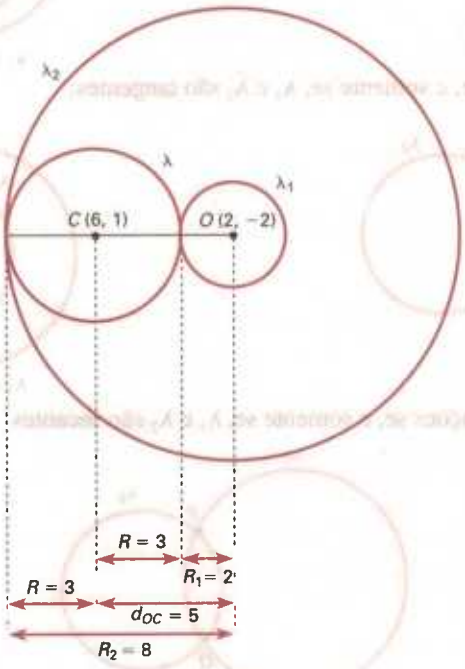
R.18 Obter as equações das circunferências concêntricas de centro $O(2, -2)$ que tangenciam a circunferência $\lambda: (x-6)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Resolução

O centro C e o raio R de λ são $C(6, 1)$ e $R = 3$.

A distância entre O e C é: $d_{OC} = \sqrt{(6-2)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{25} = 5$.

Como $d_{OC} > R$, pois $5 > 3$, temos que O é exterior a λ. Assim, existem duas circunferências, λ_1 e λ_2, de centro O e tangentes a λ.



λ_1 é tangente a λ exteriormente e seu raio R_1 é tal que: $R_1 = d_{OC} - R = 5 - 3 = 2$.

λ_2 e λ são tangentes interiormente.

Logo, o raio R_2 de λ_2 é tal que $R_2 = d_{OC} + R = 5 + 3 = 8$.

Assim, temos:

$$\lambda_1 \begin{cases} O(2, -2) \\ R_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4; \quad \lambda_2 \begin{cases} O(2, -2) \\ R_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 64.$$

3.1. Intersecção de duas circunferências

Conhecendo-se as equações de duas circunferências:

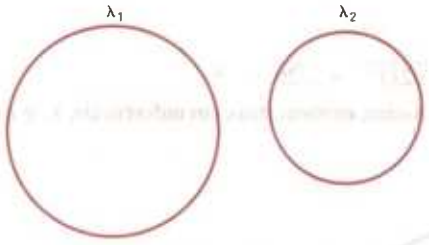
$$\lambda_1: (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = R_1^2 \text{ e } \lambda_2: (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = R_2^2,$$

o conjunto $\lambda_1 \cap \lambda_2$ é o conjunto solução do sistema:

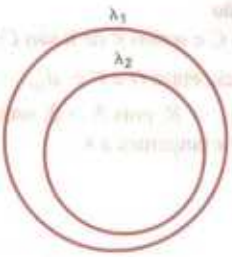
$$\begin{cases} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = R_1^2 \\ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = R_2^2. \end{cases}$$

Esse sistema:

- é impossível se, e somente se, λ_1 e λ_2 são exteriores ou uma delas for interior à outra;

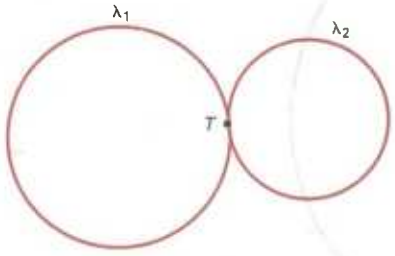


$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \varnothing$.

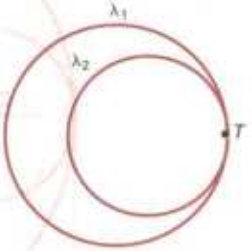


$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \varnothing$.

- tem uma única solução se, e somente se, λ_1 e λ_2 são tangentes;

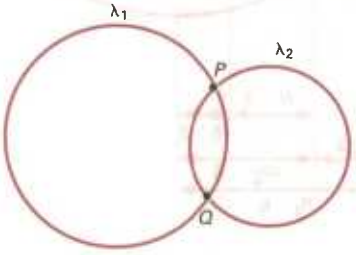


$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{T\}$.



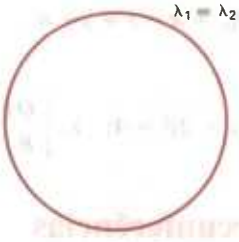
$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{T\}$.

- tem exatamente duas soluções se, e somente se, λ_1 e λ_2 são secantes.



$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{P, Q\}$.

- tem mais de duas soluções se, e somente se, λ_1 e λ_2 coincidem.



$\lambda_1 \cap \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_2$.

Exercícios resolvidos

R.19 Determinar a intersecção das circunferências λ_1: $x^2 + (y - 5)^2 = 20$ e λ_2: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$.

Resolução

O conjunto $\lambda_1 \cap \lambda_2$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} x^2 + (y - 5)^2 = 20 \\ (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10. \end{cases}$

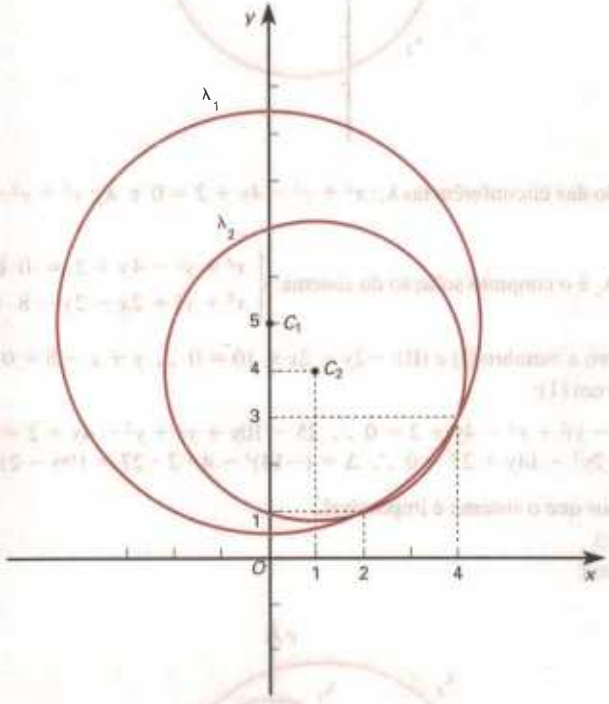
Para resolver esse sistema podemos escrever cada equação na forma normal e subtraí-las, membro a membro, obtendo assim uma equação do 1º grau. Temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10y + 5 = 0 \text{ (I)} \\ x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0. \text{ (II)} \end{cases}$$

Subtraímos membro a membro: $2x - 2y - 2 = 0 \ \therefore \ x - y - 1 = 0 \ \therefore \ x = y + 1$. **(III)**
Substituindo (III) em (I), temos:

$$(y + 1)^2 + y^2 - 10y + 5 = 0 \ \therefore \ y^2 + 2y + 1 + y^2 - 10y + 5 = 0$$
$$\therefore \ 2y^2 - 8y + 6 = 0 \ \therefore \ y^2 - 4y + 3 = 0$$
$$\therefore \ \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \ \therefore \ y = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow y = 3 \text{ ou } y = 1.$$

Substituindo $y = 3$ em (III), obtemos $x = 3 + 1 \ \therefore \ x = 4$.
Substituindo $y = 1$ em (III), obtemos $x = 1 + 1 \ \therefore \ x = 2$.
Logo, $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{(4, 3), (2, 1)\}$.
Graficamente, temos:



R.20 Determinar a intersecção das circunferências λ_1: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$ e λ_2: $(x - 1)^2 + y^2 = 8$.

Resolução

O conjunto $\lambda_1 \cap \lambda_2$ é o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0 \text{ (I)} \\ x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0. \text{ (II)} \end{cases}$$

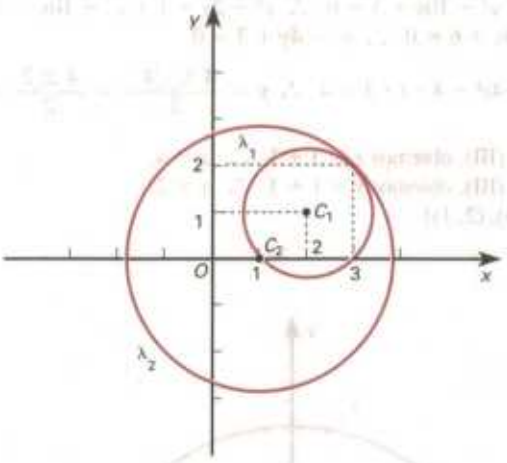
Subtraímos membro a membro (I) e (II): $-2x - 2y + 10 = 0 \ \therefore \ x + y - 5 = 0 \ \therefore \ y = 5 - x$. **(III)**

Substituímos (III) em (II):

$x^2 + (5 - x)^2 - 2x - 7 = 0 \therefore x^2 + 25 - 10x + x^2 - 2x - 7 = 0$

$\therefore 2x^2 - 12x + 18 = 0 \therefore x^2 - 6x + 9 = 0 \therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0 \therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = 3.$

Substituindo $x = 3$ em (III), obtemos $y = 5 - 3 \therefore y = 2$.
Logo, $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{(3, 2)\}$.
Graficamente, temos:



R.21 Obter a intersecção das circunferências λ_1: $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ e λ_2: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0$.

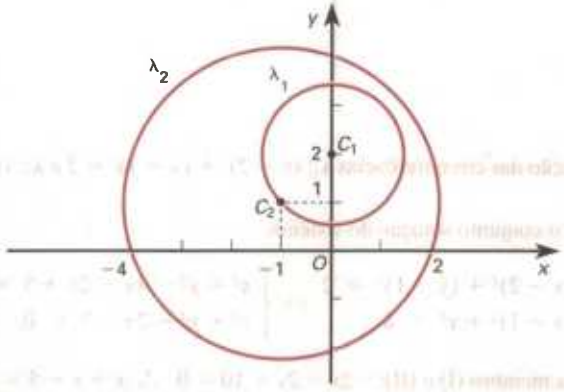
Resolução

O conjunto $\lambda_1 \cap \lambda_2$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0. & \text{(II)} \end{cases}$

Subtraímos membro a membro (I) e (II): $-2y - 2x + 10 = 0 \therefore y + x - 5 = 0 \therefore x = 5 - y$. **(III)**
Substituímos (III) em (I):

$(5 - y)^2 + y^2 - 4y + 2 = 0 \therefore 25 - 10y + y^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$
$\therefore 2y^2 - 14y + 27 = 0 \therefore \Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27 = 196 - 216 = -20.$

Como $\Delta < 0$, temos que o sistema é impossível.
Logo, $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \varnothing$.
Graficamente, temos:



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c), B.2 (a, b), B.3 (a), B.4 (a, b, c), B.5, B.7, B.9 (a), B.10, B.12, B.14 (a, b), B.15, B.17, B.19, B.21 (a, b, c), B.22, B.24, C.1, C.4, C.6.

Tarefa de casa: exercícios B.1 (d, e, f), B.2 (c, d), B.3 (b), B.4 (d, e, f), B.6, B.8, B.9 (b), B.11, B.13, B.14 (c, d), B.16, B.18, B.20, B.21 (d, e, f), B.23, B.25, B.26, C.2, C.3, C.5, C.7, C.8, C.9, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Qual é a posição do ponto P em relação à circunferência λ, em cada caso?

a) $P(1, 2)$ e $\lambda: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$;
b) $P(1, 5)$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$;
c) $P(4, -2)$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 24 = 0$;
d) $P(3, 4)$ e $\lambda: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$;
e) $P(3, 0)$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$;
f) $P(-1, -4)$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$.

B.2 Dê o gráfico cartesiano de cada uma das seguintes inequações:

a) $(x-3)^2 + (y-5)^2 \leq 4$;
b) $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 > 0$;
c) $x^2 + (y-4)^2 < 9$;
d) $x^2 - 10x + y^2 + 4y + 28 \geq 0$.

B.3 Represente no plano cartesiano as soluções de cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 > 0. \end{cases}$

B.4 Dê a posição da reta s em relação à circunferência λ, em cada um dos casos a seguir:

a) $s: x + y - 4 = 0$ e $\lambda: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 2$;
b) $s: 2x + y - 4 = 0$ e $\lambda: (x+5)^2 + (y+1)^2 = 20$;
c) $s: x - 3y + 8 = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$;
d) $s: 3x - 4y + 15 = 0$ e $\lambda: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$;
e) $s: 2x - y + 1 = 0$ e $\lambda: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$;
f) $s: 4x + 3y + 8 = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$.

B.5 A equação $x + 2y + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, representa um feixe de retas paralelas. Obtenha as equações das retas desse feixe que tangenciam a circunferência $\lambda: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

B.6 Quais são as equações das retas do feixe de paralelas: $3x + y + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, que são tangentes à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 35 = 0$?

B.7 Obtenha as equações das retas paralelas à reta $t: 3x + 4y + 1 = 0$ e tangentes à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$.

B.8 Considere a reta $t: x + y - 1 = 0$ e a circunferência $\lambda: (x-4)^2 + (y-1)^2 = 8$. Quais as equações das retas paralelas a t e tangentes a λ?

B.9 Obtenha uma equação de uma reta que passa pelo ponto P e tangencia a circunferência λ em cada um dos seguintes casos:

a) $P(3, 4)$ e $\lambda: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$;
b) $P(1, 2)$ e $\lambda: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$.

B.10 A equação $y = mx + 4$, $m \in \mathbb{R}$, representa infinitas retas do plano cartesiano. Obtenha, dentre essas retas, as equações daquelas que tangenciam a circunferência $\lambda: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$.

B.11 Considere o conjunto A formado por todas as retas cujas equações são da forma $y = mx + 5$, $m \in \mathbb{R}$. Quais são as equações das retas de A que tangenciam a circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$?

B.12 Obtenha as equações das retas do feixe de concorrentes de centro $P(0, 2)$ que tangenciam a circunferência $\lambda: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$.

B.13 Encontre as equações das retas que passam pelo ponto $P(-1, -1)$ e tangenciam a circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 8x + 2y - 3 = 0$.

B.14 Determine a intersecção da reta s com a circunferência λ, nos seguintes casos:
a) $s: x - y - 3 = 0$ e $\lambda: (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 20$;
b) $s: x - 2y + 1 = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$;
c) $s: y = 2x + 1$ e $\lambda: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$;
d) $s: 3x - y = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$.

B.15 Obtenha a intersecção da circunferência $\lambda: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$ com o eixo das abscissas.

B.16 Determine a intersecção da circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 10x - 2y + 22 = 0$ com o eixo das ordenadas.

B.17 Calcule o comprimento da corda que a reta $s: x + y - 4 = 0$ determina na circunferência $\lambda: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

B.18 Qual é o comprimento da corda que a reta $s: x + 2y - 6 = 0$ determina na circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$?

B.19 Sejam a reta $s: y = x$ e a circunferência $\lambda: (x - 4)^2 + y^2 = 10$.

a) Determine $s \cap \lambda$. b) Represente no plano cartesiano o seguinte sistema: $\begin{cases} y \leqslant x \\ (x - 4)^2 + y^2 < 10. \end{cases}$

B.20 Dê o gráfico cartesiano que representa as soluções do seguinte sistema: $\begin{cases} x - y + 4 > 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 8 \leqslant 0. \end{cases}$

B.21 Determine a posição relativa entre as circunferências λ_1 e λ_2 nos seguintes casos:
a) $\lambda_1: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ e $\lambda_2: (x - 9)^2 + (y - 8)^2 = 4$;
b) $\lambda_1: (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ e $\lambda_2: (x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 16$;
c) $\lambda_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$ e $\lambda_2: (x - 7)^2 + (y - 8)^2 = 32$;
d) $\lambda_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ e $\lambda_2: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{1}{4}$;
e) $\lambda_1: x^2 + y^2 - 6y - 56 = 0$ e $\lambda_2: (x - 5)^2 + (y + 9)^2 = 49$;
f) $\lambda_1: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$ e $\lambda_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$.

B.22 Obtenha as equações das circunferências concêntricas de centro $O(0, 3)$ e tangentes à circunferência $\lambda: (x - 5)^2 + (y + 9)^2 = 100$.

B.23 Encontre as equações das circunferências concêntricas de centro $O(0, 0)$ que tangenciam a circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$.

B.24 Determine a intersecção das circunferências: $\lambda_1: x^2 + (y - 2)^2 = 5$ e $\lambda_2: (x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 20$.

B.25 Encontre a intersecção das circunferências: $\lambda_1: x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ e $\lambda_2: (x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 50$.

B.26 Obtenha a intersecção das circunferências: $\lambda_1: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ e $\lambda_2: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

Exercícios complementares

C.1 Determine o ponto da circunferência $\lambda: (x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 2$ mais próximo do ponto $P(10, -6)$.

C.2 Obtenha o ponto da circunferência $\lambda: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ mais distante da reta $s: x + 2y + 5 = 0$.

C.3 Represente no plano cartesiano o sistema $\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 \leqslant 9 \\ y \geqslant -x + 3 \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

C.4 Represente no plano cartesiano a inequação $x^2 + y^2 - 6|x| < 0$.

C.5 Represente no plano cartesiano a inequação $(x^2 + y^2 - 6x)(x^2 + y^2 - 4y) \geqslant 0$.

C.6 Para que valores reais de m a reta $s: 3x + 4y + m = 0$ é secante à circunferência $\lambda: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$?

C.7 Obtenha uma equação da circunferência tangente às retas s: $4x + 3y - 9 = 0$ e t: $4x - 3y - 7 = 0$, cujo centro pertence à reta u: $x - y + 2 = 0$.

C.8 Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são os pontos $A(0, 0)$, $B(0, 6)$ e $C(8, 0)$.

C.9 Para que valores reais positivos de R a intersecção das circunferências: λ_1: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = R^2$ e λ_2: $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$ é um conjunto não-vazio?

C.10 Para que valor real de k as circunferências λ_1: $x^2 + (y - k)^2 = 5$ e λ_2: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 20$ são secantes?

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem) A área do disco determinado pela inequação $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 \leq 0$ é:

a) 5π. b) 8π. c) 10π. d) 25π. e) 64π.

V.2 (PUC/Campinas-SP) Considere a circunferência dada por $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$ e as retas de equação $y = x + k = 0$. Uma dessas retas é tangente à circunferência se o valor de k for:

a) $3\sqrt{2}$. b) 3. c) -3. d) $-2\sqrt{3}$. e) $-4\sqrt{3}$.

V.3 (U. Católica de Salvador-BA) A circunferência λ tem equação $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$. A reta t é tangente a λ no ponto $(1, 0)$. A equação de t é:

a) $x = 1$. b) $y = 1$. c) $x + y = 1$. d) $3x - y = 2$. e) $-x - y = 1$.

V.4 (Fesp-PE) A equação da circunferência concêntrica com a circunferência λ: $x^2 + y^2 - 8x + 12y = 0$ e tangente à reta r: $5x + 12y = 0$ é:

a) $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 9$.
b) $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 16$.
c) $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 16$.
d) $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 9$.
e) $2x^2 + y^2 - 8x + 6y - 12 = 0$.

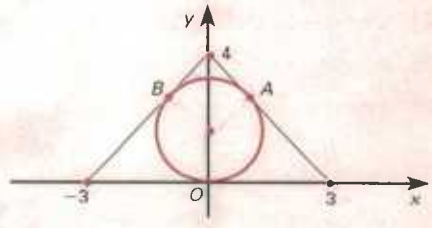
V.5 (UFRS) O eixo das abscissas determina na circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$ uma corda de comprimento:

a) $2\sqrt{5}$. b) 5. c) 6. d) 7. e) 8.

V.6 (Fuvest-SP) Existem dois valores de m para os quais tem solução única o sistema $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$ A soma desses dois valores de m é:

a) -2. b) $-2\sqrt{2}$. c) 0. d) 2. e) $2\sqrt{2}$.

V.7 (Mackenzie-SP) Na figura, a circunferência está inscrita no triângulo e o tangencia nos pontos O, A e B. A equação da circunferência é:



a) $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

b) $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4}$.

c) $x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

d) $x^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{9}$.

e) $x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$.

V.8 (Unicamp-SP) Considere as circunferências de equações cartesianas $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.

a) As circunferências são tangentes, interiormente.
b) Elas são tangentes, exteriormente.
c) Elas se interceptam em dois pontos.
d) Elas são exteriores.
e) Um dos pontos onde elas se interceptam tem abscissa igual a 1,5 vez a ordenada.

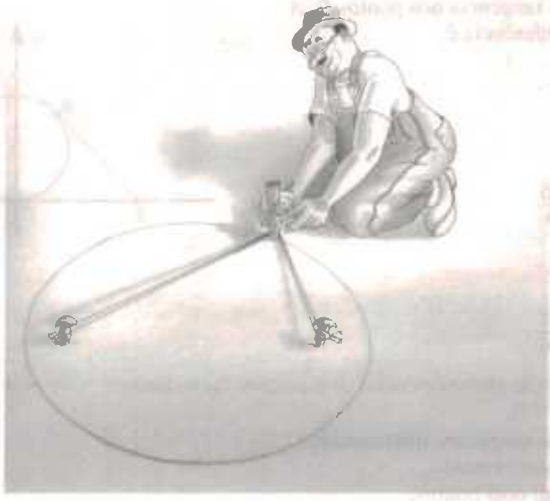
Capítulo 11
A elipse

1. Introdução

A praça da igreja matriz era o ponto de encontro com os amigos, em minha adolescência. Foi ali que aprendi a construir uma elipse.

O jardineiro, senhor Dorival, cuidava do jardim da praça com entusiasmo e competência. Certo dia, enquanto esperava por meus companheiros, vi o jardineiro Dorival fincar duas estacas no terreno e amarrar nelas as extremidades de uma corda maior do que a distância entre as estacas.

A seguir, desenhou uma linha no solo com o auxílio de um graveto apoiado na corda, mantendo-a o mais esticada possível.

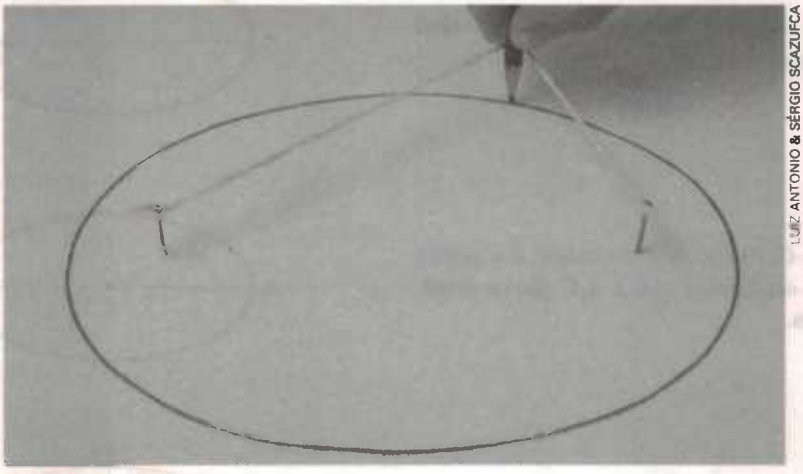


Essa curva, que o senhor Dorival construiu com tanta perfeição, é o objeto de nosso estudo neste capítulo.

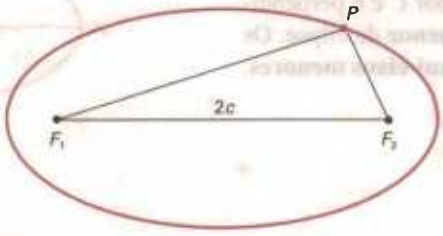
2. Definição de elipse

Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano α, tal que $F_1F_2 = 2c$, $c > 0$, chama-se **elipse** o conjunto dos pontos P de α cuja soma das distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante $2a$, $2a > 2c$:

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$



LUIZ ANTONIO & SÉRGIO SCAZUFCA

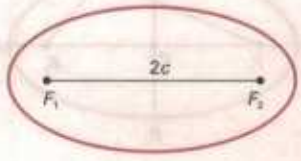


$PF_1 + PF_2 = 2a$, $2a > 2c > 0$

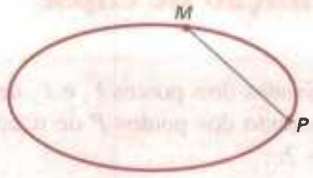
2.1. Elementos da elipse

- Os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse.

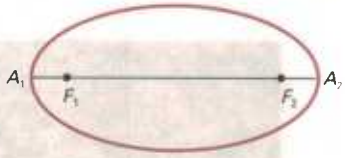
- A distância $2c$, $c > 0$, entre os focos é a **distância focal** da elipse. A medida c é a **semidistância focal**.



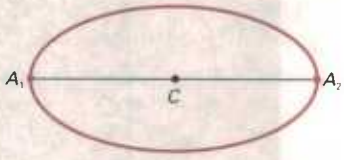
• Qualquer segmento $\overline{MP}$, onde M e P são pontos da elipse, é uma **corda da elipse**.



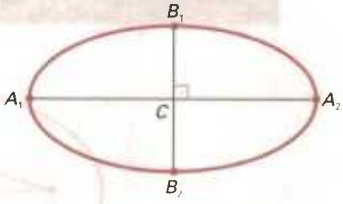
• A corda $\overline{A_1A_2}$ que passa pelos focos é o **eixo maior** da elipse.



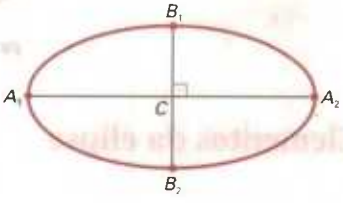
• O ponto C, médio do eixo maior, é o centro da elipse. Os segmentos $\overline{A_1C}$ e $\overline{A_2C}$ são os **semi-eixos maiores**.



• A corda $\overline{B_1B_2}$, que passa por C e é perpendicular ao eixo maior, é o **eixo menor** da elipse. Os segmentos $\overline{B_1C}$ e $\overline{B_2C}$ são os **semi-eixos menores**.

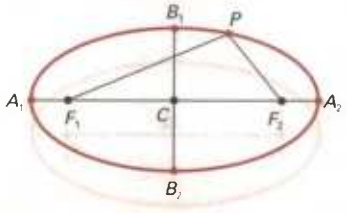


• Os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 são os **vértices** da elipse.



2.2. Propriedades da elipse

Consideremos a elipse $\mathscr{E}$:



- $PF_1 + PF_2 = 2a$;
- $F_1F_2 = 2c$, $2a > 2c > 0$.

P.1 A medida do eixo maior $\overline{A_1A_2}$ é $2a$.

De fato, temos que:

$$A_1 \in \mathscr{E} \Rightarrow A_1F_1 + A_1F_2 = 2a \therefore A_1F_1 + \underbrace{A_1F_1 + F_1F_2}_{A_1F_2} = 2a \text{ (I)}$$

e

$$A_2 \in \mathscr{E} \Rightarrow A_2F_1 + A_2F_2 = 2a \therefore \underbrace{A_2F_2 + F_2F_1}_{A_2F_1} + A_2F_2 = 2a. \text{ (II)}$$

Subtraímos (I) e (II), membro a membro: $2A_1F_1 - 2A_2F_2 = 0 \Rightarrow A_1F_1 = A_2F_2$. **(III)**
Substituindo (III) em (II), obtemos: $\underbrace{A_2F_2 + F_2F_1 + A_1F_1}_{A_1A_2} = 2a \Rightarrow A_1A_2 = 2a$.

P.2 O centro C é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

De fato, por definição, C é ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, isto é:

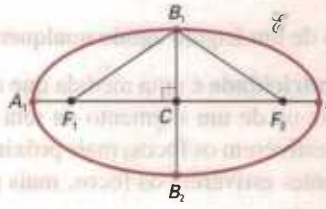
$$A_1C = A_2C \Rightarrow A_1F_1 + F_1C = A_2F_2 + F_2C. \text{ (I)}$$

Provamos na P.1 que: $A_1F_1 = A_2F_2$. **(II)**
Substituindo (II) em (I), obtemos: $\cancel{A_1F_1} + F_1C = \cancel{A_1F_1} + F_2C \Rightarrow F_1C = F_2C$.
Logo, C é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

P.3 $B_1F_1 = B_1F_2 = a$.

De fato, $\triangle B_1F_1C \cong \triangle B_1F_2C$ pelo caso LAL, pois:

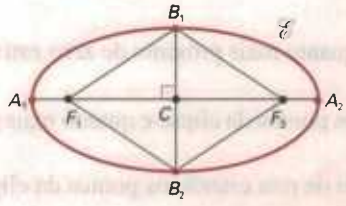
- $\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}$ (C é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$);
- $B_1\hat{C}F_1 \cong B_1\hat{C}F_2$ (ambos são retos);
- $\overline{B_1C}$ é lado comum aos dois triângulos.



Por essa congruência, concluímos que: $B_1F_1 = B_1F_2$. **(I)**
Temos ainda que: $B_1 \in \mathscr{E} \Rightarrow B_1F_1 + B_2F_2 = 2a$. **(II)**
Substituindo (I) em (II), obtemos: $B_1F_1 + B_1F_1 = 2a \Rightarrow 2B_1F_1 = 2a \therefore B_1F_1 = a$.
Logo, $B_1F_1 = B_1F_2 = a$.
Analogamente, prova-se que $B_2F_1 = B_2F_2 = a$.

P.4 C é o ponto médio de $\overline{B_1B_2}$.

De fato, o quadrilátero $B_1F_1B_2F_2$ é um losango, pois provamos, na propriedade P.3, que $B_1F_1 = B_1F_2 = B_2F_1 = B_2F_2$. Como as diagonais do losango se cruzam perpendicularmente no ponto médio de cada uma, temos que C é ponto médio de $\overline{B_1B_2}$.



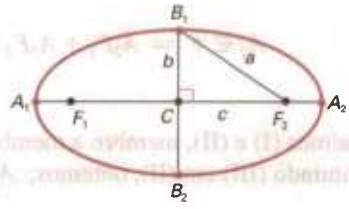
P.5

Sendo: $2c$ a distância focal ($F_1F_2 = 2c$), $2a$ a medida do eixo maior ($A_1A_2 = 2a$) e $2b$ a medida do eixo menor ($B_1B_2 = 2b$), temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

De fato, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo B_1CF_2, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

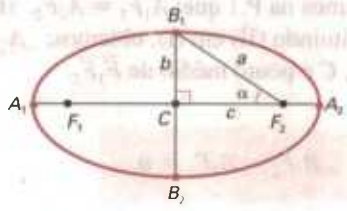


P.6

O número $e = \frac{c}{a}$, denominado "**excentricidade** da elipse", é tal que $0 < e < 1$.

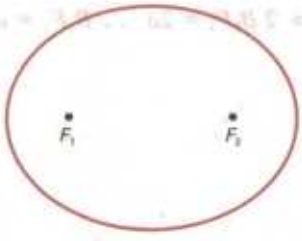
De fato, o número $e = \frac{c}{a}$ é o co-seno do ângulo $B_1\hat{F}_2C$ de medida α, $0° < \alpha < 90°$:

$$e = \cos \alpha = \frac{c}{a}.$$



O co-seno de um ângulo agudo qualquer é maior do que zero e menor do que 1; logo, $0 < e < 1$.

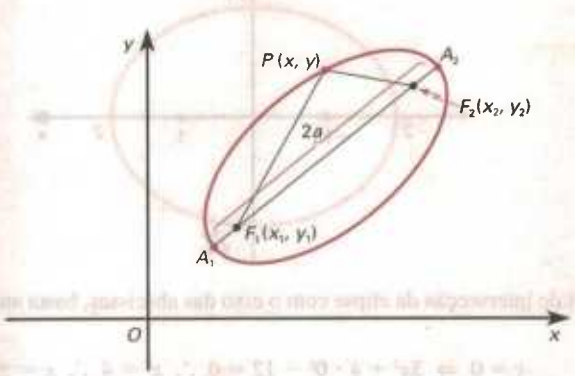
A **excentricidade** é uma medida que mostra o quanto os pontos da elipse estão próximos de uma circunferência ou de um segmento de reta. Fixada a medida $2a$ do eixo maior, tem-se que: quanto mais próximos estiverem os focos, mais próximos de uma circunferência estarão os pontos da elipse e, quanto mais distantes estiverem os focos, mais próximos de um segmento de reta estarão os pontos da elipse. Observe:



Assim, quanto mais próximo de zero estiver o número $e = \frac{c}{a}$, mais próximos de uma circunferência estarão os pontos da elipse e quanto mais próximo de 1 estiver o número $e = \frac{c}{a}$, mais próximos de um segmento de reta estarão os pontos da elipse.

3. Equação da elipse

Sejam $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$ os focos de uma elipse e $2a$ a medida de seu eixo maior.



Obtemos uma equação dessa elipse considerando-se um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que:

$$PF_1 + PF_2 = 2a,$$

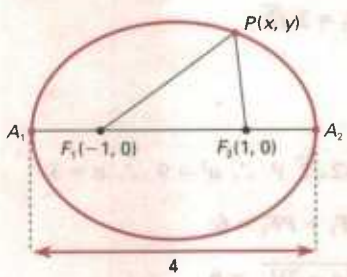
ou seja:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2a.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Obter uma equação da elipse de focos $F_1(-1, 0)$ e $F_2(1, 0)$, cujo eixo maior mede 4 unidades.

Resolução



Obtém-se uma equação da elipse considerando um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que $PF_1 + PF_2 = 4$, ou seja:

$$\sqrt{(x - (-1))^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 0)^2} = 4$$

$$\therefore \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 4$$

$$\therefore \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$$\left(\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\therefore (x + 1)^2 + \cancel{y^2} = 16 - 8\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + (x - 1)^2 + \cancel{y^2}$$

$$\therefore \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} = 16 - 8\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1}$$

$$\therefore 8\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 16 - 4x \quad \therefore 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 4 - x.$$

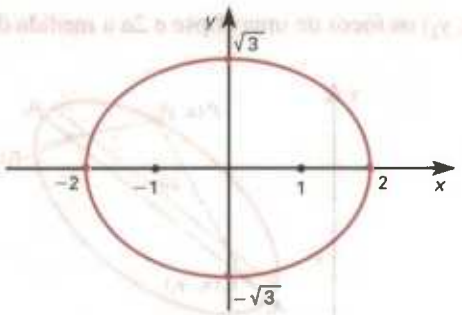
Quadrando ambos os membros, obtemos:

$$\left(2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}\right)^2 = (4 - x)^2 \Rightarrow 4[(x - 1)^2 + y^2] = (4 - x)^2$$

$$\therefore 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = 16 - 8x + x^2 \quad \therefore 4x^2 - \cancel{8x} + 4 + 4y^2 - 16 + \cancel{8x} - x^2 = 0$$

$$\therefore 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0.$$

Graficamente, temos:



Para obter os pontos de intersecção da elipse com o eixo das abscissas, basta atribuir o valor zero à variável y da equação:

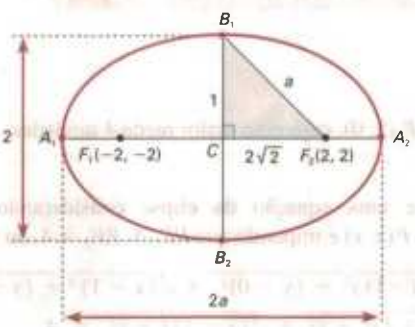
$$y = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4 \cdot 0^2 - 12 = 0 \therefore x^2 = 4 \therefore x = \pm 2.$$

Para obter os pontos de intersecção com o eixo das ordenadas, basta atribuir o valor zero à variável x da equação:

$$x = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 + 4y^2 - 12 = 0 \therefore y = \pm \sqrt{3}.$$

R.2 Encontrar uma equação da elipse de focos $F_1(-2, -2)$ e $F_2(2, 2)$, cujo eixo menor mede 2 unidades.

Resolução



Calculamos a distância focal:

$$F_1F_2 = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (2 - (-2))^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore CF_2 = 2\sqrt{2}.$$

Aplicando Pitágoras no triângulo B_1CF_2, temos: $a^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2 \therefore a^2 = 9 \therefore a = 3$.
Logo, o eixo maior da elipse mede 6 unidades.
Consideramos um ponto genérico $P(x, y)$ e impomos que $PF_1 + PF_2 = 6$:

$$\sqrt{(x - (-2))^2 + (y - (-2))^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} = 6$$

$$\therefore \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 2)^2} = 6 - \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2}$$

$$\therefore \left(\sqrt{(x + 2)^2 + (y + 2)^2}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2}\right)^2$$

$$\therefore (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 36 - 12\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} + (x - 2)^2 + (y - 2)^2$$

$$\therefore \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4} = 36 - 12\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} +$$

$$+ \cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4}$$

$$\therefore 12\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} = 36 - 8x - 8y \therefore 3\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2} = 9 - 2x - 2y$$

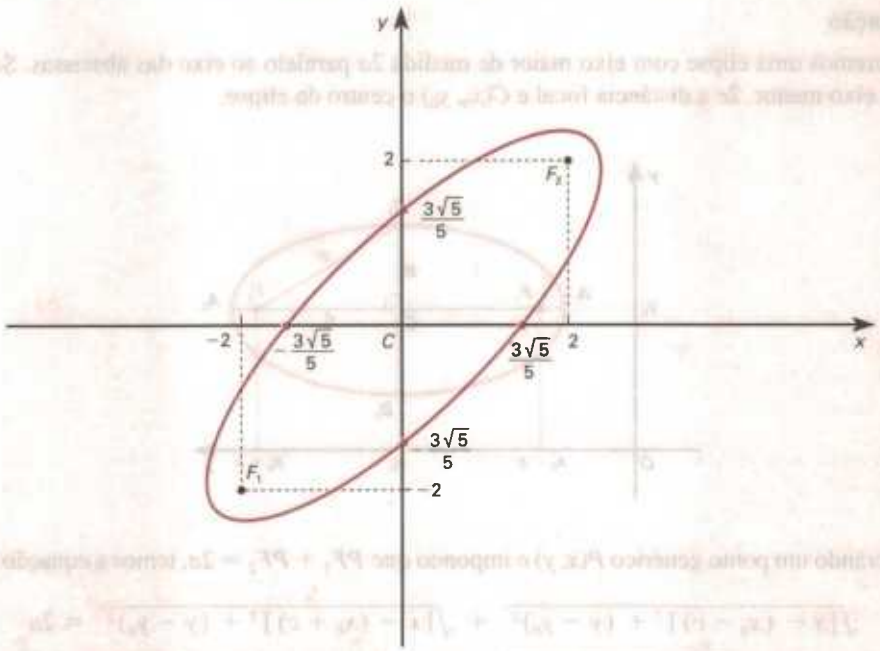
$$\therefore \left(3\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 2)^2}\right)^2 = (9 - 2x - 2y)^2 \therefore 9[(x - 2)^2 + (y - 2)^2] = (9 - 2x - 2y)^2$$

$$\therefore 9(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4) = 81 - 36x - 36y + 8xy + 4x^2 + 4y^2$$

$$\therefore 9x^2 - \cancel{36x} + 36 + 9y^2 - \cancel{36y} + 36 = 81 - \cancel{36x} - \cancel{36y} + 8xy + 4x^2 + 4y^2$$

$$\therefore 5x^2 + 5y^2 - 8xy - 9 = 0.$$

Graficamente, temos:



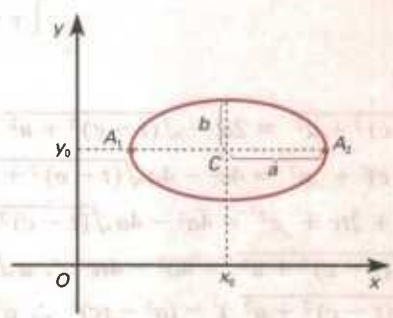
3.1. Equação reduzida de uma elipse

Se uma elipse de centro $C(x_0, y_0)$, com eixo maior de medida $2a$ e eixo menor de medida $2b$ tem:

• o eixo maior paralelo ao eixo das abscissas, então sua equação pode ser apresentada sob a forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

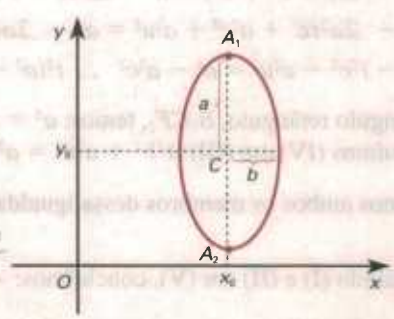
Primeiro caso



• o eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas, então sua equação pode ser apresentada sob a forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1.$$

Segundo caso

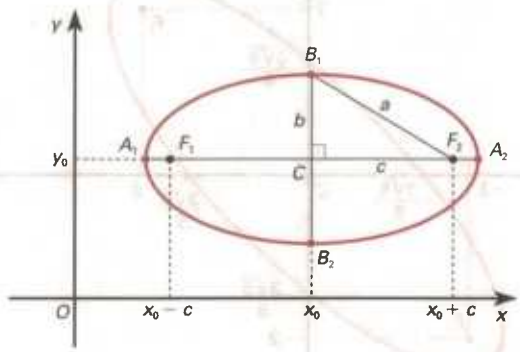


Essas duas equações são denominadas "**equações reduzidas** das elipses".

Vamos demonstrar o primeiro caso e deixar o segundo para você fazer como exercício.

Demonstração

Consideremos uma elipse com eixo maior de medida $2a$ paralelo ao eixo das abscissas. Sejam $2b$ a medida do eixo menor, $2c$ a distância focal e $C(x_0, y_0)$ o centro da elipse.



Considerando um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que $PF_1 + PF_2 = 2a$, temos a equação da elipse:

$$\sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x - x_0 + c)^2 + (y - y_0)^2} = 2a - \sqrt{(x - x_0 - c)^2 + (y - y_0)^2}\ .$$

Para facilitar os cálculos, façamos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x - x_0 = t & \text{(I)} \\ y - y_0 = u. & \text{(II)} \end{cases}$$

Temos:

$$\sqrt{(t + c)^2 + u^2} = 2a - \sqrt{(t - c)^2 + u^2} \quad \therefore \left(\sqrt{(t + c)^2 + u^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(t - c)^2 + u^2}\right)^2$$

$$\therefore (t + c)^2 + \cancel{u^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(t - c)^2 + u^2} + (t - c)^2 + \cancel{u^2}$$

$$\therefore \cancel{t^2} + 2tc + \cancel{c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(t - c)^2 + u^2} + \cancel{t^2} - 2tc + \cancel{c^2}$$

$$\therefore 4a\sqrt{(t - c)^2 + u^2} = 4a^2 - 4tc \quad \therefore a\sqrt{(t - c)^2 + u^2} = a^2 - tc$$

$$\therefore \left(a\sqrt{(t - c)^2 + u^2}\right)^2 = (a^2 - tc)^2 \quad \therefore a^2[(t - c)^2 + u^2] = (a^2 - tc)^2$$

$$\therefore a^2(t^2 - 2tc + c^2 + u^2) = a^4 - 2a^2tc + t^2c^2$$

$$\therefore a^2t^2 - \cancel{2a^2tc} + a^2c^2 + a^2u^2 = a^4 - \cancel{2a^2tc} + t^2c^2$$

$$\therefore a^2t^2 - t^2c^2 + a^2u^2 = a^4 - a^2c^2 \quad \therefore t^2(a^2 - c^2) + a^2u^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad \text{(III)}$$

No triângulo retângulo, B_1CF_2, temos: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2$. **(IV)**
Substituímos (IV) em (III): $t^2b^2 + a^2u^2 = a^2b^2$.

Dividimos ambos os membros dessa igualdade por a^2b^2: $\dfrac{t^2}{a^2} + \dfrac{u^2}{b^2} = 1$. **(V)**

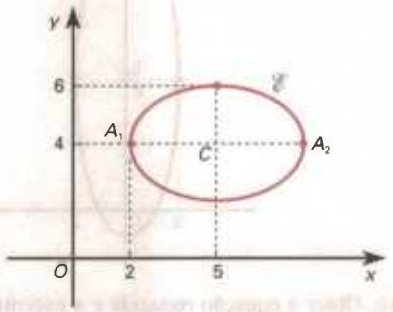
Substituindo (I) e (II) em (V), concluímos: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$

(c.q.d.)

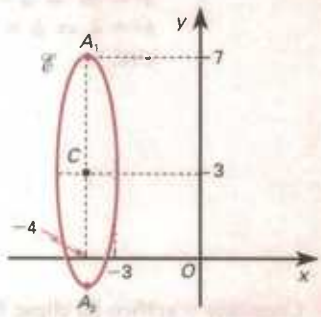
Exercícios resolvidos

R.3 Obter a equação reduzida da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

a)



b)



Resolução

a) Temos, pelo gráfico, que:

- o centro da elipse é o ponto $C(5, 4)$;
- a medida do semi-eixo maior (metade do eixo maior) é $a = 5 - 2 = 3$;
- a medida do semi-eixo menor é $b = 6 - 4 = 2$;
- o eixo maior é paralelo ao eixo das abscissas.

Logo, a equação da elipse é dada por: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, em que $x_0 = 5$, $y_0 = 4$, $a = 3$ e $b = 2$, ou seja, $\frac{(x - 5)^2}{9} + \frac{(y - 4)^2}{4} = 1$.

b) Temos, pelo gráfico, que:

- o centro da elipse é o ponto $C(-4, 3)$;
- a medida do semi-eixo maior é $a = 7 - 3 = 4$;
- a medida do semi-eixo menor é $b = -3 - (-4) = 1$;
- o eixo maior é paralelo ao eixo das ordenadas.

Logo, a equação da elipse é dada por: $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$, em que $x_0 = -4$, $y_0 = 3$, $b = 1$ e $a = 4$, ou seja, $\frac{(x + 4)^2}{1} + \frac{(y - 3)^2}{16} = 1$.

R.4 Esboçar o gráfico da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

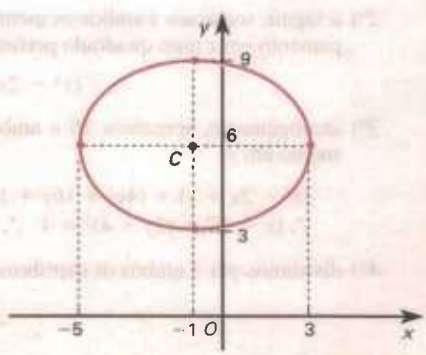
a) $\mathscr{E}$: $\frac{(x + 1)^2}{16} + \frac{(y - 6)^2}{9} = 1$;

b) $\mathscr{E}$: $\frac{x^2}{4} + \frac{(y - 5)^2}{36} = 1$.

Resolução

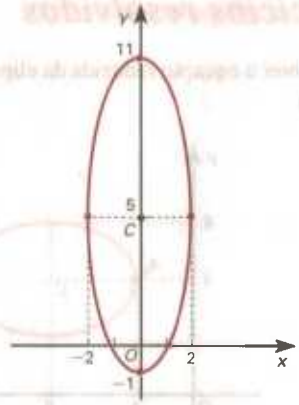
a) Como o **maior denominador** é o da fração que contém a variável x, concluímos que o **eixo maior** é paralelo ao eixo das abscissas. Temos:

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$;
$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$;
$C(-1, 6)$.

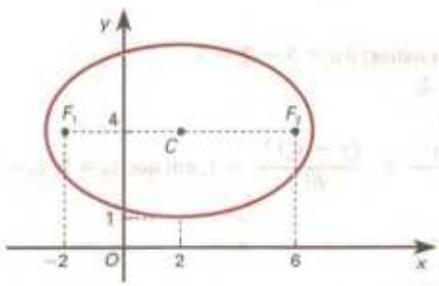


b) Como o **maior denominador** é o da fração que contém a variável y, concluímos que o **eixo maior** é paralelo ao eixo das ordenadas. Temos:

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$;
$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$;
$C(0, 5)$.



R.5 Considere o gráfico da elipse $\mathscr{E}$ representado abaixo. Obter a equação reduzida e a excentricidade dessa elipse.



Resolução

- O centro da elipse é o ponto C médio do segmento $\overline{F_1F_2}$: $C\left(\frac{-2+6}{2}, 4\right) = C(2, 4)$.
- A medida do semi-eixo menor é $b = 4 - 1 = 3$.
- A semidistância focal é $c = \frac{6-(-2)}{2} = 4$.
- A medida a do semi-eixo maior é dada por:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 \therefore a = 5.$$

Como o eixo maior é paralelo ao eixo das abscissas, temos que a equação reduzida da elipse é:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$$

A excentricidade dessa elipse é: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

R.6 Uma elipse $\mathscr{E}$ tem como equação $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$. Escrever essa equação sob a forma reduzida.

Resolução

Para obter a equação reduzida, adotamos os seguintes procedimentos:

1º) agrupamos os termos em x, os termos em y e isolamos o termo independente da equação:

$$(x^2 - 2x) + (4y^2 + 16y) = -13;$$

2º) a seguir, somamos a ambos os membros da equação o número 1, com o objetivo de transformar o agrupamento em x num quadrado perfeito:

$$(x^2 - 2x + 1) + (4y^2 + 16y) = -13 + 1;$$

3º) analogamente, somamos 16 a ambos os membros para transformar em quadrado perfeito o agrupamento em y:

$$(x^2 - 2x + 1) + (4y^2 + 16y + 16) = -13 + 1 + 16$$
$$\therefore (x-1)^2 + (2y+4)^2 = 4 \quad \therefore (x-1)^2 + [2(y+2)]^2 = 4 \quad \therefore (x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 4;$$

4º) dividimos por 4 ambos os membros dessa equação, obtendo a forma reduzida:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + (y+2)^2 = 1.$$

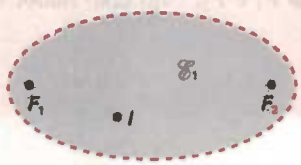
4. Posições relativas entre ponto e elipse

4.1. Interior e exterior de uma elipse

Uma elipse $\mathscr{E}$ de focos F_1 e F_2 separa o plano α, que a contém, em duas regiões $\mathscr{E}_1$ e $\mathscr{E}_2$, tais que:

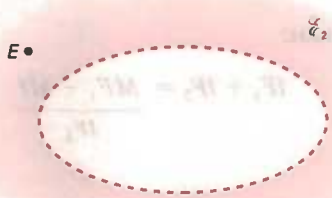
- $\mathscr{E} \cup \mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2 = \alpha$;
- $\mathscr{E} \cap (\mathscr{E}_1 \cup \mathscr{E}_2) = \varnothing$;
- $\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2 = \varnothing$;
- $\{F_1, F_2\} \subset \mathscr{E}_1$.

O conjunto $\mathscr{E}_1$ é denominado **interior** da elipse. Um ponto I é **interior** à elipse se, e somente se, $I \in \mathscr{E}_1$



I é interior à elipse.

O conjunto $\mathscr{E}_2$ é denominado **exterior** da elipse. Um ponto E é **exterior** à elipse se, e somente se, $E \in \mathscr{E}_2$



E é exterior à elipse.

Resumindo:

Uma elipse $\mathscr{E}$ e um ponto P, coplanares, têm três posições relativas possíveis:

I. $P \in \mathscr{E}$ ou
II. P é interior a $\mathscr{E}$ ou
III. P é exterior a $\mathscr{E}$.

Propriedade dos pontos pertencentes à elipse

Por definição de elipse:

Sejam $\mathscr{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2, cujo eixo maior mede $2a$, e A um ponto do plano de $\mathscr{E}$. O ponto A pertence à elipse $\mathscr{E}$ se, e somente se:

$$AF_1 + AF_2 = 2a.$$

Portanto, dados a equação $\mathscr{E}(x, y) = 0$ de uma elipse $\mathscr{E}$ e um ponto $A(x_A, y_A)$, temos que:

$$A \in \mathscr{E} \Rightarrow \mathscr{E}(x_A, y_A) = 0.$$

Exercício resolvido

R.7 Qual é a posição do ponto $A(2, 4)$ em relação à elipse $\mathscr{E}$: $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$?

Resolução

Substituindo as variáveis x e y da equação por 2 e 4, respectivamente, temos que a sentença:

$\frac{(2-2)^2}{25} + \frac{(4-1)^2}{9} = 1$ é verdadeira. Logo, $A \in \mathscr{E}$.

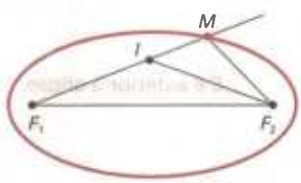
Propriedade dos pontos interiores à elipse

Se I é um ponto **interior** a uma elipse $\mathscr{E}$ de focos F_1 e F_2, cujo eixo maior mede $2a$, então:

$$IF_1 + IF_2 < 2a.$$

Demonstração

O caso em que I pertence ao eixo maior é imediato. Suponhamos então que I não pertença a esse eixo. Consideremos a semi-reta de origem F_1, passando por I, que intercepta a elipse $\mathscr{E}$ em M.



Temos:

$$IF_1 + IF_2 = \underbrace{MF_1 - MI}_{IF_1} + IF_2. \quad \text{(I)}$$

No triângulo IMF_2, temos: $IF_2 < MI + MF_2$. (II)

De (I) e (II), obtemos:

$$IF_1 + IF_2 = \underbrace{MF_1 - MI}_{IF_1} + IF_2 < \underbrace{MF_1 - \cancel{MI}}_{IF_1} + \cancel{MI} + MF_2 \therefore IF_1 + IF_2 < MF_1 + MF_2.$$

Como $M \in \mathscr{E}$, temos que $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Logo, $IF_1 + IF_2 < 2a$.

(c.q.d.)

A recíproca do teorema anterior também é verdadeira. Por isso, podemos enunciar:

Sejam $\mathscr{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2, cujo eixo maior mede $2a$, e I um ponto do plano de $\mathscr{E}$. O ponto I é interior à elipse $\mathscr{E}$ se, e somente se:

$$IF_1 + IF_2 < 2a.$$

Uma conseqüência dessa propriedade é que, se quisermos a inequação dos pontos $I(x, y)$ interiores à elipse de focos $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$, cujo eixo maior mede $2a$, basta impormos que $IF_1 + IF_2 < 2a$, ou seja: $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} < 2a$. (I)

Se o centro da elipse for o ponto $C(x_0, y_0)$ e o eixo menor tiver medida $2b$, então a inequação (I) se reduz a:

- $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} < 1$, se o eixo maior for paralelo ao eixo das abscissas;
- $\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} < 1$, se o eixo maior for paralelo ao eixo das ordenadas.

Exercícios resolvidos

R.8 Qual é a posição do ponto $P(1, -2)$ em relação à elipse $\mathscr{E}$: $\frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$?

Resolução

Substituindo as variáveis x e y da equação por 1 e -2, respectivamente, temos:

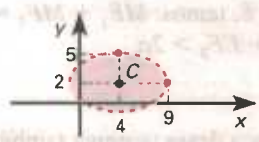
$$\underbrace{\frac{(1 - 1)^2}{2} + \frac{(-2 + 1)^2}{9}}_{\frac{1}{9}} < 1.$$

Logo, P é interior a $\mathscr{E}$.

R.9 Representar no plano cartesiano os pontos $P(x, y)$ tais que: $\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{9} < 1$.

Resolução

Essa inequação representa os pontos $P(x, y)$ interiores à elipse de centro $C(4, 2)$, semi-eixo maior de medida $a = 5$, paralelo ao eixo das abscissas, e semi-eixo menor de medida $b = 3$.

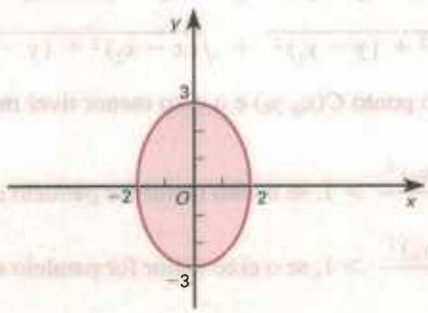


R.10 Representar no plano cartesiano os pontos que satisfazem a inequação: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

Resolução

A elipse $\mathscr{E}$: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ possui centro $C(0, 0)$, semi-eixo maior de medida $a = 3$, paralelo ao eixo das ordenadas, e semi-eixo menor de medida $b = 2$.

A inequação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$ representa os pontos que pertencem a $\mathscr{E}$ ou ao interior de $\mathscr{E}$.



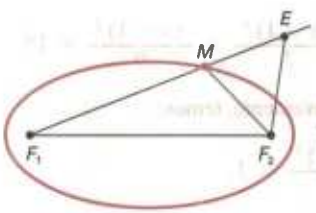
Propriedade dos pontos exteriores à elipse

Se E é um ponto exterior a uma elipse $\mathscr{E}$ de focos F_1 e F_2, cujo eixo maior mede $2a$, então:

$$EF_1 + EF_2 > 2a.$$

Demonstração

O caso em que E pertence à reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ é imediato. Suponhamos então que E não pertença a essa reta. Consideremos a semi-reta de origem F_1, passando por E, que intercepta a elipse $\mathscr{E}$ em M.



Temos:

$$EF_1 + EF_2 = \underbrace{EM + MF_1}_{EF_1} + EF_2. \quad \text{(I)}$$

No triângulo MEF_2, temos: $MF_2 < EM + EF_2 \Rightarrow EM > MF_2 - EF_2$. (II)
De (I) e (II), obtemos:

$$EF_1 + EF_2 = \underbrace{EM + MF_1}_{EF_1} + EF_2 > MF_2 - \cancel{EF_2} + MF_1 + \cancel{EF_2} = MF_1 + MF_2.$$

Como $M \in \mathscr{E}$, temos: $MF_1 + MF_2 = 2a$.
Logo, $EF_1 + EF_2 > 2a$.

(c.q.d.)

A recíproca desse teorema também é verdadeira. Por isso, podemos enunciar:

Sejam $\mathscr{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2, cujo eixo maior mede $2a$, e E um ponto do plano de $\mathscr{E}$. O ponto E é exterior a $\mathscr{E}$ se, e somente se:

$$EF_1 + EF_2 > 2a.$$

Assim, se quisermos a inequação dos pontos $E(x, y)$ exteriores à elipse de focos $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$, cujo eixo maior mede $2a$, basta impor que $EF_1 + EF_2 > 2a$, ou seja:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} > 2a. \quad \text{(I)}$$

Se o centro da elipse for o ponto $C(x_0, y_0)$ e o eixo menor tiver medida $2b$, então a inequação (I) se reduz a:

- $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} > 1$, se o eixo maior for paralelo ao eixo das abscissas;
- $\dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} > 1$, se o eixo maior for paralelo ao eixo das ordenadas.

Exercícios resolvidos

R.11 Qual é a posição do ponto $P(7, 3)$ em relação à elipse $\mathscr{E}$: $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$?

Resolução

Substituindo as variáveis x e y da equação por 7 e 3, respectivamente, temos:

$$\underbrace{\frac{(7-5)^2}{4} + \frac{3^2}{9}}_{2} > 1.$$

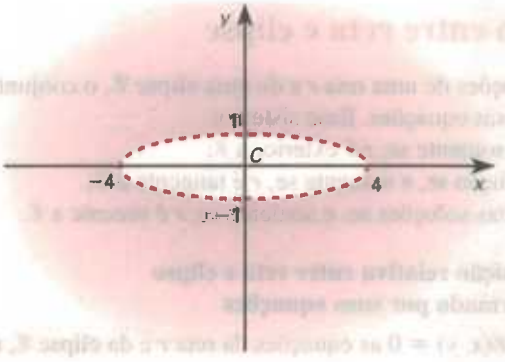
Logo, P é exterior a $\mathscr{E}$.

R.12 Representar no plano cartesiano os pontos $P(x, y)$ tais que: $\frac{x^2}{16} + y^2 > 1$.

Resolução

A elipse $\mathscr{E}$: $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ possui centro $C(0, 0)$, semi-eixo maior de medida $a = 4$, paralelo ao eixo das abscissas, e semi-eixo menor de medida $b = 1$.

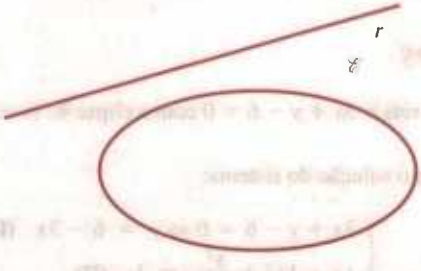
A inequação $\frac{x^2}{16} + y^2 > 1$ representa os pontos exteriores a $\mathscr{E}$.



5. Posições relativas entre reta e elipse

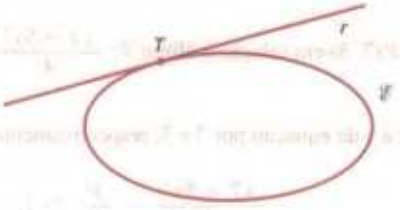
Sendo $\mathscr{E}$ uma elipse e r uma reta, contidas em mesmo plano, temos que:

I. a reta r é exterior à elipse se, e somente se, o conjunto $r \cap \mathscr{E}$ é vazio;



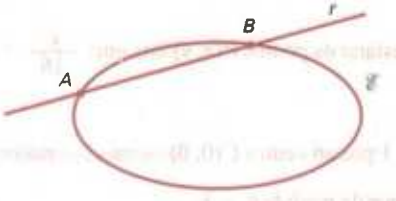
$r \cap \mathscr{E} = \varnothing$.

II. a reta r é tangente à elipse se, e somente se, o conjunto $r \cap \mathscr{E}$ é unitário;



$r \cap \mathscr{E} = \{T\}$.

III. a reta r é secante à elipse se, e somente se, o conjunto $r \cap \mathscr{E}$ é binário.



$r \cap \mathscr{E} = \{A, B\}$.

5.1. Intersecção entre reta e elipse

Conhecendo as equações de uma reta r e de uma elipse $\mathscr{E}$, o conjunto $r \cap \mathscr{E}$ é o conjunto solução do sistema formado por essas equações. Esse sistema:

- é impossível se, e somente se, r é exterior a $\mathscr{E}$;
- tem uma única solução se, e somente se, r é tangente a $\mathscr{E}$;
- tem exatamente duas soluções se, e somente se, r é secante a $\mathscr{E}$.

Conclusão sobre a posição relativa entre reta e elipse a partir do sistema formado por suas equações

Sejam $r(x, y) = 0$ e $\mathscr{E}(x, y) = 0$ as equações da reta r e da elipse $\mathscr{E}$, respectivamente. Para resolver o sistema: $\begin{cases} r(x, y) = 0 \\ \mathscr{E}(x, y) = 0, \end{cases}$ isolamos uma das variáveis na equação da reta r e a substituímos na equação da elipse $\mathscr{E}$. Se com essa substituição é obtida:

- uma equação do 2º grau com **discriminante positivo**, então a reta r é **secante** à elipse $\mathscr{E}$;
- uma equação do 2º grau com **discriminante negativo**, então a reta r é **exterior** à elipse $\mathscr{E}$;
- uma equação do 2º grau com **discriminante nulo**, então a reta r é **tangente** à elipse $\mathscr{E}$.

Exercícios resolvidos

R.13 Determinar a intersecção da reta r: $3x + y - 6 = 0$ com a elipse $\mathscr{E}$: $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{9} = 1$.

Resolução

O conjunto $r \cap \mathscr{E}$ é o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} 3x + y - 6 = 0 \Rightarrow y = 6 - 3x \quad \text{(I)} \\ (x - 1)^2 + \frac{y^2}{9} = 1. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

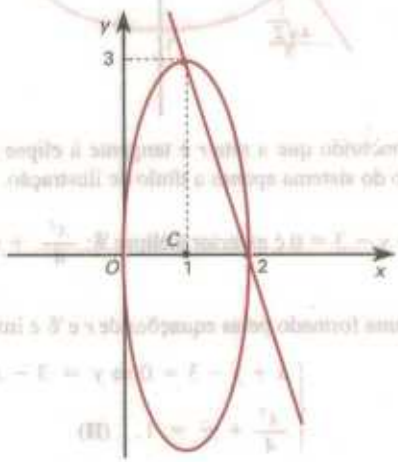
Substituímos (I) em (II):

$$(x-1)^2 + \frac{(6-3x)^2}{9} = 1 \;\therefore\; x^2 - 2x + 1 + \frac{36 - 36x + 9x^2}{9} = 1$$

$$\therefore 9x^2 - 18x + 9 + 36 - 36x + 9x^2 = 9 \;\therefore\; 18x^2 - 54x + 36 = 0 \;\therefore\; x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \;\therefore\; x = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 1.$$

Substituindo $x = 2$ em (I), temos: $y = 6 - 3 \cdot 2 \;\therefore\; y = 0$.
Substituindo $x = 1$ em (I), temos: $y = 6 - 3 \cdot 1 \;\therefore\; y = 3$.
Logo, r é secante a $\mathscr{C}$ e $r \cap \mathscr{C} = \{(2, 0), (1, 3)\}$.
Graficamente, temos:



R.14 Qual é a posição da reta r: $y = \sqrt{2}x + 3$ em relação à elipse $\mathscr{C}$: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$?

Resolução

Podemos obter a posição relativa entre a reta e a elipse através do sistema: $\begin{cases} y = \sqrt{2}x + 3 & \text{(I)} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. & \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

$$\frac{x^2}{4} + (\sqrt{2}x + 3)^2 = 1 \;\therefore\; \frac{x^2}{4} + 2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9 = 1$$

$$\therefore x^2 + 8x^2 + 24\sqrt{2}x + 36 = 4 \;\therefore\; 9x^2 + 24\sqrt{2}x + 32 = 0$$

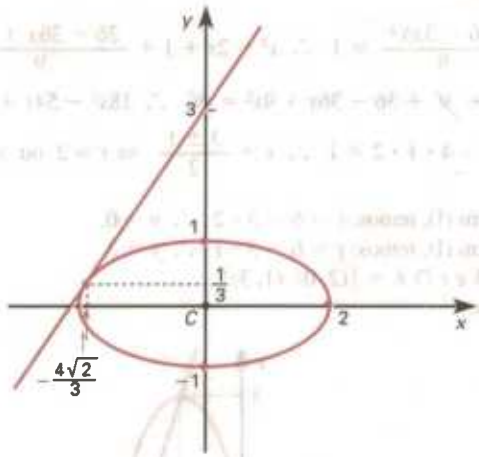
$$\therefore \Delta = (24\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 9 \cdot 32 = 1152 - 1152 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-24\sqrt{2} \pm 0}{18} \;\therefore\; x = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Substituindo $x = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$ em (I), temos: $y = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) + 3 \;\therefore\; y = \frac{1}{3}$.

Logo, a reta r é tangente à elipse $\mathscr{C}$ e $r \cap \mathscr{C} = \left\{\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$.

Graficamente, temos:



Nota: poderíamos ter concluído que a reta r é tangente à elipse no momento em que obtivemos $\Delta = 0$. Continuamos a resolução do sistema apenas a título de ilustração.

R.15 Mostrar que a reta r: $x + y - 3 = 0$ é exterior à elipse $\mathscr{E}$: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Resolução

Basta mostrar que o sistema formado pelas equações de r e $\mathscr{E}$ é impossível:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 - x \quad \textbf{(I)} \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

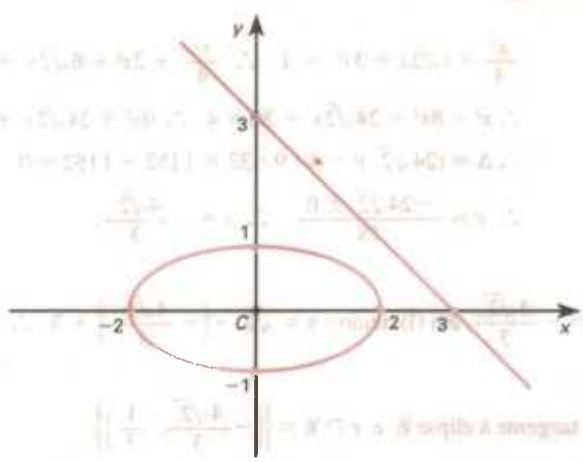
Substituímos (I) em (II):

$$\frac{x^2}{4} + (3 - x)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + 9 - 6x + x^2 = 1$$

$$\therefore x^2 + 36 - 24x + 4x^2 = 4 \quad \therefore 5x^2 - 24x + 32 = 0$$

$$\therefore \Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 32 = 576 - 640 = -64.$$

Como $\Delta < 0$, temos que o sistema é impossível, ou seja, $r \cap \mathscr{E} = \varnothing$. Logo, r é exterior a $\mathscr{E}$.
Graficamente, temos:



R.16 Obter k, $k \in \mathbb{R}$, de modo que a reta r: $-x + 2y + k = 0$ seja tangente à elipse $\mathscr{E}$: $\frac{(y-2)^2}{2} + x^2 = 1$.

Resolução

Consideremos o sistema: $\begin{cases} -x + 2y + k = 0 \Rightarrow x = 2y + k \quad \textbf{(I)} \\ \frac{(y-2)^2}{2} + x^2 = 1. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{(y-2)^2}{2} + (2y+k)^2 = 1 \quad \therefore \quad \frac{y^2 - 4y + 4}{2} + 4y^2 + 4ky + k^2 = 1$$

$$\therefore y^2 - 4y + 4 + 8y^2 + 8ky + 2k^2 = 2 \quad \therefore 9y^2 + (8k-4)y + 2k^2 + 2 = 0. \quad \textbf{(III)}$$

A reta r é tangente à elipse $\mathscr{E}$ se, e somente se, o discriminante da equação (III) é igual a zero, ou seja:

$$\Delta = 0 \quad \therefore (8k-4)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (2k^2+2) = 0$$
$$\therefore 64k^2 - 64k + 16 - 72k^2 - 72 = 0 \quad \therefore -8k^2 - 64k - 56 = 0 \quad \therefore k^2 + 8k + 7 = 0$$
$$\therefore k = \frac{-8 \pm \sqrt{64-28}}{2} \quad \therefore k = \frac{-8 \pm \sqrt{36}}{2} \quad \therefore k = \frac{-8 \pm 6}{2} \quad \therefore k = -1 \text{ ou } k = -7.$$

R.17 Para que valores reais de k a reta r: $x - y + k = 0$ é secante à elipse $\mathscr{E}$: $\frac{(x+3)^2}{5} + y^2 = 1$?

Resolução

Consideremos o sistema: $\begin{cases} x - y + k = 0 \Rightarrow y = x + k \quad \textbf{(I)} \\ \frac{(x+3)^2}{5} + y^2 = 1. \quad \textbf{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\frac{(x+3)^2}{5} + (x+k)^2 = 1 \quad \therefore \quad \frac{x^2 + 6x + 9}{5} + x^2 + 2kx + k^2 = 1$$

$$\therefore x^2 + 6x + 9 + 5x^2 + 10kx + 5k^2 = 5 \quad \therefore 6x^2 + (10k+6)x + 5k^2 + 4 = 0. \quad \textbf{(III)}$$

A reta r é secante à elipse $\mathscr{E}$ se, e somente se, o discriminante da equação (III) é maior que zero, ou seja:

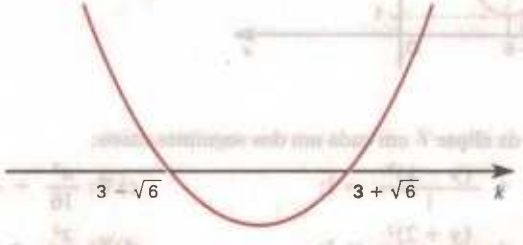
$$\Delta > 0 \quad \therefore (10k+6)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (5k^2+4) > 0 \quad \therefore 100k^2 + 120k + 36 - 120k^2 - 96 > 0$$
$$\therefore -20k^2 + 120k - 60 > 0 \quad \therefore k^2 - 6k + 3 < 0. \quad \textbf{(IV)}$$

Para resolver essa inequação, devemos estudar o sinal da função $f(k) = k^2 - 6k + 3$.

- Raízes de f:

$$k^2 - 6k + 3 = 0 \quad \therefore k = \frac{6 \pm \sqrt{36-12}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 3 \pm \sqrt{6}.$$

- Gráfico de f:



A inequação (IV) exige que $f(k) < 0$; logo, temos: $3 - \sqrt{6} < k < 3 + \sqrt{6}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a), B.3 (a, b), B.4 (a, b), B.5 (a), B.6 (a), B.7 (a, b), B.9 (a, b, c), B.10 (a, b), B.11 (a, b, c), C.2, C.3, C.6, C.7, C.10.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2 (b), B.3 (c, d), B.4 (c, d), B.5 (b), B.6 (b), B.7 (c, d), B.8, B.9 (d, e, f), B.10 (c, d), B.12 (d, e, f), C.1, C.4, C.5, C.8, C.9, C.11.

Exercícios básicos

B.1 Utilizando a definição, obtenha uma equação da elipse de focos F_1 e F_2, cujo eixo maior mede $2a$, em cada um dos seguintes casos:

a) $F_1(0, -1)$, $F_2(0, 1)$ e $2a = 6$;

b) $F_1(-1, -1)$, $F_2(0, 0)$ e $2a = 2\sqrt{2}$;

c) $F_1(2, 1)$, $F_2(4, 1)$ e $2a = 4$;

d) $F_1(-1, -1)$, $F_2(1, 1)$ e $2a = 4$.

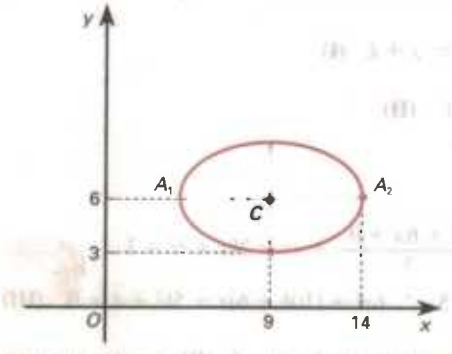
B.2 Calcule a distância focal, a excentricidade e a medida do eixo menor da elipse de focos F_1 e F_2, cujo eixo maior mede $2a$, em cada um dos seguintes casos:

a) $F_1(7, 2)$, $F_2(13, 2)$ e $2a = 10$;

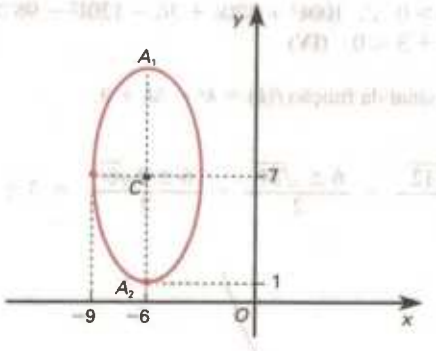
b) $F_1(3, 4)$, $F_2(3, 14)$ e $2a = 26$.

B.3 Obtenha a equação reduzida da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

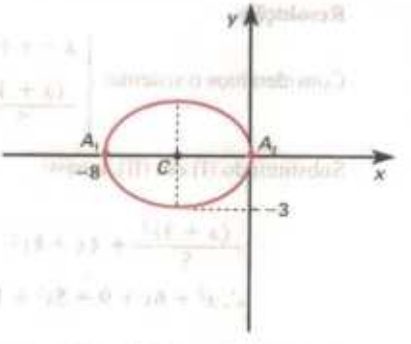
a)



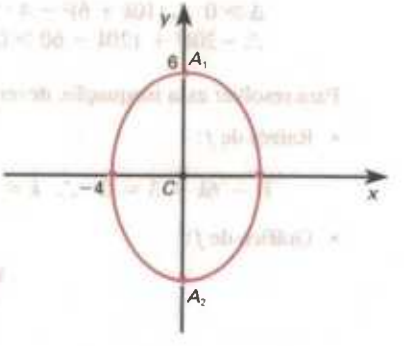
b)



c)



d)



B.4 Esboce o gráfico da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $\mathscr{E}$: $\dfrac{(x-4)^2}{16} + \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1$;

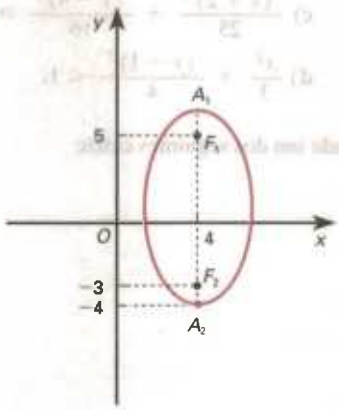
b) $\mathscr{E}$: $\dfrac{(x-6)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$;

c) $\mathscr{E}$: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

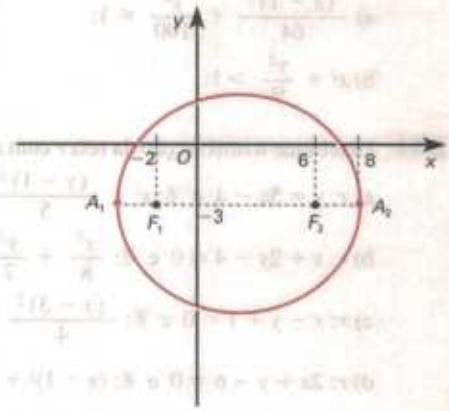
d) $\mathscr{E}$: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y-5)^2}{16} = 1$.

B.5 Determine a excentricidade e a equação reduzida da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

a)

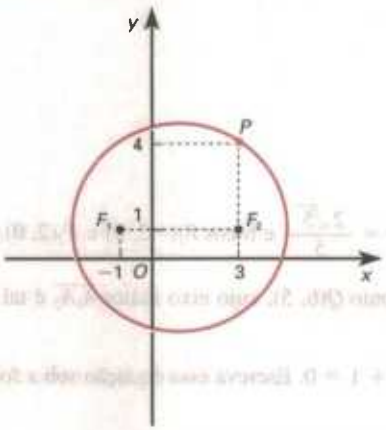


b)

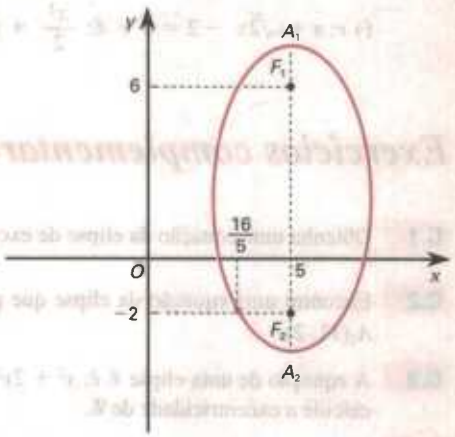


B.6 Obtenha a equação reduzida da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

a)



b)



B.7 Dê a equação reduzida da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $x^2 + 9y^2 - 6x - 36y + 36 = 0$;
b) $y^2 + 4x^2 + 8x = 0$;
c) $x^2 + 25y^2 + 2x - 100y + 76 = 0$;
d) $36y^2 + x^2 - 10x - 11 = 0$;
e) $25x^2 + 9y^2 = 225$;
f) $8(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 32$.

B.8 Calcule a distância focal da elipse de equação $4(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 1$.

B.9 Descreva a posição do ponto Q em relação à elipse $\mathscr{E}$ nos seguintes casos:

a) $Q(3, 6)$ e $\mathscr{E}$: $\dfrac{(x-1)^2}{12} + \dfrac{(y-2)^2}{24} = 1$;

b) $Q(3, 2)$ e $\mathscr{E}$: $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$;

c) $Q(6, 5)$ e $\mathscr{E}$: $\dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1$;

d) $Q(5, 4)$ e $\mathscr{E}$: $\dfrac{(x-5)^2}{49} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$;

e) $Q(5, 1)$ e $\mathscr{E}$: $\dfrac{(x+2)^2}{3} + y^2 = 1$;

f) $Q(1, 2)$ e $\mathscr{E}$: $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

B.10 Represente no plano cartesiano cada uma das seguintes inequações:

a) $\frac{(x-1)^2}{64} + \frac{y^2}{100} \leqslant 1$;

b) $x^2 + \frac{y^2}{9} > 1$;

c) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} \geqslant 1$;

d) $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{4} < 1$.

B.11 Determine a intersecção da reta r com a elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $r: y = 5x - 4$ e $\mathscr{E}: x^2 + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$;

b) $r: x + 2y - 4 = 0$ e $\mathscr{E}: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$;

c) $r: x - y + 1 = 0$ e $\mathscr{E}: \frac{(x-3)^2}{4} + y^2 = 1$;

d) $r: 2x + y - 6 = 0$ e $\mathscr{E}: (x-1)^2 + \frac{y^2}{8} = 1$;

e) $r: x - 2y + 2 = 0$ e $\mathscr{E}: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

f) $r: x + \sqrt{2}y - 2 = 0$ e $\mathscr{E}: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

Exercícios complementares

C.1 Obtenha uma equação da elipse de excentricidade $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e focos $F_1(-2, 0)$ e $F_2(2, 0)$.

C.2 Encontre uma equação da elipse que passa pelo ponto $Q(6, 5)$, cujo eixo maior $\overline{A_1A_2}$ é tal que $A_1(1, 2)$ e $A_2(11, 2)$.

C.3 A equação de uma elipse $\mathscr{E}$ é: $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$. Escreva essa equação sob a forma reduzida e calcule a excentricidade de $\mathscr{E}$.

C.4 Represente graficamente a elipse $\mathscr{E}$ de equação $x^2 + 3y^2 - 2x - 12y + 10 = 0$.

C.5 Encontre uma equação da elipse $\mathscr{E}$ de focos $F_1(4, 2)$ e $F_2(4, 10)$, cujo eixo menor mede 6 unidades.

C.6 Para que valores reais de m a reta $r: y = mx + 2$ é tangente à elipse $\mathscr{E}: \frac{(y-4)^2}{3} + x^2 = 1$?

C.7 Obtenha os valores reais de k para que a reta $r: x - ky - 3 = 0$ seja secante à elipse $\mathscr{E}: \frac{(x-5)^2}{2} + y^2 = 1$.

C.8 Encontre os valores reais de n de modo que a reta $r: y = x + n$ seja exterior à elipse $\mathscr{E}: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C.9 Quais são as equações das retas paralelas à reta $r: x - y - 4 = 0$ e tangentes à elipse $\mathscr{E}: \frac{(x-6)^2}{3} + y^2 = 1$?

C.10 Represente no plano cartesiano os pontos $Q(x, y)$ tais que: $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} t \\ y = 3 \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

C.11 Dê o gráfico cartesiano dos pontos $P(x, y)$ tais que: $\begin{cases} x = 1 + 5 \operatorname{sen} t \\ y = -2 + 3 \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescea) Sabendo-se que a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ e $b > 0$, passa pelos pontos $(2, 3)$ e $(0, 3\sqrt{2})$, então $a + b$ vale:

a) $5\sqrt{2}$. b) $5\sqrt{4}$. c) $2\sqrt{2}$. d) $6\sqrt{2}$. e) 12.

V.2 (Fesp-PE) Seja a elipse dada pela sua equação $2x^2 + 3y^2 = 5$. Então, sua excentricidade é igual a:

a) $\sqrt{5}$. b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. c) $\sqrt{3}$. d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. e) 3.

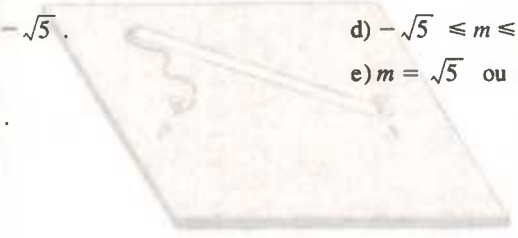
V.3 (EESCUSP-SP) O centro (x_0, y_0), a medida do eixo maior $2a$ e a medida do eixo menor $2b$ da elipse $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ são dados por:

a) $x_0 = 4$, $y_0 = 16$, $2a = 6$ e $2b = 4$.
b) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $2a = 4$ e $2b = 2$.
c) $x_0 = -2$, $y_0 = -3$, $2a = 16$ e $2b = 4$.
d) $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $2a = 20$ e $2b = 10$.
e) $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $2a = 8$ e $2b = 4$.

V.4 (Unicamp-SP) Dada uma elipse de semi-eixos a e b, calcule, em termos desses parâmetros, a área do quadrado nela inscrito, com lados paralelos aos eixos da elipse.

V.5 (Cescea) A reta $y = x + m$ tem pelo menos um ponto em comum com a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ se, e somente se:

a) $m \geq \sqrt{5}$ ou $m \leq -\sqrt{5}$.
b) $m \geq 0$.
c) $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$.
d) $-\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$.
e) $m = \sqrt{5}$ ou $m = -\sqrt{5}$.

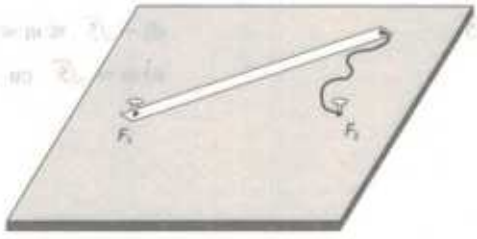


Capítulo 12
A hipérbole

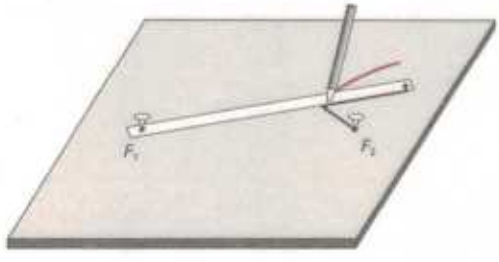
1. Introdução

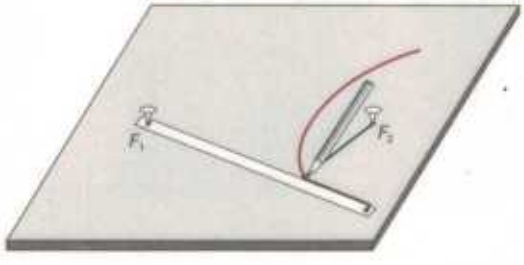
Antes do estudo da hipérbole é conveniente aprender a desenhá-la, para que sua definição seja bem entendida. Realize a seguinte experiência:

- em uma das extremidades de uma haste (pode ser uma régua), prenda a extremidade de um barbante;
- fixe as outras extremidades da haste e do barbante em dois pontos distintos F_1 e F_2 de uma tábua (a diferença entre o comprimento d da régua e o comprimento ℓ do barbante deve ser menor do que a distância F_1F_2, ou seja, $d - \ell < F_1F_2$);

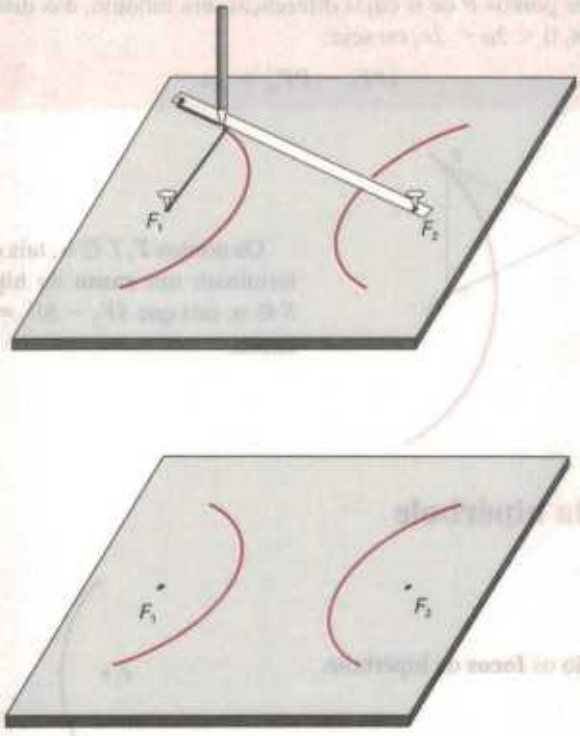


- com a ponta de um lápis, pressione o barbante contra a régua, deslizando a grafite sobre a tábua, deixando o barbante esticado e sempre junto da régua;

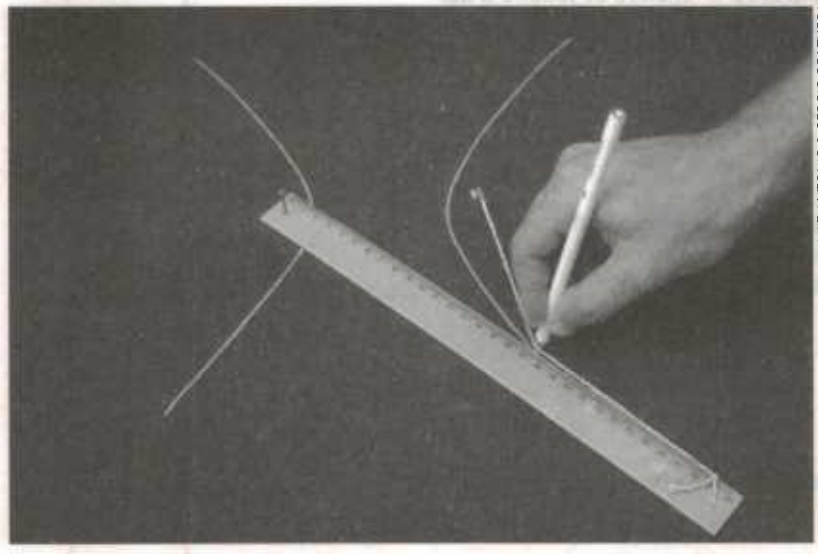




• repita a operação, invertendo os pontos de fixação na tábua, isto é, fixe a haste em F_2 e o barbante em F_1.



A figura assim construída é denominada **hipérbole**.

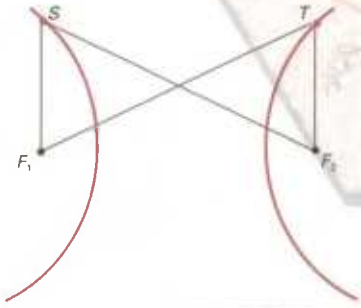


LUIZ ANTONIO & SERGIO SCAZUFCA

2. Definição de hipérbole

Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano α tais que $F_1F_2 = 2c$, $c > 0$, chama-se **hipérbole** o conjunto dos pontos P de α cujas diferenças, em módulo, das distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante $2a$, $0 < 2a < 2c$, ou seja:

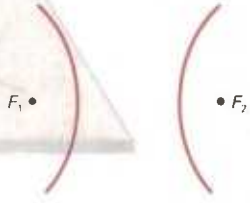
$$|PF_1 - PF_2| = 2a.$$



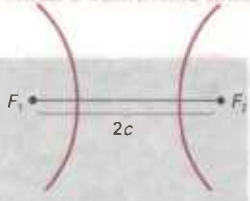
Os pontos T, $T \in \alpha$, tais que $TF_1 - TF_2 = 2a$ determinam um **ramo** da hipérbole, e os pontos S, $S \in \alpha$, tais que $SF_2 - SF_1 = 2a$ determinam o outro **ramo**.

2.1. Elementos da hipérbole

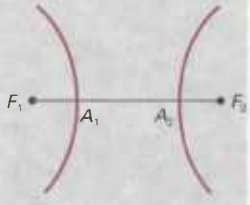
- Os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da hipérbole.



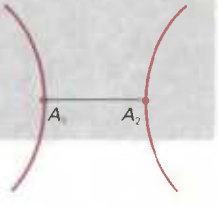
- A distância $2c$, $c > 0$, entre os focos é a **distância focal** da hipérbole. O número c é a semidistância focal.



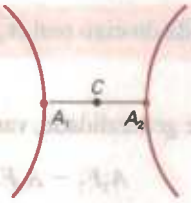
- A intersecção da hipérbole com o segmento $\overline{F_1F_2}$ é o conjunto $\{A_1, A_2\}$, sendo A_1 e A_2 os **vértices** da hipérbole.



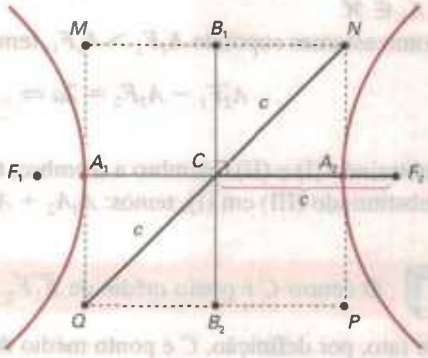
- O segmento $\overline{A_1A_2}$ é o **eixo real** da hipérbole.



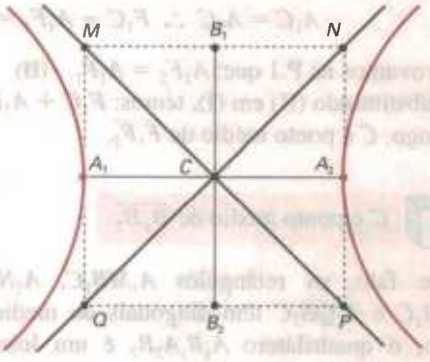
• O ponto C, médio do eixo real, é o **centro** da hipérbole. Cada um dos segmentos $\overline{A_1C}$ ou $\overline{A_2C}$ é chamado de **semi-eixo real**.



• Chama-se **retângulo referência da hipérbole** o retângulo $MNPQ$ de centro C, com $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ perpendiculares ao eixo real em A_1 e A_2, respectivamente, e $CN = CQ = c$. O segmento $\overline{B_1B_2}$ perpendicular a $\overline{A_1A_2}$ em C, com $B_1 \in \overline{MN}$ e $B_2 \in \overline{PQ}$, é o **eixo imaginário** da hipérbole. Os segmentos B_1C e B_2C são chamados de **semi-eixos imaginários**.

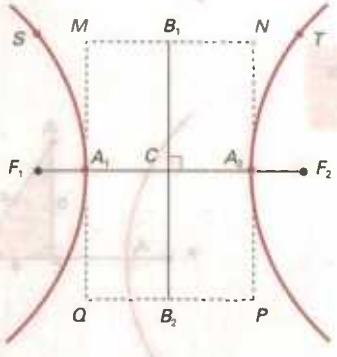


• As retas $\overleftrightarrow{MP}$ e $\overleftrightarrow{NQ}$ que contêm as diagonais do retângulo referência $MNPQ$ são denominadas "**assíntotas** da hipérbole". A hipérbole aproxima-se indefinidamente de cada assíntota, sem jamais tocá-la.



2.2. Propriedades da hipérbole

Consideremos a hipérbole $\mathcal{H}$:



$TF_1 - TF_2 = 2a$,
$SF_2 - SF_1 = 2a$,
$0 < 2a < 2c$.

P.1 A medida do eixo real $\overline{A_1A_2}$ é $2a$.

- $A_1 \in \mathcal{H}$

Sem perda de generalidade, vamos supor $A_1F_2 > A_1F_1$. Assim, podemos escrever:

$$A_1F_2 - A_1F_1 = 2a \Rightarrow \underbrace{A_1A_2 + A_2F_2}_{A_1F_2} - A_1F_1 = 2a. \quad \text{(I)}$$

- $A_2 \in \mathcal{H}$

Como estamos supondo $A_1F_2 > A_1F_1$, temos $A_2F_1 > A_2F_2$. Assim, podemos escrever:

$$A_2F_1 - A_2F_2 = 2a \Rightarrow \underbrace{A_2A_1 + A_1F_1}_{A_2F_1} - A_2F_2 = 2a. \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) e (II), membro a membro, temos: $2A_2F_2 - 2A_1F_1 = 0 \Rightarrow A_2F_2 = A_1F_1$. **(III)**
Substituindo (III) em (I), temos: $A_1A_2 + A_2F_2 - A_2F_2 = 2a \Rightarrow A_1A_2 = 2a$.

P.2 O centro C é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

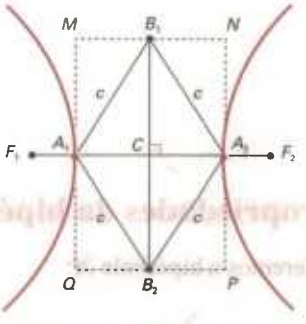
De fato, por definição, C é ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, ou seja:

$$A_1C = A_2C \therefore F_1C - A_1F_1 = F_2C - A_2F_2 \therefore F_1C + A_2F_2 = F_2C + A_1F_1. \quad \text{(I)}$$

Provamos na P.1 que: $A_2F_2 = A_1F_1$. **(II)**
Substituindo (II) em (I), temos: $F_1C + A_1F_1 = F_2C + A_1F_1 \Rightarrow F_1C = F_2C$.
Logo, C é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

P.3 C é ponto médio de $\overline{B_1B_2}$.

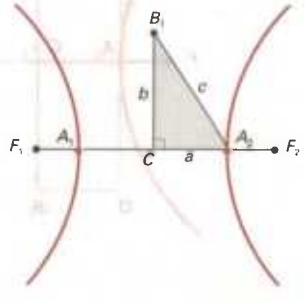
De fato, os retângulos A_1MB_1C, A_2NB_1C, A_2PB_2C e A_1QB_2C têm diagonais de medida c. Logo, o quadrilátero $A_1B_1A_2B_2$ é um losango. Como as diagonais do losango se cruzam perpendicularmente no ponto médio de cada uma, temos que C é ponto médio de $\overline{B_1B_2}$.



P.4 Se a medida do eixo imaginário é $2b$, então:
$c^2 = a^2 + b^2$.

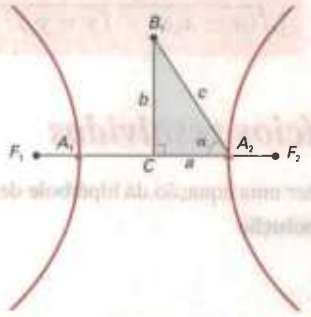
De fato, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo B_1CA_2, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

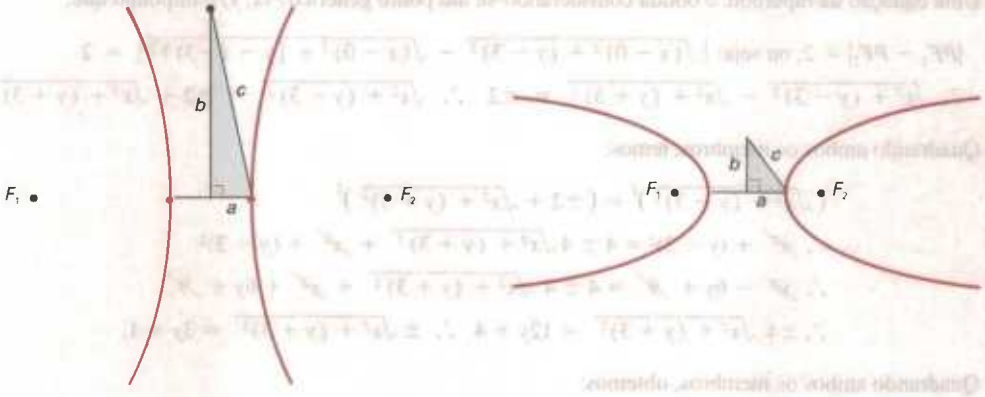


P.5 O número $e = \frac{c}{a}$, denominado "**excentricidade** da hipérbole", é tal que $e > 1$.

De fato, o número $e = \frac{c}{a}$ é a secante do ângulo $B\hat{A}_2C$ de medida α, $0° < \alpha < 90°$. A secante de um ângulo agudo qualquer é maior que 1; logo, $e > 1$.

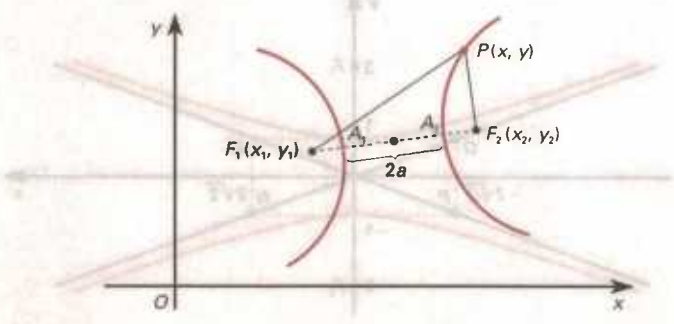


A **excentricidade** é uma medida que mostra o quanto os pontos da hipérbole se aproximam de duas retas que passam pelos seus vértices paralelamente ao eixo imaginário ou o quanto esses pontos se aproximam da reta que contém o eixo real. Quanto maior o número $e = \frac{c}{a}$, mais próximos de duas retas paralelas estarão os pontos da hipérbole; quanto menor o número $e = \frac{c}{a}$, mais próximos da reta que contém o eixo real estarão os pontos da hipérbole. Observe:



3. Equação da hipérbole

Sejam $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$ os focos de uma hipérbole e $2a$ a medida de seu eixo real.



Uma equação dessa hipérbole é obtida considerando-se um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que:

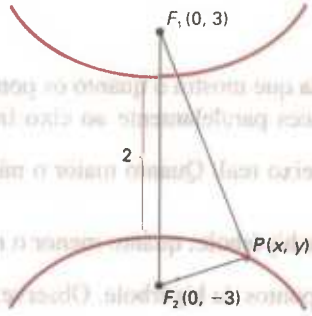
$$|PF_1 - PF_2| = 2a,$$

ou seja: $\left|\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}\right| = 2a.$

Exercícios resolvidos

R.1 Obter uma equação da hipérbole de focos $F_1(0, 3)$ e $F_2(0, -3)$, cujo eixo real mede 2 unidades.

Resolução



Uma equação da hipérbole é obtida considerando-se um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que:

$$|PF_1 - PF_2| = 2, \text{ ou seja: } \left|\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 3)^2} - \sqrt{(x - 0)^2 + [y - (-3)]^2}\right| = 2$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} - \sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = \pm 2 \quad \therefore \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = \pm 2 + \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}.$$

Quadrando ambos os membros, temos:

$$\left(\sqrt{x^2 + (y - 3)^2}\right)^2 = \left(\pm 2 + \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}\right)^2$$

$$\therefore x^2 + (y - 3)^2 = 4 \pm 4\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} + x^2 + (y + 3)^2$$

$$\therefore y^2 - 6y + 9 = 4 \pm 4\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} + y^2 + 6y + 9$$

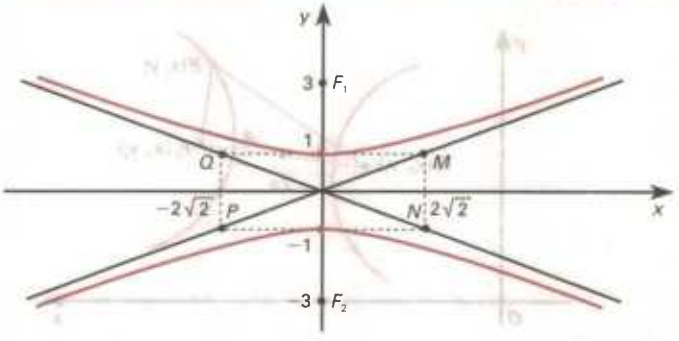
$$\therefore \pm 4\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = 12y + 4 \quad \therefore \pm\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = 3y + 1.$$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$$\left(\pm\sqrt{x^2 + (y + 3)^2}\right)^2 = (3y + 1)^2 \quad \therefore x^2 + (y + 3)^2 = (3y + 1)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 6y + 9 = 9y^2 + 6y + 1 \quad \therefore 8y^2 - x^2 - 8 = 0.$$

Graficamente, temos:



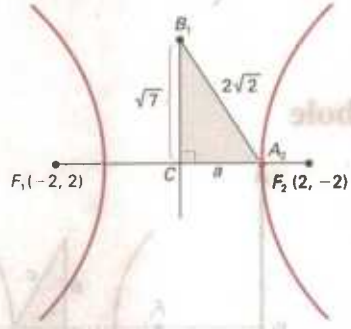
- Para esboçar o gráfico, convém inicialmente construir o retângulo referência $MNPQ$. Para isso, calculamos a medida b do semi-eixo imaginário: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 3^2 = 1^2 + b^2 \ \therefore b = 2\sqrt{2}$.
  A seguir, traçamos as assíntotas $\overleftrightarrow{MP}$ e $\overleftrightarrow{NQ}$.
- Para obter os pontos de intersecção da hipérbole com o eixo das ordenadas, basta atribuir o valor zero à variável x da equação: $x = 0 \Rightarrow 8y^2 - 0^2 - 8 = 0 \ \therefore y^2 = 1 \ \therefore y = \pm 1$.
- Note que, se atribuirmos o valor zero à variável y da equação, não obteremos nenhum valor real para x, pois:

$$y = 0 \ \therefore \ 8 \cdot 0^2 - x^2 - 8 = 0 \ \therefore \ x^2 = -8 \ \therefore \ \nexists x, x \in \mathbb{R}.$$

Isso significa que a hipérbole não intercepta o eixo das abscissas.

R.2 Obter uma equação da hipérbole de focos $F_1(-2, 2)$ e $F_2(2, -2)$, cujo eixo imaginário mede $2\sqrt{7}$ unidades.

Resolução



Temos:

$$F_1F_2 = \sqrt{(-2-2)^2 + [2-(-2)]^2} = 4\sqrt{2}$$
$$\therefore B_1A_2 = 2\sqrt{2}.$$

Aplicamos Pitágoras no triângulo B_1CA_2:

$$a^2 + (\sqrt{7})^2 = (2\sqrt{2})^2 \ \therefore \ a^2 + 7 = 8 \ \therefore \ a^2 = 1 \ \therefore \ a = 1.$$

Logo, o eixo real da hipérbole mede 2 unidades.
Considerando um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que $|PF_1 - PF_2| = 2$, temos:

$$|\sqrt{[x-(-2)]^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + [y-(-2)]^2}| = 2$$
$$\therefore \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} = \pm 2$$
$$\therefore \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \pm 2 + \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}$$

Quadrando ambos os membros, temos:

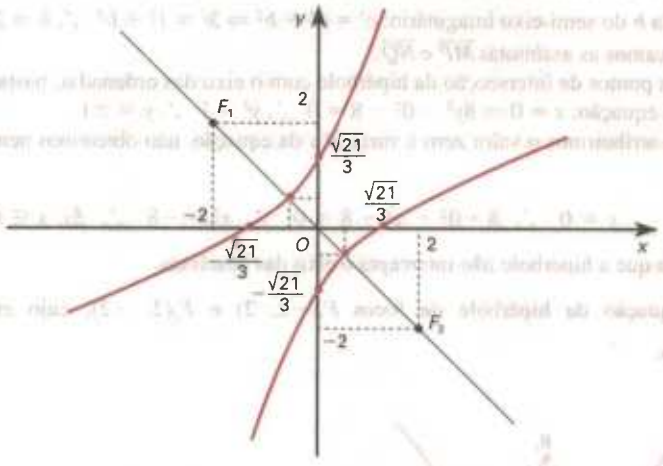
$$(\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2})^2 = (\pm 2 + \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2})^2$$
$$\therefore (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4 \pm 4\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} + (x-2)^2 + (y+2)^2$$
$$\therefore \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} =$$
$$= 4 \pm 4\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} + \cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4}$$
$$\therefore \pm 4\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} = 4 - 8x + 8y \ \therefore \ \pm\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} = 1 - 2x + 2y.$$

Quadrando ambos os membros, temos:

$$(\pm\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2})^2 = (1 - 2x + 2y)^2$$
$$\therefore (x-2)^2 + (y+2)^2 = (1 - 2x + 2y)^2$$
$$\therefore x^2 - \cancel{4x} + 4 + y^2 + \cancel{4y} + 4 = 1 - \cancel{4x} + \cancel{4y} - 8xy + 4x^2 + 4y^2$$
$$\therefore 3x^2 + 3y^2 - 8xy - 7 = 0.$$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$

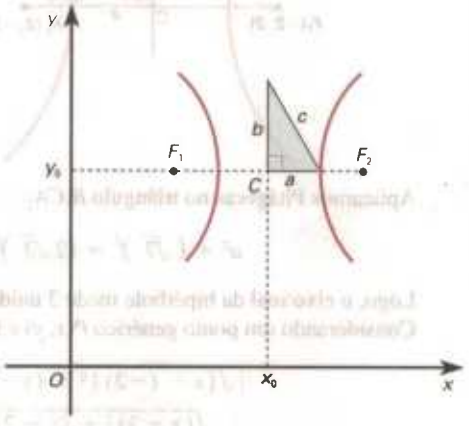
Graficamente, temos:



3.1. Equação reduzida de uma hipérbole

Se uma hipérbole de centro $C(x_0, y_0)$, com eixo real de medida $2a$ e eixo imaginário de medida $2b$, tem:

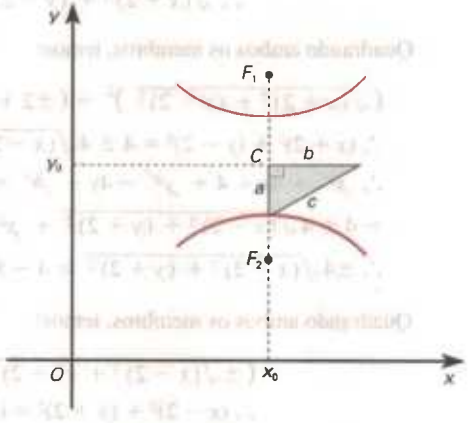
• o eixo real paralelo ao eixo das abscissas, então sua equação pode ser apresentada sob a forma:



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1;$$

Primeiro caso

• o eixo real paralelo ao eixo das ordenadas, então sua equação pode ser apresentada sob a forma:



$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

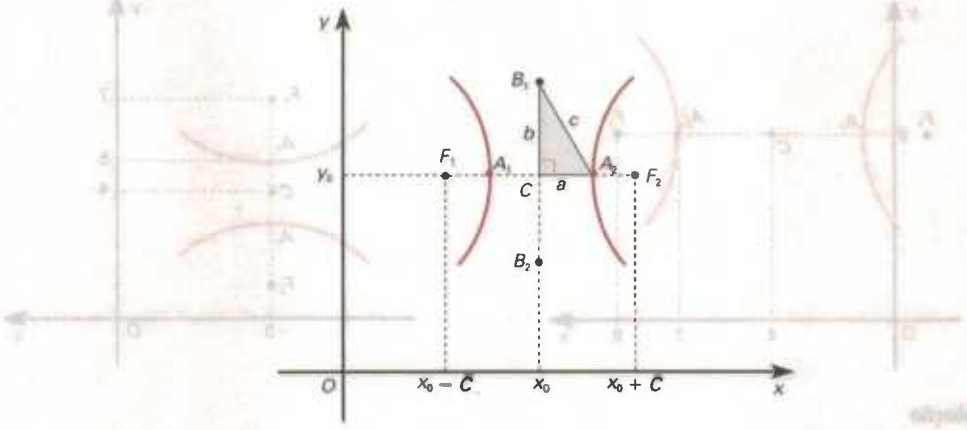
Segundo caso

Essas duas equações são denominadas "**equações reduzidas** das hipérboles".

Vamos demonstrar o primeiro caso e deixar o segundo para você fazer como exercício.

Demonstração

Consideremos uma hipérbole com eixo real de medida $2a$, paralelo ao eixo das abscissas. Sejam $2b$ a medida do eixo imaginário, $2c$ a distância focal e $C(x_0, y_0)$ o centro da hipérbole.



Considerando um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que $|PF_1 - PF_2| = 2a$, temos a equação da hipérbole:

$$|\sqrt{[x-(x_0-c)]^2+(y-y_0)^2} - \sqrt{[x-(x_0+c)]^2+(y-y_0)^2}\,| = 2a$$

$$\therefore \sqrt{[x-(x_0-c)]^2+(y-y_0)^2} - \sqrt{[x-(x_0+c)]^2+(y-y_0)^2} = \pm 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x-x_0+c)^2+(y-y_0)^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-x_0-c)^2+(y-y_0)^2}\,.$$

Para facilitar os cálculos, façamos a seguinte mudança de variáveis: $\begin{cases} x - x_0 = t & \text{(I)} \\ y - y_0 = u. & \text{(II)} \end{cases}$

Temos:

$$\sqrt{(t+c)^2+u^2} = \pm 2a + \sqrt{(t-c)^2+u^2}$$

$$\therefore \left(\sqrt{(t+c)^2+u^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(t-c)^2+u^2}\right)^2$$

$$\therefore (t+c)^2 + u^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(t-c)^2+u^2} + (t-c)^2 + u^2$$

$$\therefore t^2 + 2tc + c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(t-c)^2+u^2} + t^2 - 2tc + c^2$$

$$\therefore \pm 4a\sqrt{(t-c)^2+u^2} = 4a^2 - 4tc \quad \therefore \pm a\sqrt{(t-c)^2+u^2} = a^2 - tc$$

$$\therefore \left(\pm a\sqrt{(t-c)^2+u^2}\right)^2 = (a^2-tc)^2 \quad \therefore a^2[(t-c)^2+u^2] = (a^2-tc)^2$$

$$\therefore a^2(t^2-2tc+c^2+u^2) = a^4 - 2a^2tc + t^2c^2 \quad \therefore a^2t^2 - 2a^2tc + a^2c^2 + a^2u^2 = a^4 - 2a^2tc + t^2c^2$$

$$\therefore a^2t^2 - t^2c^2 + a^2u^2 = a^4 - a^2c^2 \quad \therefore t^2(a^2-c^2) + a^2u^2 = a^2(a^2-c^2). \quad \text{(III)}$$

No triângulo retângulo B_1CA_2, temos: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = -b^2$. **(IV)**
Substituímos (IV) em (III): $t^2(-b^2) + a^2u^2 = a^2(-b^2)$.

Dividimos ambos os membros dessa igualdade pelo produto $-a^2b^2$: $\dfrac{t^2}{a^2} - \dfrac{u^2}{b^2} = 1$. **(V)**

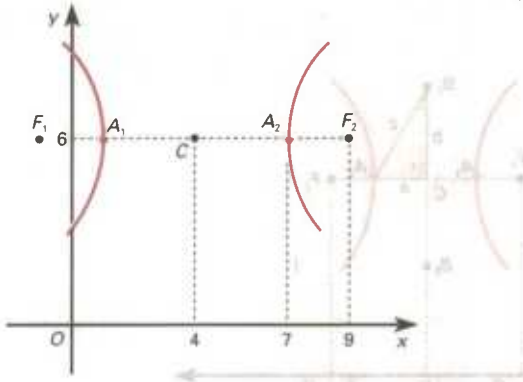
Substituindo (I) e (II) em (V), concluímos: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$

(c.q.d.)

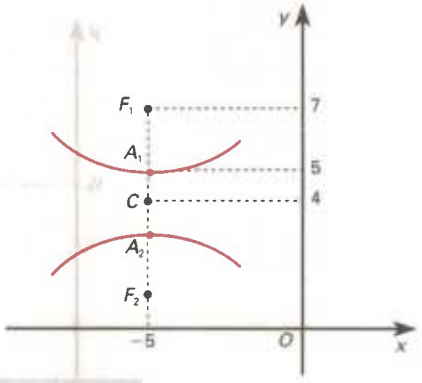
Exercícios resolvidos

R.3 Obter a equação reduzida da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

a)



b)



Resolução

a) Temos, pelo gráfico, que:

- o centro da hipérbole é o ponto $C(4, 6)$;
- a medida do semi-eixo real é $a = 7 - 4 = 3$;
- a semidistância focal é $c = 9 - 4 = 5$;
- a medida b do semi-eixo imaginário é obtida por:

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\therefore\; 5^2 = 3^2 + b^2 \;\therefore\; b^2 = 16 \;\therefore\; b = 4;$$

- o eixo real é paralelo ao eixo das abscissas.

Logo, a equação da hipérbole é dada por: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, em que $x_0 = 4$, $y_0 = 6$, $a = 3$ e $b = 4$, ou seja: $\frac{(x - 4)^2}{9} - \frac{(y - 6)^2}{16} = 1$.

b) Temos, pelo gráfico, que:

- o centro da hipérbole é o ponto $C(-5, 4)$;
- a medida do semi-eixo real é $a = 5 - 4 = 1$;
- a semidistância focal é $c = 7 - 4 = 3$;
- a medida b do semi-eixo imaginário é obtida por:

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\therefore\; 3^2 = 1^2 + b^2 \;\therefore\; b^2 = 8 \;\therefore\; b = 2\sqrt{2};$$

- o eixo real é paralelo ao eixo das ordenadas.

Logo, a equação da hipérbole é dada por: $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$, em que $x_0 = -5$, $y_0 = 4$, $a = 1$ e $b = 2\sqrt{2}$, ou seja: $\frac{(y - 4)^2}{1} - \frac{(x + 5)^2}{8} = 1$.

R.4 Esboçar o gráfico da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $\mathcal{H}$: $\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$;

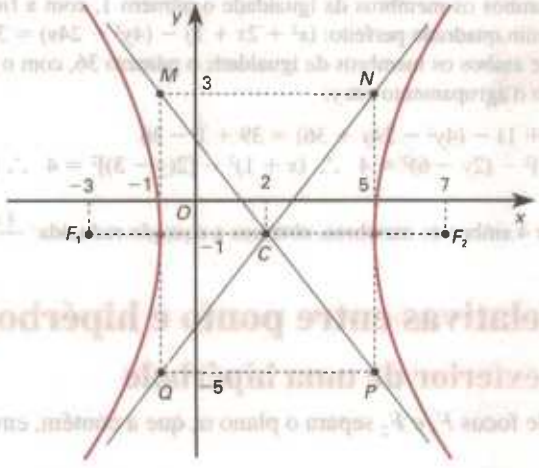
b) $\mathcal{H}$: $\frac{y^2}{25} - \frac{(x - 2)^2}{144} = 1$.

Resolução

a) Como a equação está na forma reduzida e a fração "positiva" é a que contém x no numerador, concluímos que o eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo das abscissas. Temos:

$$a^2 = 9 \;\therefore\; a = 3;\; b^2 = 16 \;\therefore\; b = 4;\; c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3^2 + 4^2 \;\therefore\; c = 5;\; C(2, -1).$$

Para esboçar o gráfico, inicialmente construímos o retângulo referência $MNPQ$ e traçamos as assíntotas $\overleftrightarrow{MP}$ e $\overleftrightarrow{NQ}$. A seguir desenhamos os ramos da hipérbole aproximando-se "indefinidamente" das assíntotas:

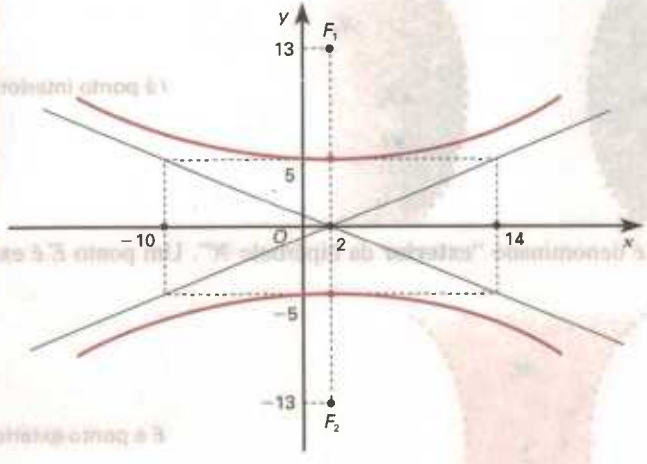


- Subtraindo da abscissa do centro C a semidistância focal, obtém-se a abscissa do foco F_1.
- Somando à abscissa do centro C a semidistância focal, obtém-se a abscissa do foco F_2.
- Os pontos de intersecção dessa hipérbole com o eixo das abscissas são:

$$A\left(2 - \frac{3\sqrt{17}}{4}, 0\right) \text{ e } B\left(2 + \frac{3\sqrt{17}}{4}, 0\right).$$

b) Como a equação está na forma reduzida e a fração "positiva" é a que contém y no numerador, concluímos que o eixo real é paralelo ao eixo das ordenadas. Temos:

$a^2 = 25 \;\therefore\; a = 5$; $b^2 = 144 \;\therefore\; b = 12$; $c^2 = a^2 + b^2 \;\therefore\; c^2 = 5^2 + 12^2 \;\therefore\; c = 13$; $C(2, 0)$.



R.5 Uma hipérbole $\mathcal{H}$ tem equação $x^2 - 4y^2 + 2x + 24y - 39 = 0$. Escrever essa equação sob a forma reduzida.

Resolução

Para obter a forma reduzida, adotamos os seguintes procedimentos:

1º) agrupamos os termos em x e os termos em y, de modo que os coeficientes dos termos do 2º grau fiquem positivos, e isolamos o termo independente: $(x^2 + 2x) - (4y^2 - 24y) = 39$.

2º) somamos a ambos os membros da igualdade o número 1, com a finalidade de transformar o agrupamento em x num quadrado perfeito: $(x^2 + 2x + 1) - (4y^2 - 24y) = 39 + 1$.

3º) subtraímos de ambos os membros da igualdade o número 36, com o objetivo de transformar num quadrado perfeito o agrupamento em y:

$$(x^2 + 2x + 1) - (4y^2 - 24y + 36) = 39 + 1 - 36$$
$$\therefore (x + 1)^2 - (2y - 6)^2 = 4 \quad \therefore (x + 1)^2 - [2(y - 3)]^2 = 4 \quad \therefore (x + 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 4.$$

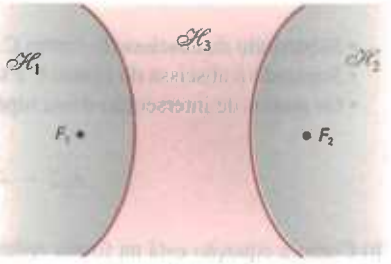
4º) dividindo por 4 ambos os membros, obtemos a equação reduzida: $\frac{(x + 1)^2}{4} - (y - 3)^2 = 1$.

4. Posições relativas entre ponto e hipérbole

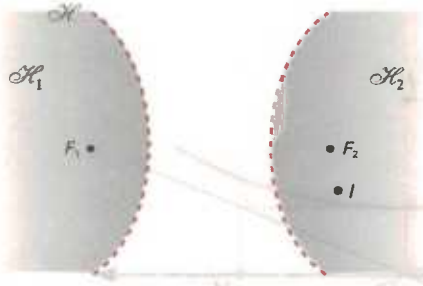
4.1. Interior e exterior de uma hipérbole

Uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2 separa o plano α, que a contém, em três regiões, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_3$, tais que:

- $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{H} = \alpha$;
- $\mathcal{H} \cap (\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3) = \varnothing$;
- $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \varnothing$, $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_3 = \varnothing$ e $\mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3 = \varnothing$;
- $\{F_1, F_2\} \subset \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$.



O conjunto $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ é denominado "**interior** da hipérbole $\mathcal{H}$". Um ponto I é **interior** a $\mathcal{H}$ se, e somente se, $I \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$.



I é ponto interior à hipérbole.

O conjunto $\mathcal{H}_3$ é denominado "**exterior** da hipérbole $\mathcal{H}$". Um ponto E é exterior a $\mathcal{H}$ se, e somente se, $E \in \mathcal{H}_3$.

E é ponto exterior à hipérbole.

Resumindo:

Uma hipérbole $\mathcal{H}$ e um ponto P, coplanares, têm três posições relativas possíveis:
I. $P \in \mathcal{H}$ ou
II. P é interior a $\mathcal{H}$ ou
III. P é exterior a $\mathcal{H}$.

Propriedade dos pontos pertencentes à hipérbole

Por definição de hipérbole:

Sejam $\mathcal{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2, cujo eixo real mede $2a$, e A um ponto do plano que contém $\mathcal{H}$. O ponto A pertence à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e somente se:

$$|AF_1 - AF_2| = 2a.$$

Portanto, dados a equação $\mathcal{H}(x, y) = 0$ de uma hipérbole $\mathcal{H}$ e um ponto $A(x_A, y_A)$, temos que:

$$A \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}(x_A, y_A) = 0.$$

Exercício resolvido

R.6 Qual é a posição do ponto $P(3, 5)$ em relação à hipérbole $\mathcal{H}$: $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$?

Resolução

Substituindo-se as variáveis x e y da equação por 3 e 5, respectivamente, temos que a sentença $\frac{(3-1)^2}{2} - \frac{(5-2)^2}{9} = 1$ é verdadeira. Logo, $P \in \mathcal{H}$.

Propriedade dos pontos interiores à hipérbole

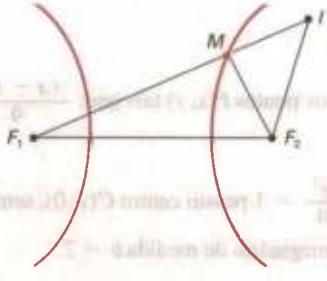
Se I é um ponto interior a uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2, cujo eixo real mede $2a$, então:

$$|IF_1 - IF_2| > 2a.$$

Demonstração

O caso em que I pertence à reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ é imediato. Suponhamos, então, que I não pertença a essa reta e pertença à região $\mathcal{H}_2$, interior a $\mathcal{H}$, tal que $F_2 \in \mathcal{H}_2$.

Consideremos a semi-reta de origem F_1, passando por I, que intercepta a hipérbole em M, com $MF_2 < MF_1$.



Temos: $IF_2 < IM + MF_2 \Rightarrow -IF_2 > -IM - MF_2$.
Somamos IF_1 a ambos os membros dessa desigualdade:

$$IF_1 - IF_2 > \underbrace{IF_1 - IM}_{MF_1} - MF_2 = MF_1 - MF_2.$$

Como $M \in \mathcal{H}$, temos: $MF_1 - MF_2 = 2a$.
Logo, $IF_1 - IF_2 > 2a$.
O raciocínio é análogo quando I pertence à região $\mathcal{H}_1$, interior a $\mathcal{H}$, tal que $F_1 \in \mathcal{H}_1$.

(c.q.d.)

A recíproca desse teorema também é verdadeira. Por isso, podemos enunciar:

Sejam $\mathcal{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2, cujo eixo real mede $2a$, e I um ponto do plano que contém $\mathcal{H}$. O ponto I é interior à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e somente se:

$$|IF_1 - IF_2| > 2a.$$

Conseqüentemente, a inequação dos pontos $I(x, y)$ interiores à hipérbole de focos $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$, cujo eixo real mede $2a$, é obtida impondo-se que $|IF_1 - IF_2| > 2a$, ou seja:

$$\left|\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}\right| > 2a. \quad \text{(I)}$$

Se o centro da hipérbole é o ponto $C(x_0, y_0)$ e o eixo imaginário tiver medida $2b$, então a inequação (I) se reduz a:

- $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} > 1$, se o eixo real é paralelo ao eixo das abscissas;
- $\dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} > 1$, se o eixo real é paralelo ao eixo das ordenadas.

Exercícios resolvidos

R.7 Qual é a posição do ponto $P(5, -2)$ em relação à hipérbole $\mathcal{H}$: $\dfrac{(x - 1)^2}{4} - \dfrac{(y + 2)^2}{3} = 1$?

Resolução

Substituindo as variáveis x e y da equação da hipérbole por 5 e -2 respectivamente, temos:

$$\frac{(5 - 1)^2}{4} - \frac{(-2 + 2)^2}{3} > 1.$$

$$\frac{16}{4} > 1.$$

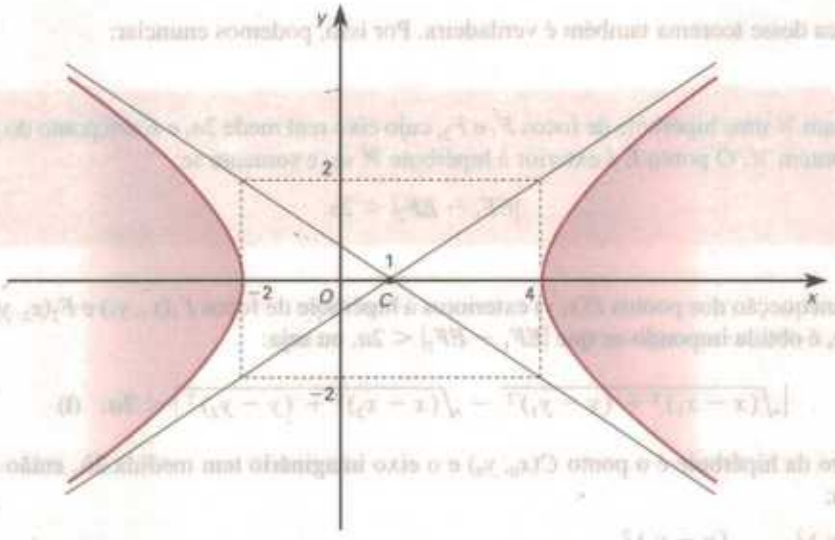
Logo, P é interior à hipérbole $\mathcal{H}$.

R.8 Representar no plano cartesiano os pontos $P(x, y)$ tais que: $\dfrac{(x - 1)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} \geqslant 1$.

Resolução

A hipérbole $\mathcal{H}$: $\dfrac{(x - 1)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ possui centro $C(1, 0)$, semi-eixo real de medida $a = 3$, paralelo ao eixo das abscissas, e semi-eixo imaginário de medida $b = 2$.

A inequação $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{4} \geqslant 1$ representa os pontos que pertencem a $\mathcal{H}$ ou ao seu interior:



Propriedade dos pontos exteriores à hipérbole

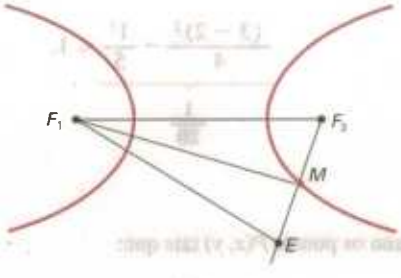
Se E é um ponto exterior a uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2, cujo eixo real mede $2a$, então:

$$|EF_1 - EF_2| < 2a.$$

Demonstração

O caso em que E pertence ao eixo real é imediato. Suponhamos que E não pertença a esse eixo e esteja localizado de tal maneira que $EF_1 \geqslant EF_2$.

Consideremos a semi-reta de origem F_2, passando por E, que intercepta a hipérbole em M tal que $MF_1 > MF_2$.



Temos: $EF_1 < MF_1 + EM$.

Somamos $-EF_2$ a ambos os membros dessa desigualdade:

$$EF_1 - EF_2 < MF_1 + EM - EF_2$$

$$\therefore EF_1 - EF_2 < MF_1 - \underbrace{(EF_2 - EM)}_{MF_2} \quad \therefore EF_1 - EF_2 < MF_1 - MF_2.$$

Como $M \in \mathcal{H}$, temos $MF_1 - MF_2 = 2a$. Logo, $EF_1 - EF_2 < 2a$.
O raciocínio é análogo se $EF_1 < EF_2$.

(c.q.d.)

A recíproca desse teorema também é verdadeira. Por isso, podemos enunciar:

Sejam $\mathcal{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2, cujo eixo real mede $2a$, e E um ponto do plano que contém $\mathcal{H}$. O ponto E é exterior à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e somente se:

$$|EF_1 - EF_2| < 2a.$$

Assim, a inequeção dos pontos $E(x, y)$ exteriores à hipérbole de focos $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$, cujo eixo real mede $2a$, é obtida impondo-se que $|EF_1 - EF_2| < 2a$, ou seja:

$$\left|\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}\right| < 2a. \quad \text{(I)}$$

Se o centro da hipérbole é o ponto $C(x_0, y_0)$ e o eixo imaginário tem medida $2b$, então a inequação (I) se reduz a:

- $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} < 1$, se o eixo real é paralelo ao eixo das abscissas;
- $\dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} < 1$, se o eixo real é paralelo ao eixo das ordenadas.

Exercícios resolvidos

R.9 Qual é a posição do ponto $P(3, 1)$ em relação à hipérbole $\mathcal{H}$:

$$\frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1?$$

Resolução

Substituindo as variáveis x e y da equação por 3 e 1, respectivamente, temos:

$$\underbrace{\frac{(3 - 2)^2}{4} - \frac{1^2}{5}}_{\frac{1}{20}} < 1.$$

Logo, P é exterior a $\mathcal{H}$.

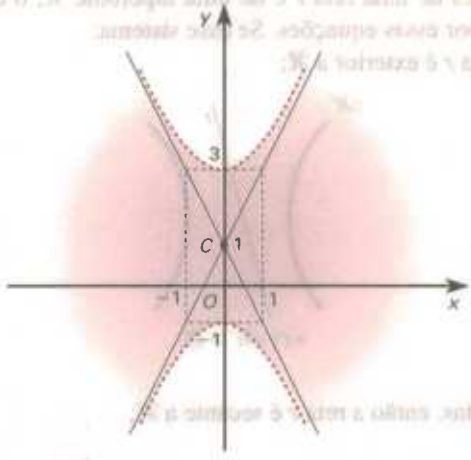
R.10 Representar no plano cartesiano os pontos $P(x, y)$ tais que:

$$\frac{(y - 1)^2}{4} - x^2 < 1.$$

Resolução

A hipérbole $\mathcal{H}$: $\dfrac{(y - 1)^2}{4} - x^2 = 1$ possui centro $C(0, 1)$, semi-eixo real de medida $a = 2$ paralelo ao eixo das ordenadas e semi-eixo imaginário de medida $b = 1$.

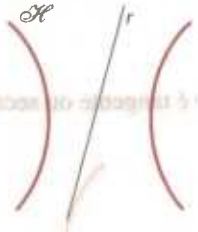
A inequação $\frac{(y-1)^2}{4} - x^2 < 1$ representa os pontos exteriores a $\mathcal{H}$:



5. Posições relativas entre reta e hipérbole

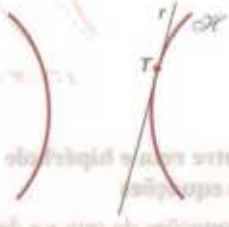
Sendo $\mathcal{H}$ uma hipérbole e r uma reta, contidas em um mesmo plano, temos que:

I. a reta r é exterior à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e somente se, todos os pontos de r são exteriores a $\mathcal{H}$;

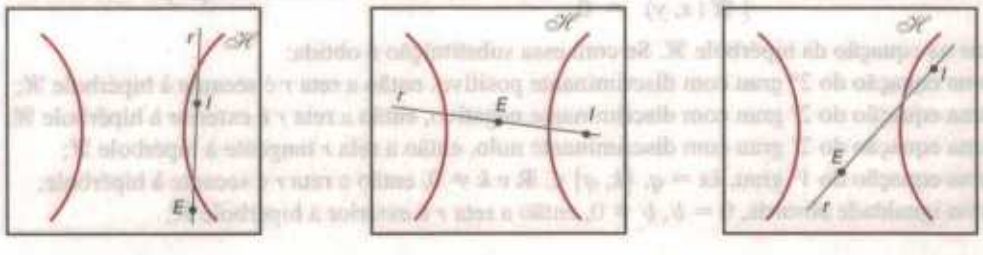


$r \cap \mathcal{H} = \varnothing$

II. a reta r é tangente à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e somente se, um único ponto de r pertence a $\mathcal{H}$ e todos os demais pontos de r são exteriores a $\mathcal{H}$;



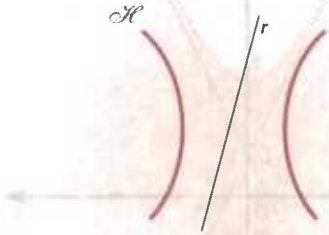
III. a reta r é secante à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e somente se, r passa por um ponto E exterior e por um ponto I interior a $\mathcal{H}$.



5.1. Intersecção entre reta e hipérbole

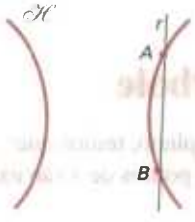
Conhecendo-se as equações de uma reta r e de uma hipérbole $\mathcal{H}$, o conjunto $r \cap \mathcal{H}$ é o conjunto solução do sistema formado por essas equações. Se esse sistema:

- é impossível, então a reta r é exterior a $\mathcal{H}$;

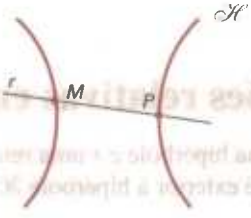


$r \cap \mathcal{H} = \emptyset$.

- tem duas soluções distintas, então a reta r é secante a $\mathcal{H}$;

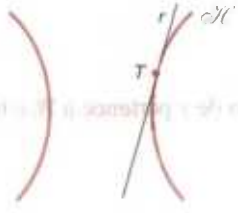


$r \cap \mathcal{H} = \{A, B\}$.

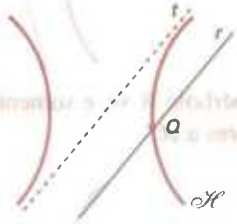


$r \cap \mathcal{H} = \{M, P\}$.

- tem uma única solução, então a reta r é tangente ou secante a $\mathcal{H}$.



$r \cap \mathcal{H} = \{T\}$.



$r \cap \mathcal{H} = \{Q\}$.

Neste caso, a reta r é paralela à assíntota t e $r \neq t$.

Conclusão sobre a posição relativa entre reta e hipérbole a partir do sistema formado por suas equações

Sejam $r(x, y) = 0$ e $\mathcal{H}(x, y) = 0$ as equações da reta r e da hipérbole $\mathcal{H}$, respectivamente.

Para resolver o sistema: $\begin{cases} r(x, y) = 0 \\ \mathcal{H}(x, y) = 0, \end{cases}$ isolamos uma das variáveis na equação da reta r e a substituímos na equação da hipérbole $\mathcal{H}$. Se com essa substituição é obtida:

- uma equação do 2º grau com discriminante positivo, então a reta r é secante à hipérbole $\mathcal{H}$;
- uma equação do 2º grau com discriminante negativo, então a reta r é exterior à hipérbole $\mathcal{H}$;
- uma equação do 2º grau com discriminante nulo, então a reta r tangente à hipérbole $\mathcal{H}$;
- uma equação do 1º grau, $kx = q$, $\{k, q\} \subset \mathbb{R}$ e $k \neq 0$, então a reta r é secante à hipérbole;
- uma igualdade absurda, $0 = b$, $b \neq 0$, então a reta r é exterior à hipérbole $\mathcal{H}$.

Exercícios resolvidos

R.11 Determinar a intersecção da reta r: $y = 5x + 5$ com a hipérbole $\mathcal{H}$: $\frac{(y-2)^2}{9} - x^2 = 1$.

Resolução

O conjunto $r \cap \mathcal{H}$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} y = 5x + 5 \quad \text{(I)} \\ \frac{(y-2)^2}{9} - x^2 = 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

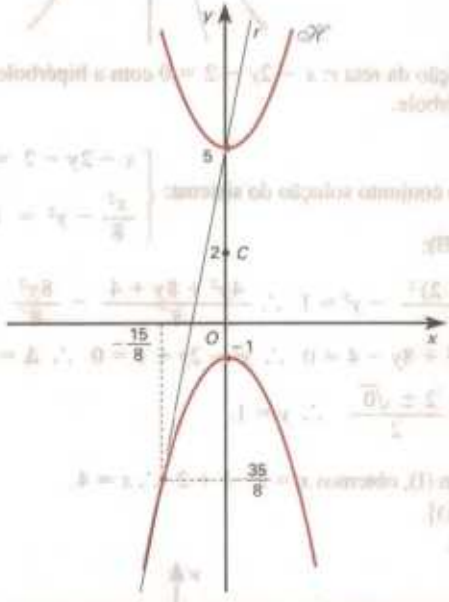
$$\frac{(5x+3)^2}{9} - x^2 = 1 \quad \therefore \quad \frac{25x^2 + 30x + 9}{9} - \frac{9x^2}{9} = \frac{9}{9}$$

$$\therefore 16x^2 + 30x = 0 \quad \therefore \quad x(16x + 30) = 0 \quad \therefore \quad x = 0 \text{ ou } x = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}.$$

- Substituindo $x = 0$ em (I), obtemos: $y = 5 \cdot 0 + 5 \quad \therefore \quad y = 5$.
- Substituindo $x = -\frac{15}{8}$ em (I), obtemos: $y = 5\left(-\frac{15}{8}\right) + 5 \quad \therefore y = -\frac{35}{8}$.

Temos então que: $r \cap \mathcal{H} = \left\{(0, 5), \left(-\frac{15}{8}, -\frac{35}{8}\right)\right\}$.

Graficamente, temos:



Nota: nesse exercício, a substituição da equação (I) na equação (II) nos levou a uma equação do 2º grau ($16x^2 + 30x = 0$) com discriminante positivo ($\Delta = 900$). Só com esse fato já poderíamos ter concluído que a reta r é secante à hipérbole $\mathcal{H}$.

R.12 Mostrar que a reta r: $y = 4x + 1$ é exterior à hipérbole $\mathcal{H}$: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Resolução

Basta mostrar que o sistema formado pelas equações de r e $\mathcal{H}$ é impossível. Vejamos:

$$\begin{cases} y = 4x + 1 \quad \text{(I)} \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

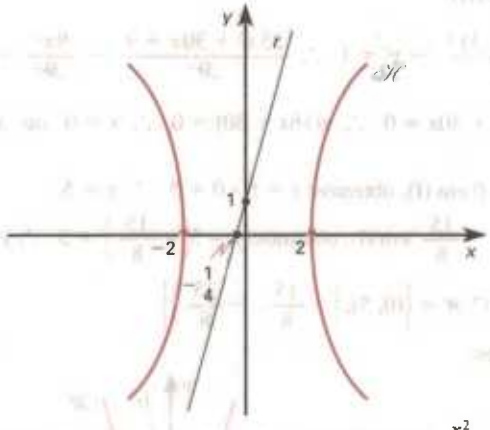
Substituindo (I) em (II), temos:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(4x+1)^2}{9} = 1 \;\therefore\; \frac{x^2}{4} - \frac{16x^2+8x+1}{9} = 1$$

$$\therefore 9x^2 - 4(16x^2+8x+1) = 36 \;\therefore\; 9x^2 - 64x^2 - 32x - 4 - 36 = 0$$

$$\therefore 55x^2 + 32x + 40 = 0 \;\therefore\; \Delta = 32^2 - 4 \cdot 55 \cdot 40 = -7\,776.$$

Como $\Delta < 0$, concluímos que o sistema é impossível e, portanto, r é exterior a $\mathcal{H}$.
Graficamente, temos:



R.13 Determinar a intersecção da reta r: $x - 2y - 2 = 0$ com a hipérbole $\mathcal{H}$: $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ e dar a posição da reta em relação à hipérbole.

Resolução

O conjunto $r \cap \mathcal{H}$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow x = 2y + 2 \quad \text{(I)} \\ \frac{x^2}{8} - y^2 = 1. \quad \text{(II)} \end{cases}$

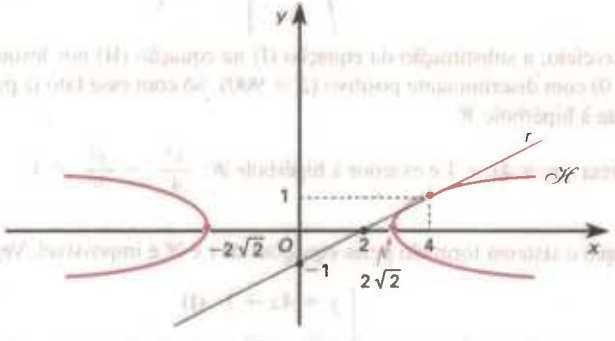
Substituímos (I) em (II):

$$\frac{(2y+2)^2}{8} - y^2 = 1 \;\therefore\; \frac{4y^2+8y+4}{8} - \frac{8y^2}{8} = \frac{8}{8}$$

$$\therefore -4y^2 + 8y - 4 = 0 \;\therefore\; y^2 - 2y + 1 = 0 \;\therefore\; \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\therefore y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} \;\therefore\; y = 1.$$

Substituindo $y = 1$ em (I), obtemos $x = 2 \cdot 1 + 2 \;\therefore x = 4$.
Logo, $r \cap \mathcal{H} = \{(4, 1)\}$.
Graficamente, temos:



Nota: nesse exercício, a substituição da equação (I) na equação (II) nos levou a uma equação do 2º grau com discriminante nulo. Só com esse fato já poderíamos ter concluído que r é tangente a $\mathcal{H}$.

R.14 Determinar a intersecção da reta r: $x - 2y = 0$ com a hipérbole $\mathcal{H}$: $\frac{x^2}{4} - (y-1)^2 = 1$.

Resolução

O conjunto $r \cap \mathcal{H}$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \quad \text{(I)} \\ \frac{x^2}{4} - (y-1)^2 = 1. \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

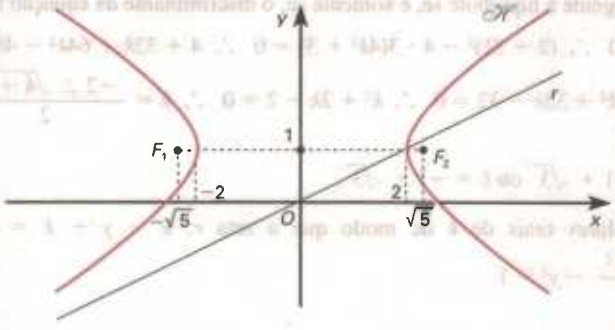
$$\frac{(2y)^2}{4} - (y-1)^2 = 1 \quad \therefore \quad \frac{4y^2}{4} - (y^2 - 2y + 1) = 1 \quad \therefore \quad y^2 - y^2 + 2y - 1 = 1 \quad \therefore \quad y = 1.$$

Substituindo $y = 1$ em (I), obtemos: $x = 2 \cdot 1 \quad \therefore \quad x = 2$.

Logo, r possui um único ponto em comum com $\mathcal{H}$: $r \cap \mathcal{H} = \{(2, 1)\}$.

Note que a substituição da equação (I) na equação (II) nos levou a uma equação do 1º grau. Concluímos, por isso, que a reta r é secante à hipérbole $\mathcal{H}$.

Graficamente, temos:



A reta r é paralela a uma das assíntotas da hipérbole.

Note que, apesar de o conjunto $r \cap \mathcal{H}$ ser unitário, a reta r não é tangente a $\mathcal{H}$. Ela é secante a $\mathcal{H}$.

R.15 Obter a intersecção da reta r: $2x - y = 0$ com a hipérbole $\mathcal{H}$: $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

Resolução

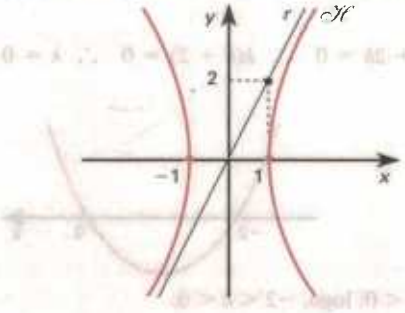
O conjunto $r \cap \mathcal{H}$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \quad \text{(I)} \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 1. \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

$$x^2 - \frac{(2x)^2}{4} = 1 \quad \therefore \quad x^2 - \frac{4x^2}{4} = 1 \quad \therefore \quad 0 = 1. \quad \textbf{(Absurdo!)}$$

Esse absurdo nos leva a concluir que r é exterior a $\mathcal{H}$, ou seja, $r \cap \mathcal{H} = \varnothing$.

Graficamente, temos:



R.16 Obter os valores reais de k de modo que a reta r: $x - y + k = 0$ seja tangente à hipérbole $\mathcal{H}$: $\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$.

Resolução

Consideremos o sistema: $\begin{cases} x - y + k = 0 \Rightarrow y = x + k \quad \text{(I)} \\ \frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1. \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

$$\frac{(x-1)^2}{4} - (x+k)^2 = 1 \;\therefore\; \frac{x^2 - 2x + 1}{4} - (x^2 + 2kx + k^2) = 1$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 - 4(x^2 + 2kx + k^2) = 4$$

$$\therefore -3x^2 - (2 + 8k)x - 4k^2 - 3 = 0 \;\therefore\; 3x^2 + (2 + 8k)x + 4k^2 + 3 = 0. \quad \text{(III)}$$

A reta r é tangente à hipérbole se, e somente se, o discriminante da equação (III) for nulo, ou seja:

$$\Delta = 0 \;\therefore\; (2 + 8k)^2 - 4 \cdot 3(4k^2 + 3) = 0 \;\therefore\; 4 + 32k + 64k^2 - 48k^2 - 36 = 0$$

$$\therefore 16k^2 + 32k - 32 = 0 \;\therefore\; k^2 + 2k - 2 = 0 \;\therefore\; k = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $k = -1 + \sqrt{3}$ ou $k = -1 - \sqrt{3}$.

R.17 Obter os valores reais de k de modo que a reta r: $x - y + k = 0$ seja exterior à hipérbole $\mathcal{H}$: $\frac{(x-1)^2}{2} - y^2 = 1$.

Resolução

Consideremos o sistema: $\begin{cases} x - y + k = 0 \Rightarrow y = x + k \quad \text{(I)} \\ \frac{(x-1)^2}{2} - y^2 = 1. \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\frac{(x-1)^2}{2} - (x+k)^2 = 1 \;\therefore\; \frac{x^2 - 2x + 1}{2} - (x^2 + 2kx + k^2) = 1$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 - 2(x^2 + 2kx + k^2) = 2 \;\therefore\; -x^2 - (2 + 4k)x - 2k^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 + (2 + 4k)x + 2k^2 + 1 = 0. \quad \text{(III)}$$

Para que a reta r seja exterior à hipérbole $\mathcal{H}$, o discriminante da equação (III) deve ser negativo, ou seja:

$$\Delta < 0 \;\therefore\; (2 + 4k)^2 - 4(2k^2 + 1) < 0 \;\therefore\; 4 + 16k + 16k^2 - 8k^2 - 4 < 0$$

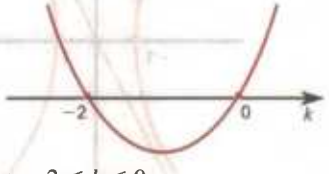
$$\therefore 8k^2 + 16k < 0 \;\therefore\; k^2 + 2k < 0.$$

Para resolver essa inequação, devemos estudar o sinal da função $f(k) = k^2 + 2k$.

- Raízes de f:

$$k^2 + 2k = 0 \;\therefore\; k(k+2) = 0 \;\therefore\; k = 0 \text{ ou } k = -2.$$

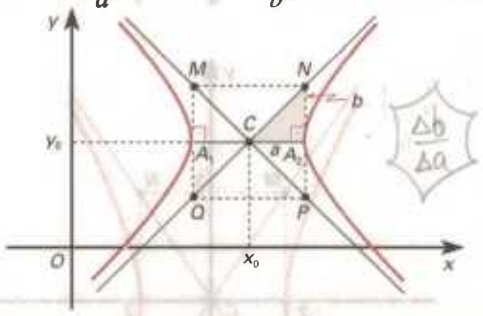
- Gráfico de f:



A inequação exige que $f(k) < 0$; logo, $-2 < k < 0$.

6. As equações das assíntotas de uma hipérbole

Consideremos a hipérbole $\mathcal{H}$: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, cujo gráfico é:

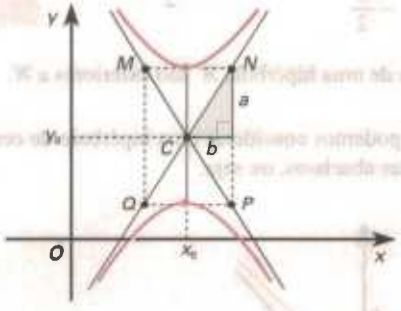


As assíntotas dessa hipérbole são as retas $\overleftrightarrow{NQ}$ e $\overleftrightarrow{MP}$, que contêm as diagonais do retângulo referência $MNPQ$. Essas assíntotas passam pelo ponto $C(x_0, y_0)$ e têm coeficientes angulares $m_1 = \dfrac{b}{a}$ e $m_2 = -\dfrac{b}{a}$, respectivamente (observe os triângulos retângulos CNA_2 e CMA_1). Podemos, então, obter as equações dessas assíntotas:

$$\overleftrightarrow{NQ}\begin{cases} C(x_0, y_0) \\ m_1 = \dfrac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0);$$

$$\overleftrightarrow{MP}\begin{cases} C(x_0, y_0) \\ m_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0).$$

Analogamente, obtêm-se as equações das assíntotas de uma hipérbole com eixo real paralelo ao eixo das ordenadas, ou seja, $\mathcal{H}$: $\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.



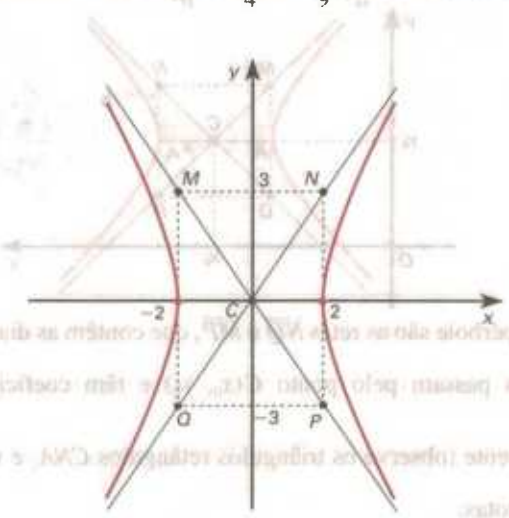
$$\overleftrightarrow{NQ}\begin{cases} C(x_0, y_0) \\ m_1 = \dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow y - y_0 = \frac{a}{b}(x - x_0);$$

$$\overleftrightarrow{MP}\begin{cases} C(x_0, y_0) \\ m_2 = -\dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{a}{b}(x - x_0).$$

Exercícios resolvidos

R.18 Obter as equações das assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Resolução



A assíntota $\overleftrightarrow{NQ}$ passa pelos pontos $C(0, 0)$ e $N(2, 3)$. Logo, seu coeficiente angular é $m_1 = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}$.

Assim, temos: $\overleftrightarrow{NQ}\begin{cases} C(0,0) \\ m_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0) \therefore \quad y = \frac{3x}{2}$.

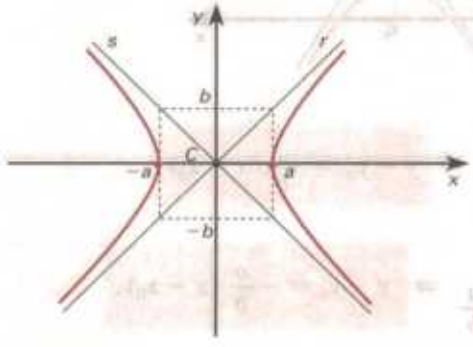
A assíntota $\overleftrightarrow{MP}$ passa pelos pontos $C(0, 0)$ e $M(-2, 3)$. Logo, seu coeficiente angular é $m_2 = \frac{3-0}{-2-0} = -\frac{3}{2}$.

Assim, temos: $\overleftrightarrow{MP}\begin{cases} C(0,0) \\ m_2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 0) \therefore \quad y = -\frac{3x}{2}$.

R.19 Provar que as assíntotas r e s de uma hipérbole $\mathcal{H}$ são exteriores a $\mathcal{H}$.

Resolução

Sem perda de generalidade, podemos considerar uma hipérbole de centro na origem do sistema cartesiano e eixo real contido no eixo das abscissas, ou seja:



$\mathcal{H}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Temos:

$$r\begin{cases} C(0,0) \\ m_r = \dfrac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \frac{b}{a}(x - 0) \therefore y = \frac{bx}{a};$$

$$s\begin{cases} C(0,0) \\ m_s = -\dfrac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -\frac{b}{a}(x - 0) \therefore y = -\frac{bx}{a}.$$

- O conjunto $r \cap \mathcal{H}$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} y = \dfrac{bx}{a} & \text{(I)} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1. & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{bx}{a}\right)^2}{b^2} = 1 \therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{\frac{b^2x^2}{a^2}}{b^2} = 1 \therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \therefore 0 = 1. \textbf{ (Absurdo!)}$$

Esse absurdo nos leva a concluir que r é exterior a $\mathcal{H}$.

- O conjunto $s \cap \mathcal{H}$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} y = -\dfrac{bx}{a} & \text{(III)} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1. & \text{(IV)} \end{cases}$

Substituindo (III) em (IV), obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(-\frac{bx}{a}\right)^2}{b^2} = 1 \therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{\frac{b^2x^2}{a^2}}{b^2} = 1 \therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \therefore 0 = 1. \textbf{ (Absurdo!)}$$

Logo, s é exterior a $\mathcal{H}$.

R.20 Para que valores reais de m a reta r: $y = mx$ e a hipérbole $\mathcal{H}$: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ têm intersecção não-vazia?

Resolução

Para que r e $\mathcal{H}$ tenham intersecção não-vazia, o sistema formado por suas equações deve ser possível.

Impondo essa condição, temos: $\begin{cases} y = mx & \text{(I)} \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1. & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(mx)^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{m^2x^2}{9} = 1 \therefore 9x^2 - 4m^2x^2 = 36 \therefore (9 - 4m^2)x^2 - 36 = 0.$$

Essa equação terá solução se, e somente se:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 9 - 4m^2 \neq 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 0^2 - 4(9 - 4m^2)(-36) \geq 0 \\ m \neq \dfrac{3}{2} \text{ e } m \neq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

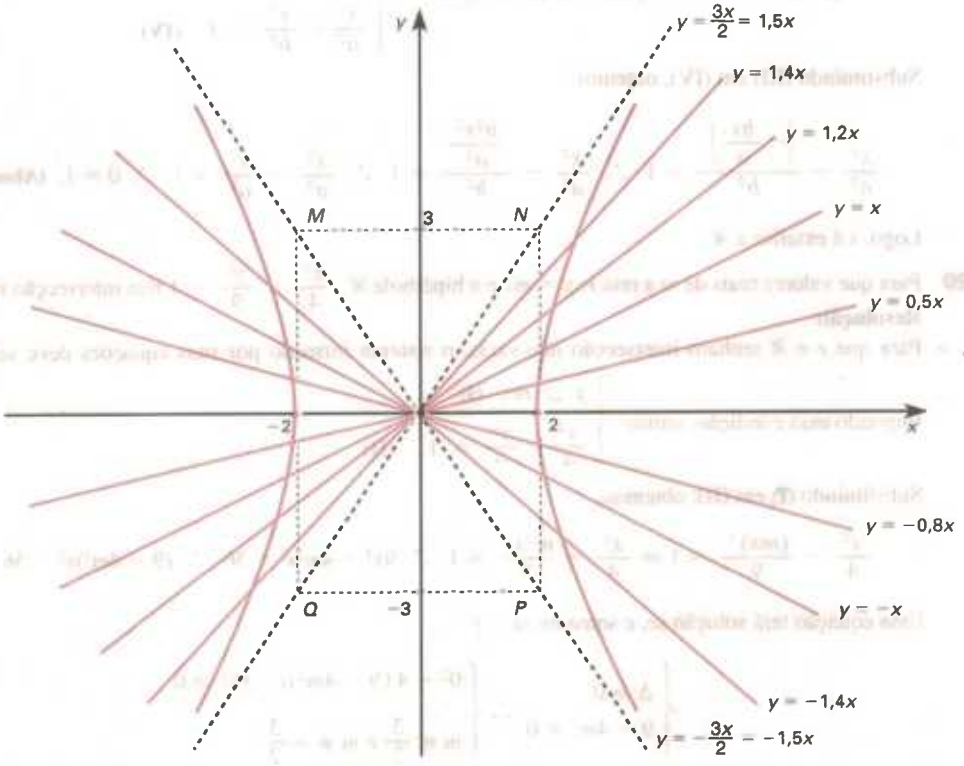
$$\therefore \begin{cases} 144(9 - 4m^2) \geq 0 \\ m \neq \dfrac{3}{2} \text{ e } m \neq -\dfrac{3}{2} \end{cases} \therefore \begin{cases} 9 - 4m^2 \geq 0 \\ m \neq \dfrac{3}{2} \text{ e } m \neq -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Estudamos o sinal da função $f(m) = 9 - 4m^2$:

Vemos que $f(m) \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leqslant m \leqslant \frac{3}{2}$. Assim, temos: $\begin{cases} -\frac{3}{2} \leqslant m \leqslant \frac{3}{2} \\ m \neq -\frac{3}{2} \text{ e } m \neq \frac{3}{2}. \end{cases}$

Logo, os valores de m são todos os valores reais tais que $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$.

Note que, sob essa condição, temos que $\Delta > 0$ e, portanto, cada uma das retas $y = mx$, $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$, é secante à hipérbole.
Graficamente, temos:



Concluímos que qualquer reta que passa pelo centro da hipérbole e intercepta o lado $\overline{NP}$ do retângulo $MNPQ$, em pontos entre N e P, é secante à hipérbole. Podemos deduzir assim que a distância entre cada assíntota e a hipérbole tende a zero quando x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a), B.3 (a, b), B.4 (a, b), B.5 (a), B.6 (a), B.7 (a, b), B.9 (a, b, c), B.10 (a, b), B.11 (a, b, c, d), B.12 (a, b), C.2, C.3, C.6.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2 (b), B.3 (c, d), B.4 (c, d), B.5 (b), B.6 (b), B.7 (c, d), B.8, B.9 (d, e, f), B.10 (c, d), B.11 (e até h), B.12 (c, d), C.1, C.4, C.5, C.7, C.8, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Utilizando a definição, obtenha uma equação da hipérbole de focos F_1 e F_2, cujo eixo real mede $2a$, em cada um dos seguintes casos:

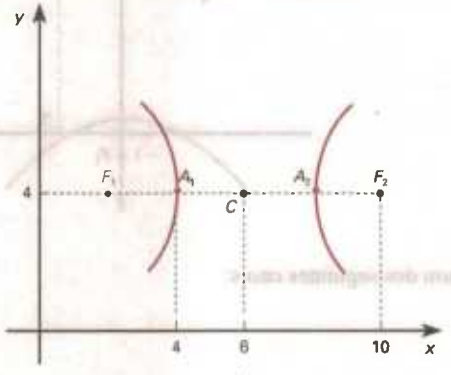
a) $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ e $2a = 2$;
b) $F_1(1, 1)$, $F_2(0, 0)$ e $2a = 1$;
c) $F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$ e $2a = 4$;
d) $F_1(1, 1)$, $F_2(-1, -1)$ e $2a = 2$.

B.2 Calcule a distância focal, a excentricidade e a medida do eixo imaginário da hipérbole de focos F_1 e F_2, cujo eixo real mede $2a$, em cada um dos seguintes casos:

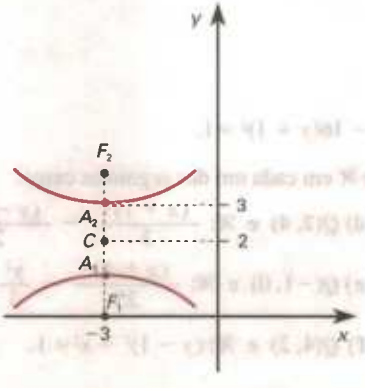
a) $F_1(5, 0)$, $F_2(15, 0)$ e $2a = 6$;
b) $F_1(1, 1)$, $F_2(1, 13)$ e $2a = 2$.

B.3 Obtenha a equação reduzida da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

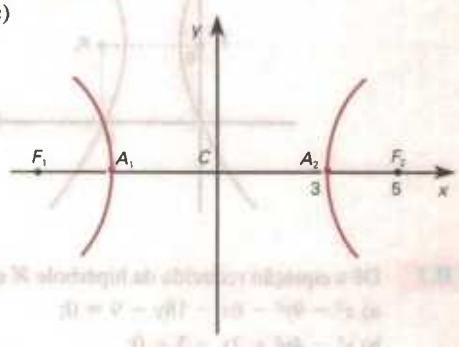
a)



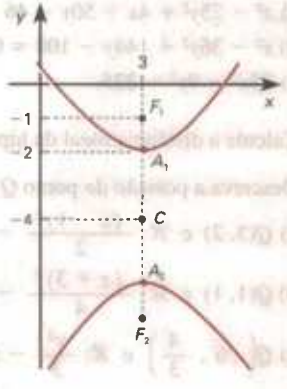
b)



c)



d)

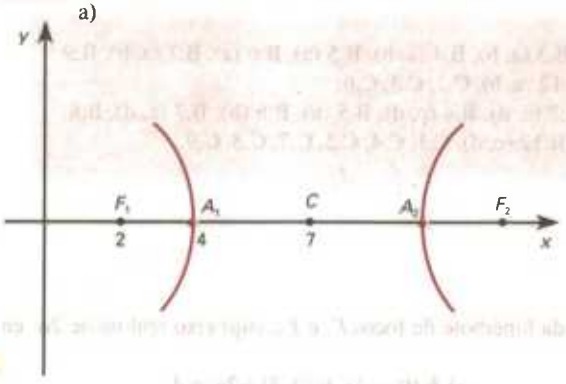


B.4 Esboce o gráfico da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

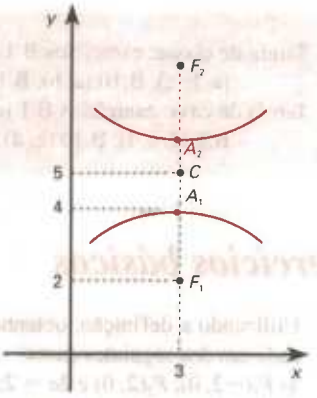
a) $\mathcal{H}$: $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$;
b) $\mathcal{H}$: $(y+1)^2 - \dfrac{x^2}{8} = 1$;
c) $\mathcal{H}$: $\dfrac{(x-2)^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$;
d) $\mathcal{H}$: $y^2 - \dfrac{(x-4)^2}{9} = 1$.

B.5 Determine a excentricidade e a equação reduzida da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

a)

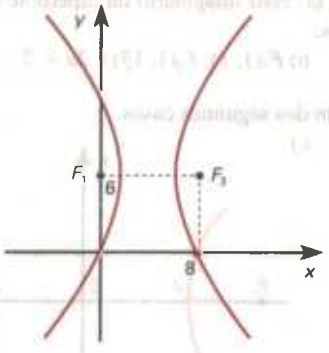


b)

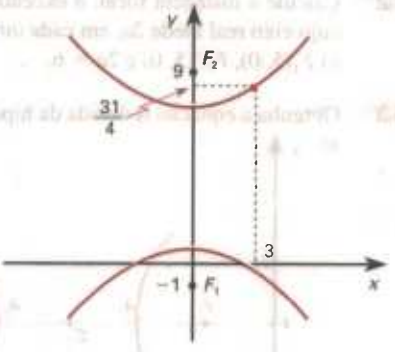


B.6 Obtenha a equação reduzida da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

a)



b)



B.7 Dê a equação reduzida da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $x^2 - 9y^2 - 6x - 18y - 9 = 0$;

b) $x^2 - 4y^2 + 2x - 3 = 0$;

c) $x^2 - 25y^2 + 4x + 50y - 46 = 0$;

d) $x^2 - 36y^2 + 144y - 108 = 0$;

e) $25x^2 - 9y^2 = 225$.

B.8 Calcule a distância focal da hipérbole de equação $9x^2 - 16(y + 1)^2 = 1$.

B.9 Descreva a posição do ponto Q em relação à hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $Q(3, 2)$ e $\mathcal{H}$: $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$;

b) $Q(1, 1)$ e $\mathcal{H}$: $\frac{(x+3)^2}{4} - y^2 = 1$;

c) $Q\left(\sqrt{6}, \frac{4}{3}\right)$ e $\mathcal{H}$: $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$;

d) $Q(2, 4)$ e $\mathcal{H}$: $\frac{(x+1)^2}{3} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$;

e) $Q(-1, 0)$ e $\mathcal{H}$: $\frac{(x+4)^2}{25} - \frac{y^2}{3} = 1$;

f) $Q(4, 2)$ e $\mathcal{H}$: $(y - 1)^2 - x^2 = 1$.

B.10 Represente no plano cartesiano cada uma das seguintes inequações:

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \geqslant 1$;

b) $(y - 1)^2 - x^2 < 1$;

c) $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{2} > 1$;

d) $\frac{(y+3)^2}{9} - (x + 2)^2 \leqslant 1$.

B.11 Determine a intersecção da reta r com a hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $r: y = 3x + 1$ e $\mathcal{H}: y^2 - x^2 = 1$;

b) $r: x - y - 1 = 0$ e $\mathcal{H}: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$;

c) $r: 3x - y - 12 = 0$ e $\mathcal{H}: (x - 4)^2 - \frac{y^2}{9} = 1$;

d) $r: x - y + 8 = 0$ e $\mathcal{H}: \frac{(y - 3)^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$;

e) $r: x - y - 1 = 0$ e $\mathcal{H}: \frac{x^2}{8} - y^2 = 1$;

f) $r: y = x$ e $\mathcal{H}: \frac{x^2}{3} - \frac{(y - 1)^2}{2} = 1$;

g) $r: x - y + 3 = 0$ e $\mathcal{H}: \frac{(y - 3)^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$;

h) $r: 3x - y + 2 = 0$ e $\mathcal{H}: (x - 2)^2 - \frac{y^2}{9} = 1$.

B.12 Obtenha as equações das assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;

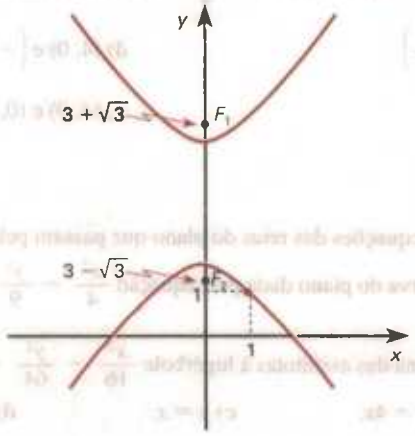
b) $\frac{(y + 2)^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$;

c) $\frac{x^2}{36} - \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$;

d) $\frac{(y - 5)^2}{4} - (x + 3)^2 = 1$.

Exercícios complementares

C.1 Obtenha a equação reduzida da hipérbole cujo gráfico é:



C.2 Qual é a equação reduzida da hipérbole de excentricidade $e = \frac{5}{3}$, cujos focos são $F_1(-6, 0)$ e $F_2(14, 0)$?

C.3 A equação de uma hipérbole $\mathcal{H}$ é $x^2 - 2y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$. Escreva essa equação sob a forma reduzida e calcule a excentricidade de $\mathcal{H}$.

C.4 Represente graficamente a hipérbole de equação $5x^2 - 4y^2 - 10x - 15 = 0$.

C.5 Encontre uma equação da hipérbole de focos $F_1(3, 2)$ e $F_2(9, 2)$, cujo eixo imaginário mede 4 unidades.

C.6 Considere a reta r: $y = mx + 1$ e a hipérbole $\mathcal{H}$: $x^2 - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$. Obtenha os valores reais de m de modo que:

a) a reta r seja tangente à hipérbole $\mathcal{H}$;

b) a reta r seja exterior à hipérbole $\mathcal{H}$;

c) a reta r seja secante à hipérbole $\mathcal{H}$.

C.7 Determine o valor real de k de modo que a reta r: $y = x + k$ seja exterior à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

C.8 Encontre os possíveis valores reais de k de modo que a reta r: $y = 2x + k$ seja tangente à hipérbole $\mathcal{H}$: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$.

C.9 Dê as equações das retas paralelas à reta r: $x - 2y + 1 = 0$ e tangentes à hipérbole $\mathcal{H}$: $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fesp-PE) Em relação à hipérbole de equação $x^2 - 3y^2 = 12$, assinale a alternativa falsa:

a) seu eixo real mede $4\sqrt{3}$.

b) seu eixo imaginário mede 4.

c) sua distância focal mede 8.

d) sua excentricidade é $\sqrt{3}$.

e) suas assíntotas são $\pm\sqrt{3}\,x - 3y = 0$.

V.2 (FGV-SP) Dados a circunferência $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = 4$, a hipérbole $\mathcal{H}$: $x^2 - y^2 = 1$ e o ponto $P(3, 1)$, pode-se afirmar que:

a) P é interior a $\mathcal{C}$ e exterior a $\mathcal{H}$.

b) P é exterior a $\mathcal{C}$ e interior a $\mathcal{H}$.

c) P é exterior a $\mathcal{C}$ e exterior a $\mathcal{H}$.

d) P é interior a $\mathcal{C}$ e interior a $\mathcal{H}$.

e) P pertence a $\mathcal{C}$ e é exterior a $\mathcal{H}$.

V.3 (Cescea) Os pontos de intersecção da reta $y = \frac{x}{4} - 1$ com a hipérbole $x^2 - 4y^2 = 16$ são:

a) $(-4, 0)$ e $\left(-\frac{20}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

b) $(4, 0)$ e $\left(\frac{20}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

c) $(4, 0)$ e $\left(-\frac{20}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

d) $(4, 0)$ e $\left(-\frac{20}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

e) $(4, 0)$ e $(0, 4)$.

V.4 (Fuvest-SP) Determine as equações das retas do plano que passam pela origem do sistema de coordenadas e que não interceptam a curva do plano dada pela equação $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

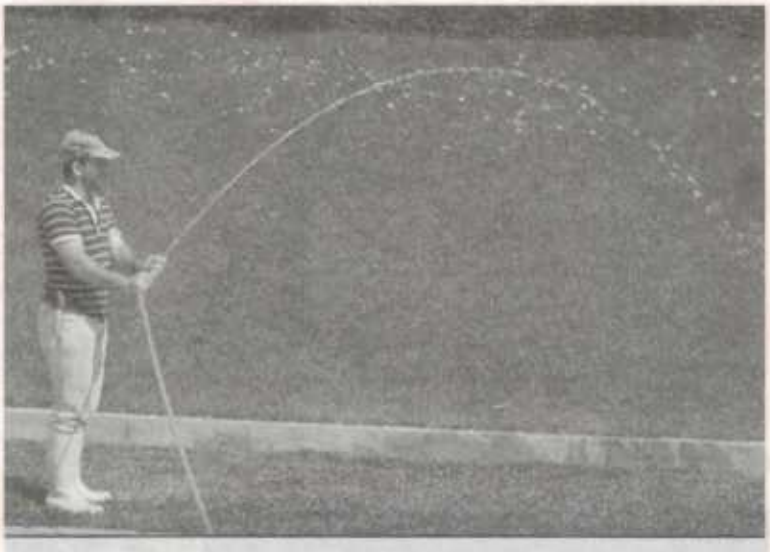
V.5 (PUC-SP) A equação de uma das assíntotas à hipérbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ é:

a) $y = 2x - 1$. b) $y = 4x$. c) $y = x$. d) $y = 2x + 1$. e) $y = 2x$.

Capítulo 13
A parábola

1. Introdução

Com uma mangueira, dirija o jato de água obliquamente para cima e observe a trajetória percorrida pela água.



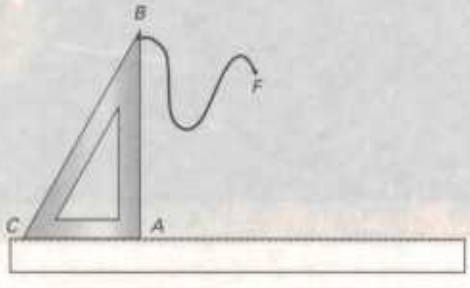
LEVY MENDES JR.

Essa trajetória é parte de uma curva denominada **parábola**.

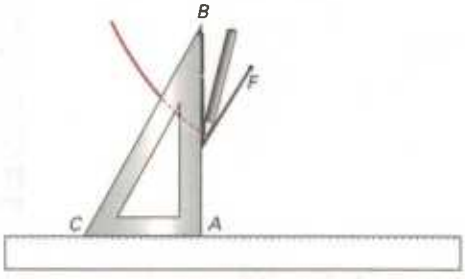
O traçado da parábola pode ser feito do seguinte modo:

• fixe no vértice B de um esquadro ABC, retângulo em A, um barbante de comprimento BA;

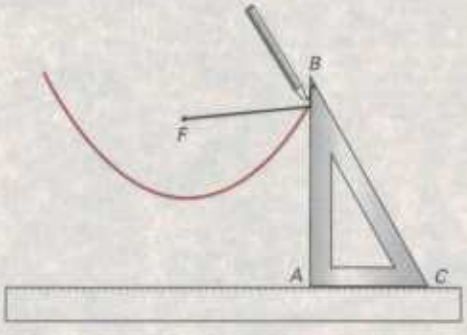
• fixe a outra extremidade do barbante em um ponto F de uma tábua, apoiando sobre esta o esquadro acoplado a uma régua;



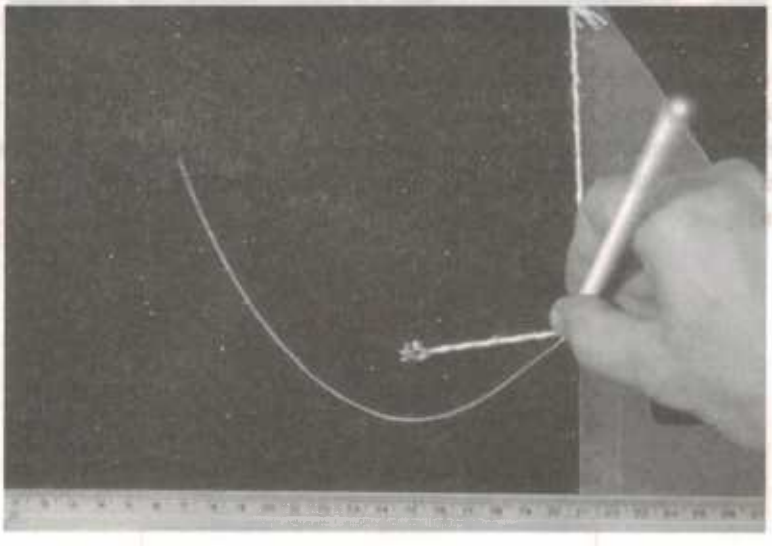
• a seguir pressione o barbante contra o lado $\overline{BA}$ do esquadro com a ponta de um lápis e movimente o esquadro rente à régua, deslizando, conseqüentemente, a ponta do lápis, mantendo-a sempre encostada no esquadro;



• ao passar pelo ponto F, inverta a posição do esquadro, continuando o traçado.



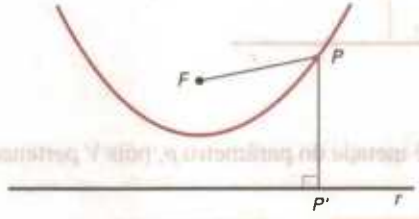
A figura assim construída é chamada de **parábola**.



LUIZ ANTONIO & SÉRGIO SCAZUFICA

2. Definição de parábola

Dados um ponto F e uma reta r de um plano, $F \notin r$, chama-se **parábola** o conjunto dos pontos desse plano equidistantes de r e F.

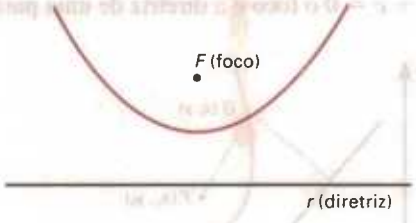


$PF = PP'$

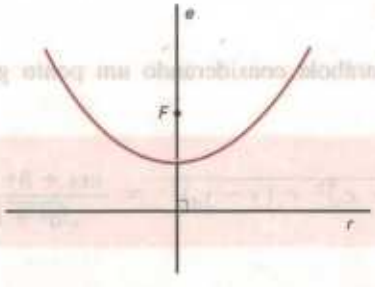
(P' é a projeção ortogonal de P sobre r.)

2.1. Elementos da parábola

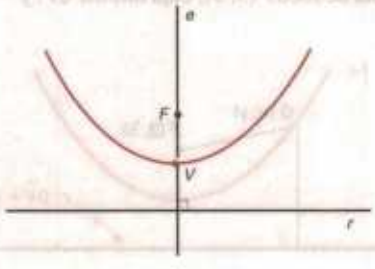
• O ponto F e a reta r são o **foco** e a **diretriz** da parábola, respectivamente.



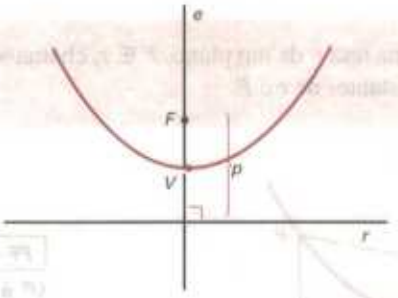
• A reta e que passa por F e é perpendicular à diretriz é o **eixo de simetria** da parábola.



• O ponto V, intersecção da parábola com o eixo e, é o **vértice** da parábola.



• A distância p do foco à diretriz é chamada de "**parâmetro** da parábola".

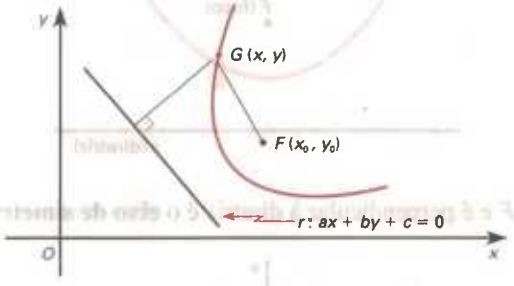


Note que a distância entre o vértice V e o foco F é metade do parâmetro p, pois V pertence à parábola e, portanto, V equidista de F e r. Assim, temos:

$$\begin{cases} VF = Vr \\ VF + Vr = p \end{cases} \Rightarrow \boxed{VF = \frac{p}{2}} \text{ e } \boxed{Vr = \frac{p}{2}}.$$

3. Equação da parábola

Sejam $F(x_0, y_0)$ e $r: ax + by + c = 0$ o foco e a diretriz de uma parábola, respectivamente.



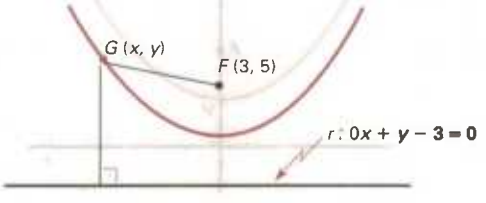
Obtém-se uma equação dessa parábola considerando um ponto genérico $G(x, y)$ e impondo que $GF = Gr$, ou seja:

$$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$$

Exercícios resolvidos

R.1 Obter uma equação da parábola de foco $F(3, 5)$, cuja diretriz é $r: y - 3 = 0$.

Resolução



Uma equação da parábola é obtida considerando-se um ponto genérico $G(x, y)$ e impondo que $GF = GR$, ou seja:

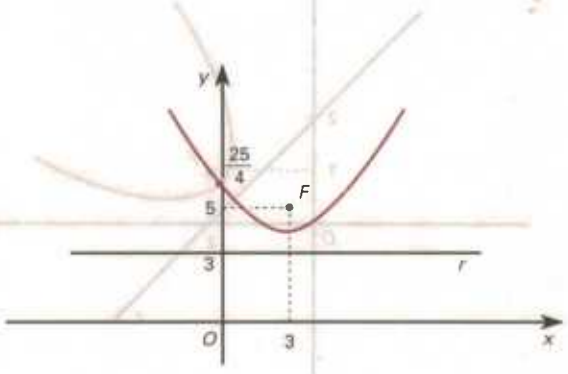
$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{|0x + y - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \quad \therefore \quad \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = |y-3|.$$

Quadramos ambos os membros dessa igualdade:

$$\left(\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}\right)^2 = (|y-3|)^2 \quad \therefore \quad (x-3)^2 + (y-5)^2 = (y-3)^2$$

$$\therefore \quad x^2 - 6x + \cancel{9} + \cancel{y^2} - 10y + 25 = \cancel{y^2} - 6y + \cancel{9} \quad \therefore \quad x^2 - 6x - 4y + 25 = 0.$$

Graficamente, temos:



- Para obter o ponto de intersecção da parábola com o eixo Oy, basta substituirmos por **zero** a variável x da equação:

$$x = 0 \quad \therefore \quad 0^2 - 6 \cdot 0 - 4y + 25 = 0 \quad \therefore \quad y = \frac{25}{4}.$$

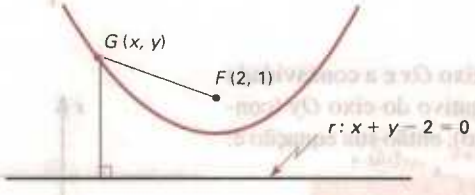
- Note que, se atribuirmos o valor zero à variável y da equação da parábola:

$$y = 0 \quad \therefore \quad x^2 - 6x - 4 \cdot 0 + 25 = 0 \quad \therefore \quad x^2 - 6x + 25 = 0,$$

obtemos uma equação do 2º grau com discriminante negativo ($\Delta = -64$). Isso significa que a parábola não tem ponto em comum com o eixo Ox.

R.2 Obter uma equação da parábola de foco $F(2, 1)$, cuja diretriz é $r: x + y - 2 = 0$.

Resolução



Obtém-se uma equação da parábola considerando um ponto genérico $G(x, y)$ e impondo que $GF = Gr$, ou seja:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x + y - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \quad \therefore \quad \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x + y - 2|}{\sqrt{2}}.$$

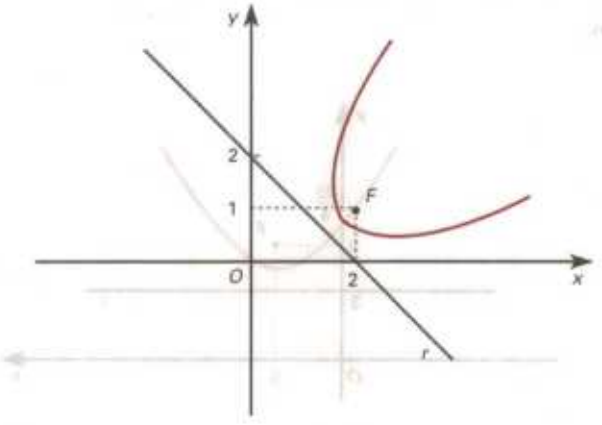
Quadramos ambos os membros dessa igualdade:

$$\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}\right)^2 \therefore (x-2)^2+(y-1)^2 = \frac{(x+y-2)^2}{2}$$

$$\therefore x^2-4x+4+y^2-2y+1 = \frac{x^2+y^2+4+2xy-4x-4y}{2}$$

$$\therefore 2x^2-8x+8+2y^2-4y+2 = x^2+y^2+4+2xy-4x-4y \therefore x^2+y^2-2xy-4x+6=0.$$

Graficamente, temos:



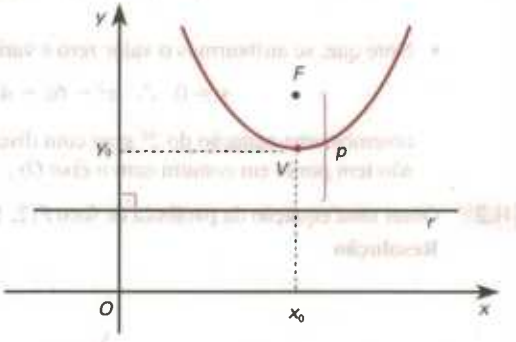
3.1. Equação reduzida da parábola

Se uma parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e parâmetro p tem:

• a diretriz paralela ao eixo Ox e a concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Oy (concavidade voltada para cima), então sua equação é:

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0);$$

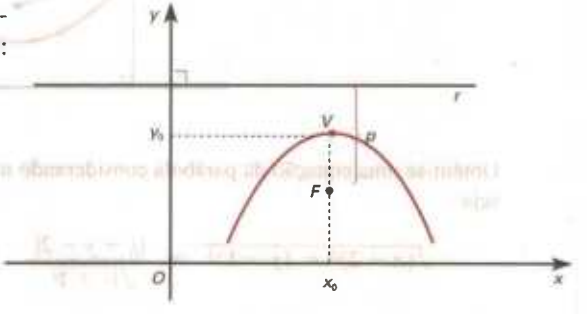
Primeiro caso



• a diretriz paralela ao eixo Ox e a concavidade voltada para o sentido negativo do eixo Oy (concavidade voltada para baixo), então sua equação é:

$$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0);$$

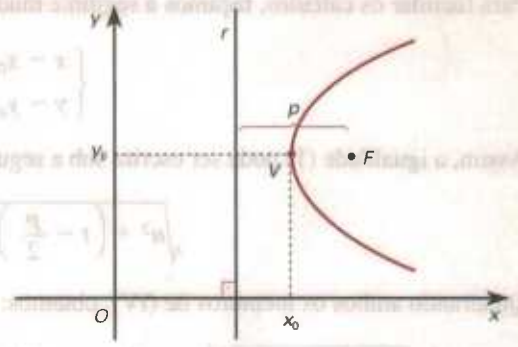
Segundo caso



• a diretriz paralela ao eixo Oy e a concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Ox (concavidade voltada para a direita), então sua equação é:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0);$$

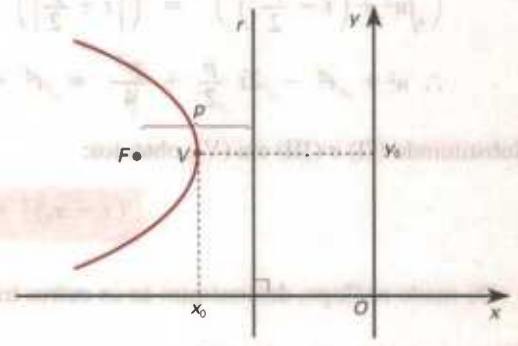
Terceiro caso



• a diretriz paralela ao eixo Oy e a concavidade voltada para o sentido negativo do eixo Ox (concavidade voltada para a esquerda), então sua equação é:

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0).$$

Quarto caso

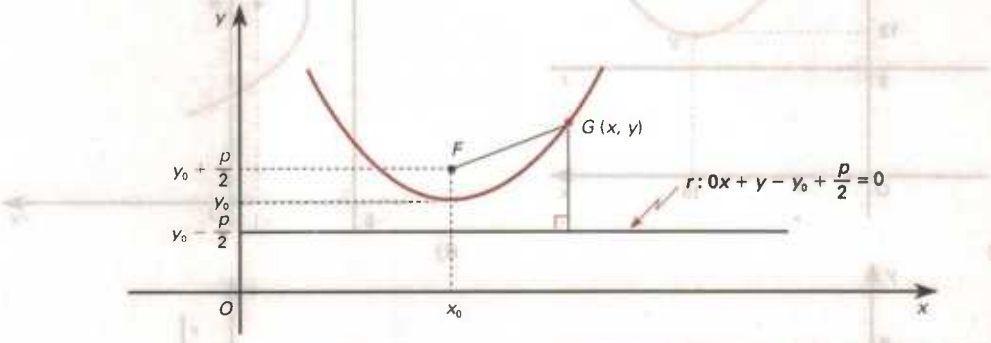


Essas quatro equações são denominadas "**equações reduzidas** das parábolas".

Vamos demonstrar apenas o primeiro caso e deixar os outros três para você fazer como exercício.

Demonstração

Consideremos a parábola de vértice $V(x_0, y_0)$, **parâmetro** p, **diretriz paralela ao eixo** Ox e concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Oy:



Temos o foco $F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$ e a diretriz r: $y = y_0 - \frac{p}{2}$ ou r: $0x + y - y_0 + \frac{p}{2} = 0$. Tomando um ponto genérico $G(x, y)$ e impondo que $GF = Gr$, temos a equação da parábola:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + \left[y - \left(y_0 + \frac{p}{2}\right)\right]^2} = \frac{\left|0x + y - y_0 + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}. \quad \text{(I)}$$

Para facilitar os cálculos, façamos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x - x_0 = u & \text{(II)} \\ y - y_0 = t. & \text{(III)} \end{cases}$$

Assim, a igualdade (I) pode ser escrita sob a seguinte forma:

$$\sqrt{u^2 + \left(t - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|t + \frac{p}{2}\right|. \quad \text{(IV)}$$

Quadrando ambos os membros de (IV), obtemos:

$$\left(\sqrt{u^2 + \left(t - \frac{p}{2}\right)^2}\right)^2 = \left(\left|t + \frac{p}{2}\right|\right)^2 \therefore u^2 + \left(t - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(t + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\therefore u^2 + \cancel{t^2} - \cancel{2t}\,\frac{p}{\cancel{2}} + \frac{p^2}{4} = \cancel{t^2} + \cancel{2t}\,\frac{p}{\cancel{2}} + \frac{p^2}{4} \therefore u^2 = 2pt. \quad \text{(V)}$$

Substituindo (II) e (III) em (V), obtemos:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$

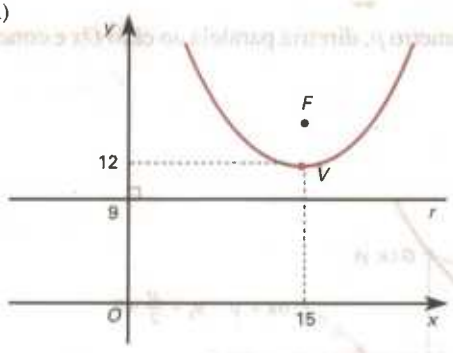
(c.q.d.)

De modo análogo, demonstram-se os outros três casos.

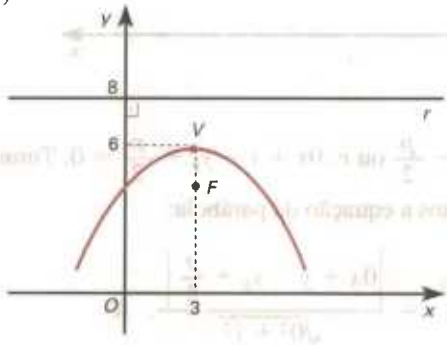
Exercícios resolvidos

R.3 Obter a equação reduzida da parábola $\mathcal{P}$ em cada um dos casos seguintes, sendo F, V e r o foco, o vértice e a diretriz de cada uma, respectivamente.

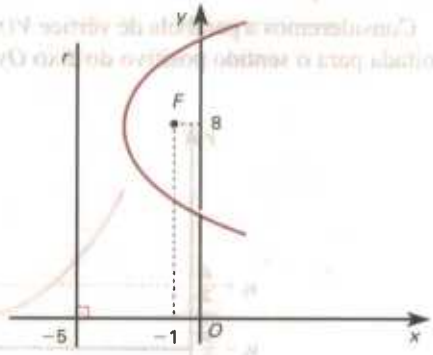
a)



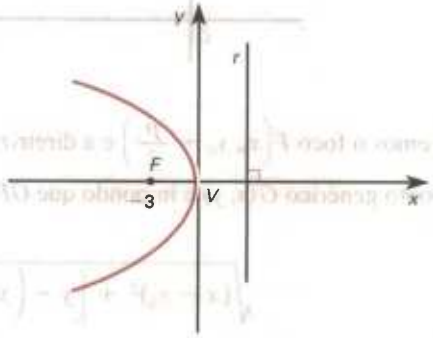
b)



c)



d)



Resolução

a) O vértice da parábola é o ponto $V(15, 12)$.
A distância do foco F à diretriz r é o parâmetro p: $Fr = p$.
Como a distância do vértice à diretriz é metade do parâmetro, temos:

$$Vr = \frac{p}{2} \therefore 12 - 9 = \frac{p}{2} \therefore p = 6.$$

A diretriz é paralela ao eixo Ox e a concavidade da parábola é voltada para cima.
Assim, a equação da parábola é dada por $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, em que $x_0 = 15$, $y_0 = 12$ e $p = 6$, isto é, $(x - 15)^2 = 12(y - 12)$.

b) O vértice V da parábola é o ponto $V(3, 6)$.
A distância do foco F à diretriz r é o parâmetro p: $Fr = p$.
Como a distância do vértice à diretriz é metade do parâmetro, temos:

$$Vr = \frac{p}{2} \therefore 8 - 6 = \frac{p}{2} \therefore p = 4.$$

A diretriz é paralela ao eixo Ox e a concavidade da parábola é voltada para baixo.
Assim, a equação da parábola é dada por $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$, em que $x_0 = 3$, $y_0 = 6$ e $p = 4$, isto é, $(x - 3)^2 = -8(y - 6)$.

c) Como a diretriz é paralela ao eixo Oy, temos que a ordenada y_V do vértice V é a mesma do foco F, ou seja, $y_V = 8$, e a abscissa x_V de V é a mesma do ponto médio do segmento de extremos $(-5, 0)$ e $(-1, 0)$, ou seja, $x_V = \frac{-5 + (-1)}{2} = -3$. Assim, o vértice é o ponto $V(-3, 8)$.

O parâmetro p é a distância entre o foco e a diretriz: $p = -1 - (-5) \therefore p = 4$.
A concavidade da parábola é voltada para a direita.
Portanto, a equação da parábola é dada por $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, sendo $x_0 = -3$, $y_0 = 8$ e $p = 4$, ou seja, $(y - 8)^2 = 8(x + 3)$.

d) O vértice V é o ponto $V(0, 0)$.
A distância do vértice ao foco é metade do parâmetro p: $VF = \frac{p}{2} \therefore 3 = \frac{p}{2} \therefore p = 6$.

A diretriz é paralela ao eixo Oy e a concavidade da parábola é voltada para a esquerda.
Logo, a equação da parábola é dada por $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$ tal que $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e $p = 6$, ou seja, $y^2 = -12x$.

R.4 Esboçar o gráfico da parábola $\mathcal{P}$ em cada um dos seguintes casos:

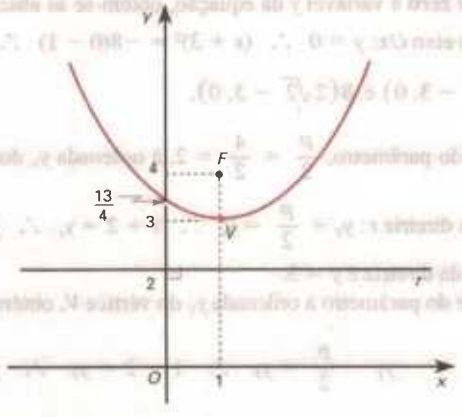
a) $\mathcal{P}: (x - 1)^2 = 4(y - 3)$;
b) $\mathcal{P}: (x + 3)^2 = -8(y - 1)$;
c) $\mathcal{P}: y^2 = 12(x + 2)$;
d) $\mathcal{P}: (y - 4)^2 = -x$.

Resolução

a) Comparando a equação $(x - 1)^2 = 4(y - 3)$ com a equação $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, temos que:

$$x_0 = 1,\ y_0 = 3 \text{ e } p = 2.$$

Assim, o vértice V e o parâmetro p são, respectivamente, $V(1, 3)$ e $p = 2$.
Logo, o gráfico de $\mathcal{P}$ é:



Atribuindo o valor **zero** à variável x da equação, obtém-se a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo Oy: $x = 0 \Rightarrow (0 - 1)^2 = 4(y - 3) \therefore y = \frac{13}{4}$.

Somando metade do parâmetro, $\frac{p}{2} = \frac{2}{2} = 1$, à ordenada y_V do vértice V, obtém-se a ordenada y_F do foco F: $y_V + \frac{p}{2} = y_F \Rightarrow 3 + 1 = y_F \therefore y_F = 4$.

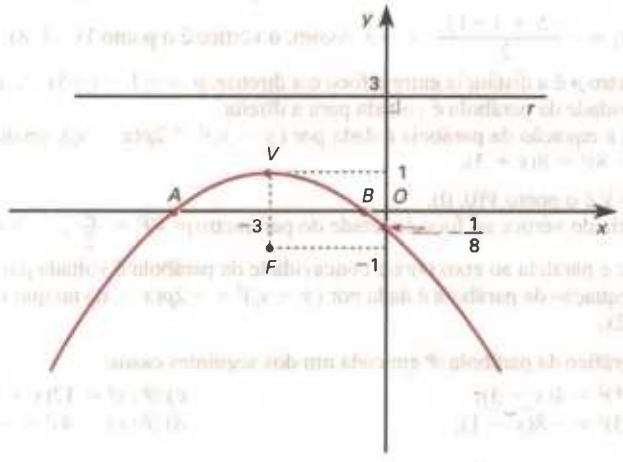
Subtraindo metade do parâmetro à ordenada y_V do vértice V, obtém-se a ordenada y_r de todos os pontos da diretriz r: $y_V - \frac{p}{2} = y_r \therefore 3 - 1 = y_r \therefore y_r = 2$.

Logo, a equação da diretriz é $y = 2$.

b) Comparando $(x + 3)^2 = -8(y - 1)$ com $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$, obtemos:

$$x_0 = -3,\ y_0 = 1 \text{ e } p = 4.$$

Assim, o vértice V e o parâmetro p são, respectivamente, $V(-3, 1)$ e $p = 4$.
Logo, o gráfico de $\mathcal{P}$ é:



Atribuindo o valor **zero** à variável x da equação, obtém-se a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo Oy: $x = 0 \therefore (0 + 3)^2 = -8(y - 1) \therefore y = -\frac{1}{8}$.

Atribuindo o valor **zero** à variável y da equação, obtêm-se as abscissas dos pontos A e B de intersecção da parábola com o eixo Ox: $y = 0 \therefore (x + 3)^2 = -8(0 - 1) \therefore x = \pm 2\sqrt{2} - 3$.

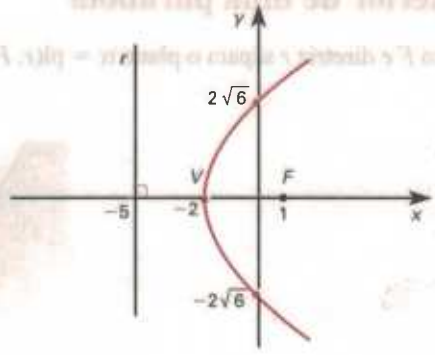
Logo, $A\left(-2\sqrt{2} - 3, 0\right)$ e $B\left(2\sqrt{2} - 3, 0\right)$.

Somando metade do parâmetro, $\frac{p}{2} = \frac{4}{2} = 2$, à ordenada y_V do vértice V, obtém-se a ordenada y_r de todos os pontos da diretriz r: $y_V + \frac{p}{2} = y_r \therefore 1 + 2 = y_r \therefore y_r = 3$.

Assim, a equação da diretriz é $y = 3$.
Subtraindo metade do parâmetro à ordenada y_V do vértice V, obtém-se a ordenada y_F do foco F:

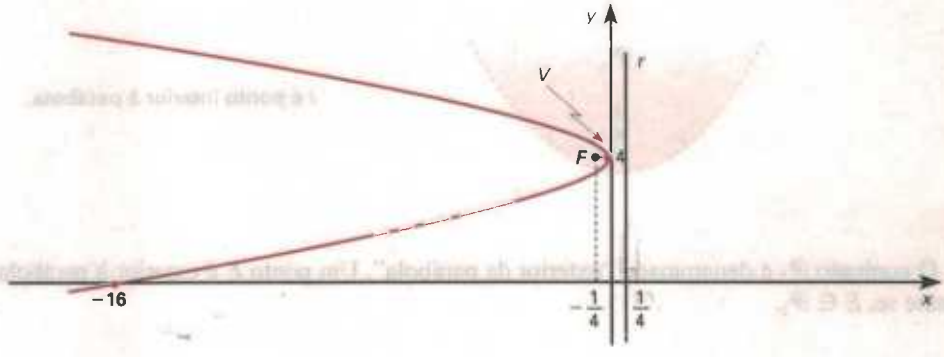
$$y_V - \frac{p}{2} = y_F \therefore 1 - 2 = y_F \therefore y_F = -1.$$

c) Comparando $y^2 = 12(x + 2)$ com $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, obtemos $x_0 = -2$, $y_0 = 0$ e $p = 6$.
Assim, o vértice V e o parâmetro p são, respectivamente, $V(-2, 0)$ e $p = 6$.
Logo, o gráfico de $\mathcal{P}$ é:



d) Comparando $(y - 4)^2 = -x$ com $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$, obtemos $x_0 = 0$, $y_0 = 4$ e $p = \frac{1}{2}$.

Assim, o vértice V e o parâmetro p são, respectivamente, $V(0, 4)$ e $p = \frac{1}{2}$.
Logo, o gráfico de $\mathcal{P}$ é:



R.5 Uma parábola $\mathcal{P}$ tem equação $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{5}{2}$. Pede-se escrever essa equação sob a forma reduzida.

Resolução

$$y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{5}{2}$$

$$\therefore\ 2y = x^2 - 2x - 5.$$

Isolamos, em um dos membros da igualdade, os termos na variável que contém o expoente dois, ou seja:

$$2y + 5 = x^2 - 2x.$$

Somamos um mesmo número, no caso o número 1, a ambos os membros dessa igualdade, com a finalidade de obter um quadrado perfeito:

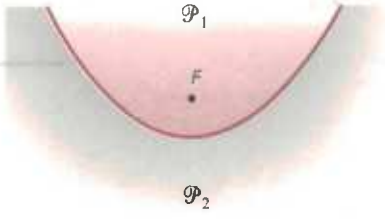
$$2y + 5 + 1 = x^2 - 2x + 1$$
$$\therefore\ 2y + 6 = (x - 1)^2$$
$$\therefore\ (x - 1)^2 = 2(y + 3).$$

4. Posições relativas entre ponto e parábola

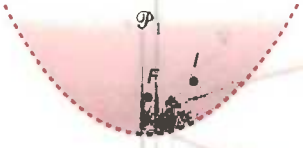
4.1. Interior e exterior de uma parábola

Uma parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz r separa o plano $\alpha = \text{pl}(r, F)$ em duas regiões $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, tais que:

- $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P} = \alpha$;
- $\mathcal{P} \cap (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) = \varnothing$;
- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$;
- $F \in \mathcal{P}_1$.

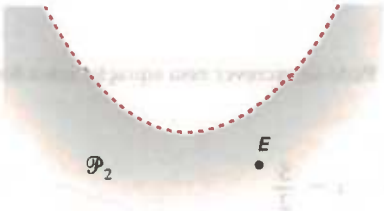


O conjunto $\mathcal{P}_1$ é denominado "interior da parábola". Um ponto I é interior à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se, $I \in \mathcal{P}_1$.



I é ponto interior à parábola.

O conjunto $\mathcal{P}_2$ é denominado "exterior da parábola". Um ponto E é exterior à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se, $E \in \mathcal{P}_2$.



E é ponto exterior à parábola.

Resumindo:

Uma parábola $\mathcal{P}$ e um ponto Q, coplanares, têm três posições relativas possíveis:
I. $Q \in \mathcal{P}$ ou
II. Q é interior a $\mathcal{P}$ ou
III. Q é exterior a $\mathcal{P}$.

Propriedade dos pontos pertencentes à parábola

Por definição de parábola, temos:

Sejam $\mathcal{P}$ uma parábola de foco F e diretriz r e A um ponto do plano que contém $\mathcal{P}$. O ponto A pertence à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se:

$$AF = Ar.$$

Portanto, dados a equação $\mathcal{P}(x, y) = 0$ de uma parábola $\mathcal{P}$ e um ponto $A(x_A, y_A)$, temos que:

$$A \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}(x_A, y_A) = 0.$$

Exercício resolvido

R.6 Qual é a posição relativa do ponto $A(3, 6)$ em relação à parábola $\mathcal{P}$: $(x - 1)^2 = 2(y - 4)$?

Resolução

Substituindo as variáveis x e y da equação por 3 e 6, respectivamente, temos que a sentença $(3 - 1)^2 = 2(6 - 4)$ é verdadeira.

Logo, $A \in \mathcal{P}$.

Propriedade dos pontos interiores à parábola

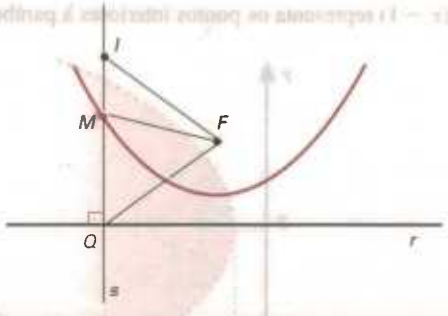
Se I é um ponto interior a uma parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz r, então:

$$IF < Ir.$$

Demonstração

O caso em que I pertence ao eixo de simetria da parábola é imediato. Suponhamos que I não pertença a esse eixo.

Consideremos a reta s perpendicular à diretriz r, por I, tal que $s \cap r = \{Q\}$ e $s \cap \mathcal{P} = \{M\}$.



Temos que $IF < IM + MF$. (I)

Como $M \in \mathcal{P}$, temos que $MF = MQ$. (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos $IF < IM + MQ \Rightarrow IF < IQ \quad \therefore \quad IF < Ir.$ (c.q.d.)

A recíproca desse teorema também é verdadeira. Por isso, podemos enunciar:

Sejam $\mathcal{P}$ uma parábola de foco F e diretriz r e I um ponto do plano que contém $\mathcal{P}$. O ponto I é interior à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se:

$$IF < Ir.$$

Assim, a inequação que representa os pontos $I(x, y)$ interiores à parábola de foco $F(x_F, y_F)$ e de diretriz r: $ax + by + c = 0$ é obtida impondo-se que $IF < Ir$, ou seja:

$$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} < \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \text{(I)}$$

Se o vértice da parábola é o ponto $V(x_0, y_0)$ e seu parâmetro for p, então a inequação (I) se reduz a:

- $(x - x_0)^2 < 2p(y - y_0)$, se a diretriz é paralela ao eixo das abscissas e a concavidade da parábola está voltada para cima.
- $(x - x_0)^2 < -2p(y - y_0)$, se a diretriz é paralela ao eixo das abscissas e a concavidade da parábola está voltada para baixo.
- $(y - y_0)^2 < 2p(x - x_0)$, se a diretriz é paralela ao eixo das ordenadas e a concavidade da parábola está voltada para a direita.
- $(y - y_0)^2 < -2p(x - x_0)$, se a diretriz é paralela ao eixo das ordenadas e a concavidade da parábola está voltada para a esquerda.

Exercícios resolvidos

R.7 Qual é a posição do ponto $P(3, 1)$ em relação à parábola $\mathcal{P}$: $(x - 2)^2 = -4(y - 3)$?

Resolução

Substituindo as variáveis x e y da equação por 3 e 1, respectivamente, temos:

$$\underbrace{(3 - 2)^2}_{1} < \underbrace{-4(1 - 3)}_{8}.$$

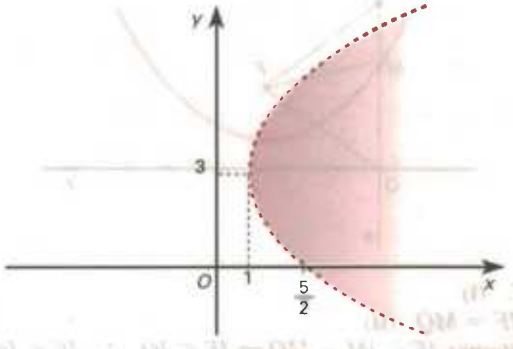
Logo, P é interior a $\mathcal{P}$.

R.8 Representar no plano cartesiano os pontos $P(x, y)$ tais que: $(y - 3)^2 < 6(x - 1)$.

Resolução

A parábola $\mathcal{P}$: $(y - 3)^2 = 6(x - 1)$ possui vértice $V(1, 3)$, diretriz paralela ao eixo das ordenadas e concavidade voltada para a direita.

A inequação $(y - 3)^2 < 6(x - 1)$ representa os pontos interiores à parábola $\mathcal{P}$:



Propriedade dos pontos exteriores à parábola

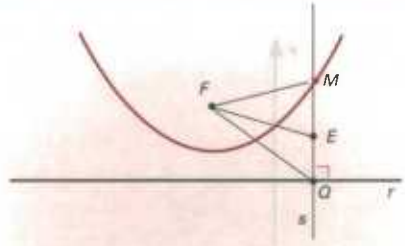
Se E é um ponto exterior a uma parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz r, então:

$$EF > Er.$$

Demonstração

O caso em que E pertence ao eixo de simetria é imediato. Por isso vamos supor que E não pertence a esse eixo.

Consideremos a reta s perpendicular à diretriz r, por E, tal que $s \cap r = \{Q\}$ e $s \cap \mathcal{P} = \{M\}$.



Temos que $MF < EF + ME \therefore EF > MF - ME$. (I)

Como $M \in \mathcal{P}$, temos que $MF = MQ$. (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos $EF > \underbrace{MQ - ME}_{EQ} \therefore EF > EQ \therefore EF > Er$.

(c.q.d.)

A recíproca desse teorema também é verdadeira. Por isso, podemos enunciar:

Sejam $\mathcal{P}$ uma parábola de foco F e diretriz r e E um ponto do plano que contém $\mathcal{P}$. O ponto E é exterior à parábola se, e somente se:

$$EF > Er.$$

Conseqüentemente, a inequação que representa os pontos $E(x, y)$, exteriores à parábola de foco $F(x_F, y_F)$ e de diretriz r: $ax + by + c = 0$, é obtida impondo-se que $EF > Er$, ou seja:

$$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} > \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \text{(I)}$$

Se o vértice da parábola é o ponto $V(x_0, y_0)$ e seu parâmetro for p, então a equação (I) se reduz a:

- $(x - x_0)^2 > 2p(y - y_0)$, se a diretriz é paralela ao eixo das abscissas e a concavidade da parábola está voltada para cima.
- $(x - x_0)^2 > -2p(y - y_0)$, se a diretriz é paralela ao eixo das abscissas e a concavidade da parábola está voltada para baixo.
- $(y - y_0)^2 > 2p(x - x_0)$, se a diretriz é paralela ao eixo das ordenadas e a concavidade da parábola está voltada para a direita.
- $(y - y_0)^2 > -2p(x - x_0)$, se a diretriz é paralela ao eixo das ordenadas e a concavidade da parábola está voltada para a esquerda.

Exercícios resolvidos

R.9 Qual é a posição do ponto $P(3, 2)$ em relação à parábola $\mathcal{P}$: $(y - 1)^2 = -12x$?

Resolução

Substituindo as variáveis x e y da equação por 3 e 2, respectivamente, temos:

$$\underbrace{(2 - 1)^2}_{1} > \underbrace{-12 \cdot 3}_{-36}.$$

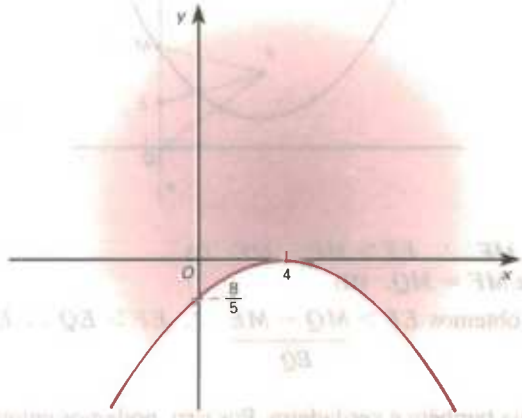
Logo, P é exterior a $\mathcal{P}$.

R.10 Representar no plano cartesiano os pontos $P(x, y)$ tais que $(x - 4)^2 \geqslant -10y$.

Resolução

A parábola $\mathcal{P}$: $(x - 4)^2 = -10y$ possui vértice $V(4, 0)$, diretriz paralela ao eixo das abscissas e concavidade voltada para baixo.

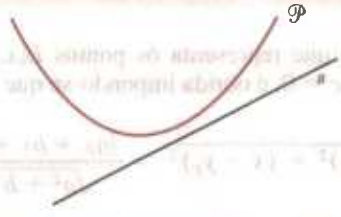
A inequação $(x - 4)^2 \geqslant -10y$ representa os pontos que pertencem a $\mathcal{P}$ ou ao seu exterior:



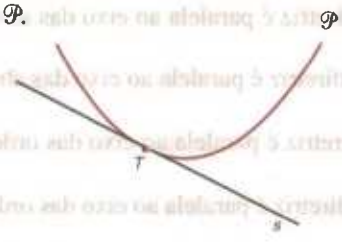
5. Posições relativas entre reta e parábola

Consideremos uma parábola $\mathcal{P}$ e s uma reta, contidas em um mesmo plano.

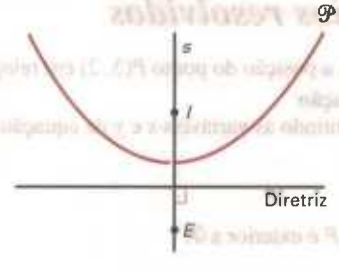
I. A reta s é exterior à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se, todos os pontos de s são exteriores a $\mathcal{P}$.



II. A reta s é tangente à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se, um único ponto de s pertence a $\mathcal{P}$ e todos os demais pontos de s são exteriores a $\mathcal{P}$.



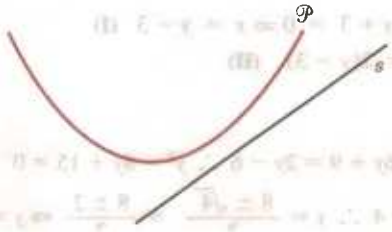
III. A reta s é secante à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se, s passa por um ponto E exterior e por um ponto I interior a $\mathcal{P}$.



5.1. Intersecção entre reta e parábola

Conhecendo as equações de uma reta s e de uma parábola $\mathcal{P}$, o conjunto $s \cap \mathcal{P}$ é o conjunto solução do sistema formado por essas equações. Se esse sistema:

• é impossível, então a reta s é exterior a $\mathcal{P}$:

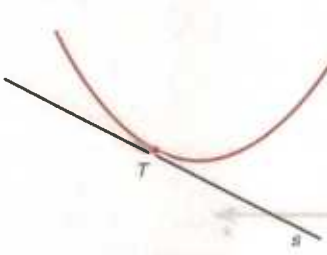


$s \cap \mathcal{P} = \varnothing$.

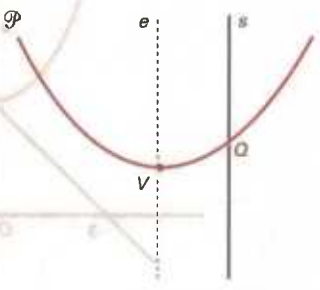
• tem duas soluções distintas, então a reta s é secante a $\mathcal{P}$:

$s \cap \mathcal{P} = \{A, B\}$.

• tem uma única solução, então a reta s é tangente ou secante a $\mathcal{P}$:



$s \cap \mathcal{P} = \{T\}$.



$s \cap \mathcal{P} = \{Q\}$.

Nesse caso, a reta s é paralela ao eixo de simetria e.

Conclusão sobre a posição relativa entre reta e parábola a partir do sistema formado por suas equações

Sejam $s(x, y) = 0$ e $\mathcal{P}(x, y) = 0$ as equações da reta s e da parábola $\mathcal{P}$ respectivamente.

Para resolver o sistema: $\begin{cases} s(x, y) = 0 \\ \mathcal{P}(x, y) = 0, \end{cases}$ isolamos uma das variáveis na equação da reta s e a substituímos na equação da parábola $\mathcal{P}$. Se com essa substituição se obtém:

• uma equação do 2º grau com discriminante positivo, então a reta s é secante à parábola $\mathcal{P}$;
• uma equação do 2º grau com discriminante negativo, então a reta s é exterior à parábola $\mathcal{P}$;
• uma equação do 2º grau com discriminante nulo, então a reta s é tangente à parábola $\mathcal{P}$;
• uma equação do 1º grau, $kx = q$, $\{k, q\} \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, então a reta s é secante à parábola $\mathcal{P}$.

Exercícios resolvidos

R.11 Determinar a intersecção da reta $s: x - y + 3 = 0$ com a parábola $\mathcal{P}: x^2 = 2(y - 3)$.

Resolução

O conjunto $s \cap \mathcal{P}$ é o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \Rightarrow x = y - 3 \quad \text{(I)} \\ x^2 = 2(y - 3). \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

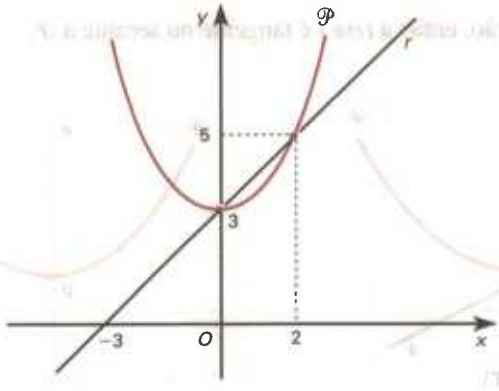
$$(y - 3)^2 = 2(y - 3) \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 2y - 6 \therefore y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$\therefore \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 4 \therefore y = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} \Rightarrow y = 5 \text{ ou } y = 3.$$

Substituindo $y = 5$ em (I), obtemos: $x = 5 - 3 \therefore x = 2$.
Substituindo $y = 3$ em (I), obtemos: $x = 3 - 3 \therefore x = 0$.
Logo, $s \cap \mathcal{P} = \{(2, 5), (0, 3)\}$.

Nota: a substituição da equação (I) na equação (II) nos levou a uma equação do 2º grau com discriminante positivo. Isso nos garante que a reta s é secante à parábola $\mathcal{P}$.

Graficamente, temos:



R.12 Determinar a intersecção da reta $s: x - 2y + 2 = 0$ com a parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4(x - 3)$.

Resolução

O conjunto $s \cap \mathcal{P}$ é o conjunto solução do sistema:

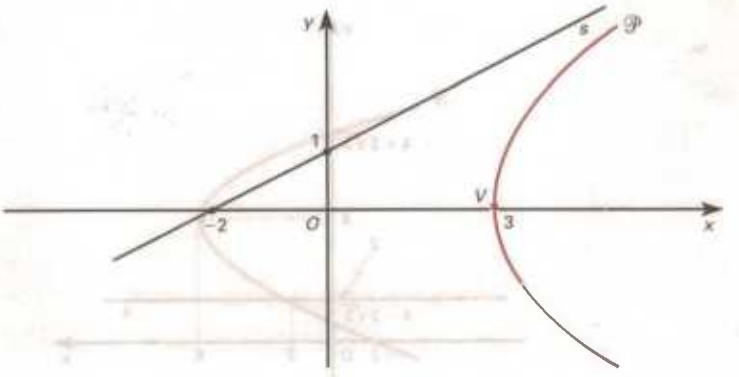
$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow x = 2y - 2 \quad \text{(I)} \\ y^2 = 4(x - 3). \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$y^2 = 4(2y - 2 - 3) \Rightarrow y^2 = 4(2y - 5)$$
$$\therefore y^2 = 8y - 20$$
$$\therefore y^2 - 8y + 20 = 0$$
$$\therefore \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = -16.$$

Como $\Delta < 0$, concluímos que a reta s é exterior a $\mathcal{P}$.

Graficamente, temos:



R.13 Determinar a intersecção da reta $s: x - y - 2 = 0$ com a parábola $\mathcal{P}: (x-2)^2 = 4(y-1)$.

Resolução

O conjunto $s \cap \mathcal{P}$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \Rightarrow x = y + 2 \quad \text{(I)} \\ (x-2)^2 = 4(y-1). \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

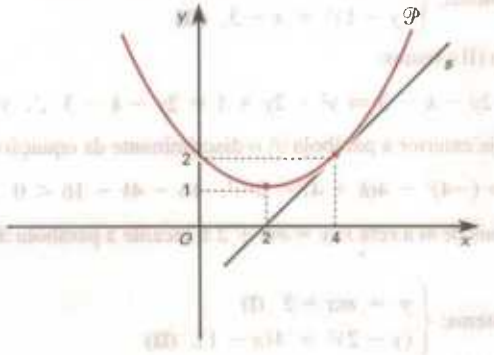
$$(y + \cancel{2} - \cancel{2})^2 = 4(y-1) \Rightarrow y^2 = 4y - 4 \therefore y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \therefore y = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Substituindo $y = 2$ em (I), obtemos: $x = 2 + 2 \therefore x = 4$.
Logo, $s \cap \mathcal{P} = \{(4, 2)\}$.

Nota: como a substituição da equação (I) na equação (II) nos levou a uma equação do 2º grau com discriminante nulo, concluímos que s é tangente a $\mathcal{P}$.

Graficamente, temos:



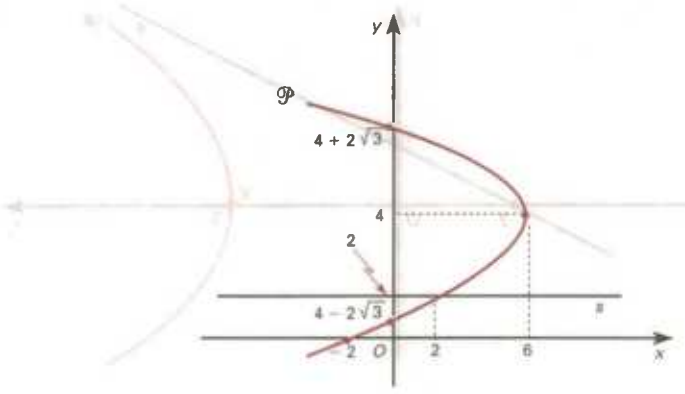
R.14 Obter a intersecção da reta $s: y - 2 = 0$ com a parábola $\mathcal{P}: (y-4)^2 = -2(x-6)$.

Resolução

O conjunto $s \cap \mathcal{P}$ é o conjunto solução do sistema: $\begin{cases} y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \quad \text{(I)} \\ (y-4)^2 = -2(x-6). \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos $(2-4)^2 = -2(x-6) \Rightarrow 4 = -2x + 12 \therefore 2x = 8 \therefore x = 2$.
Como a substituição da equação (I) na equação (II) nos levou a uma equação do 1º grau ($4 = -2x + 12$), concluímos que a reta s é secante à parábola $\mathcal{P}$: $s \cap \mathcal{P} = \{(2, 2)\}$.

Graficamente, temos:



A reta s é paralela ao eixo de simetria da parábola.

R.15 Obter o valor real de k de modo que a reta $s: x - y + k = 0$ seja tangente à parábola $\mathcal{P}: (x - 3)^2 = 2(y - 1)$.

Resolução

Consideremos o sistema: $\begin{cases} x - y + k = 0 \Rightarrow y = x + k \ \textbf{(I)} \\ (x - 3)^2 = 2(y - 1). \ \textbf{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$(x - 3)^2 = 2(x + k - 1) \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2x + 2k - 2 \ \therefore \ x^2 - 8x + 11 - 2k = 0. \ \textbf{(III)}$$

Para que a reta s seja tangente à parábola $\mathcal{P}$, o discriminante da equação (III) deve ser igual a zero, ou seja:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-8)^2 - 4(11 - 2k) = 0 \ \therefore \ 64 - 44 + 8k = 0 \ \therefore \ 8k = -20 \ \therefore \ k = -\frac{5}{2}.$$

R.16 Para que valores reais de k a reta $s: x - 2y + k = 0$ é exterior à parábola $\mathcal{P}: (y - 1)^2 = x - 3$?

Resolução

Consideremos o sistema: $\begin{cases} x - 2y + k = 0 \Rightarrow x = 2y - k \ \textbf{(I)} \\ (y - 1)^2 = x - 3. \ \textbf{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$(y - 1)^2 = 2y - k - 3 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 2y - k - 3 \ \therefore \ y^2 - 4y + k + 4 = 0. \ \textbf{(III)}$$

Para que a reta s seja exterior à parábola $\mathcal{P}$, o discriminante da equação (III) deve ser negativo:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(k + 4) < 0 \ \therefore \ 16 - 4k - 16 < 0 \ \therefore \ -4k < 0 \ \therefore \ k > 0.$$

R.17 Para que valores reais de m a reta $s: y = mx + 2$ é secante à parábola $\mathcal{P}: (y - 2)^2 = 4(x - 1)$?

Resolução

Consideremos o sistema: $\begin{cases} y = mx + 2 \ \textbf{(I)} \\ (y - 2)^2 = 4(x - 1). \ \textbf{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$(mx + 2 - 2)^2 = 4(x - 1) \Rightarrow (mx)^2 = 4(x - 1) \ \therefore \ m^2x^2 = 4x - 4 \ \therefore \ m^2x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Para que a reta s seja secante à parábola $\mathcal{P}$, há duas possibilidades:

1ª) a equação (III) é do 1º grau, isto é, $m = 0$;

2ª) ou o discriminante da equação (III) é positivo: $\Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 4 > 0$.

Assim, temos:

$$m = 0 \ \textbf{(IV)} \ \text{ ou } \ 16 - 16m^2 > 0.$$

Para resolver essa inequação, vamos estudar o sinal da função $f(m) = 16 - 16m^2$.

- Raízes de f: $16 - 16m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$.
- Gráfico de f:

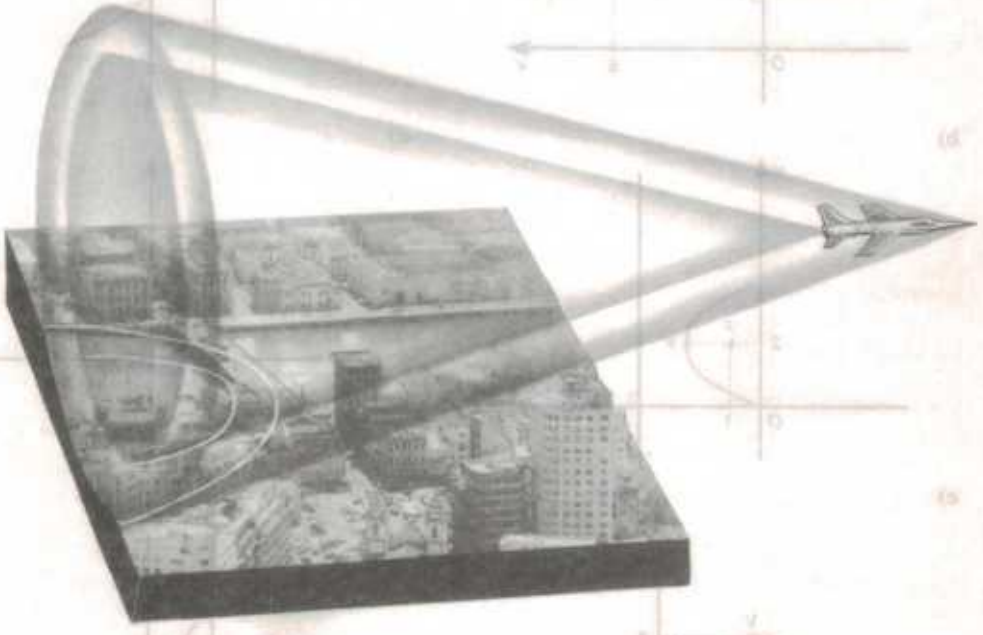
Como a inequação exige que $f(m) > 0$, devemos ter $-1 < m < 1$. **(V)**

Por (IV) e (V), temos como resposta $-1 < m < 1$.

Curiosidade

As ondas sonoras de choque provocadas por um avião supersônico formam as superfícies de dois cones que se estendem da extremidade dianteira e da cauda do avião.

As ondas de choque, ao interceptar o solo, determinam duas curvas cônicas (como, no exemplo da figura, duas parábolas), ao longo das quais é possível ouvir os estampidos.



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a, b), B.3 (a, b, c), B.4 (a, b), B.5 (a), B.6 (a, b), B.7 (a, b), B.8 (a, b, c), B.9 (a, b), B.10 (a até d), C.2, C.4, C.5, C.6, C.7.

Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2 (c, d), B.3 (d, e, f), B.4 (c, d), B.5 (b), B.6 (c, d), B.7 (c, d), B.8 (d, e, f), B.9 (c, d), B.10 (e até h), B.11, C.1, C.3, C.8, C.9, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Utilizando a definição, obtenha uma equação da parábola de foco F e diretriz r em cada um dos seguintes casos:

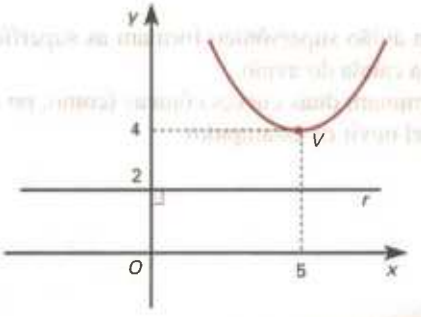
a) $F(4, 2)$ e $r: y - 6 = 0$;
b) $F(1, 3)$ e $r: 2x - y = 0$;
c) $F(-1, 2)$ e $r: x - 3 = 0$;
d) $F(2, 1)$ e $r: x + y - 3 = 0$.

B.2 Calcule o valor do parâmetro p da parábola de foco F e diretriz r em cada um dos seguintes casos:

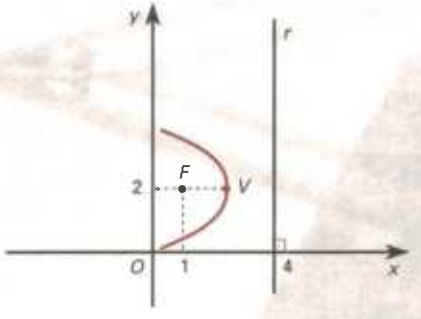
a) $F(1, 3)$ e $r: 3x + 4y + 10 = 0$;
b) $F(6, 4)$ e $r: y - 2 = 0$;
c) $F(-2, 3)$ e $r: 5x + 12y = 0$;
d) $F(2, 5)$ e $r: x + 4 = 0$.

B.3 Obtenha a equação reduzida da parábola em cada um dos seguintes casos, em que F, V e r representam o foco, o vértice e a diretriz, respectivamente:

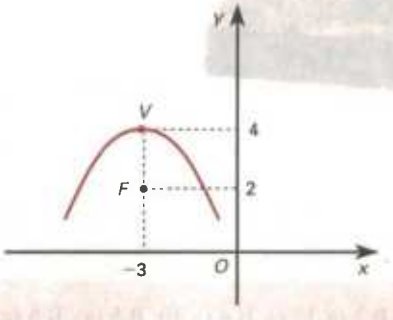
a)



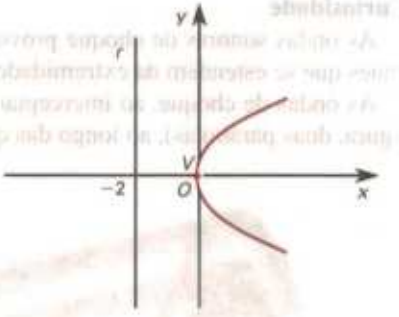
b)



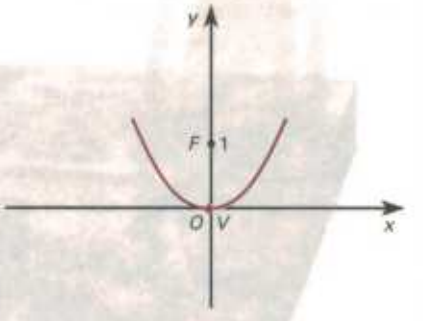
c)



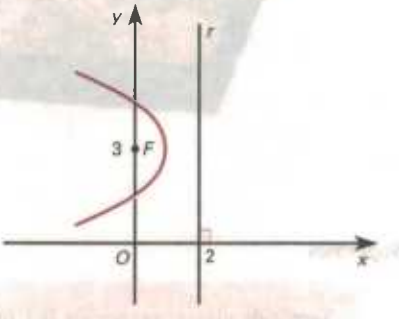
d)



e)



f)

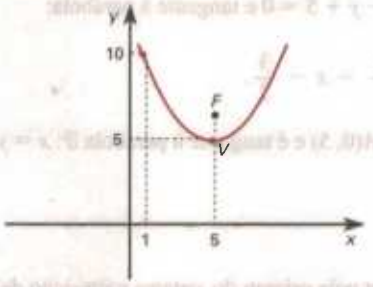


B.4 Esboce o gráfico da parábola $\mathcal{P}$ em cada um dos seguintes casos:

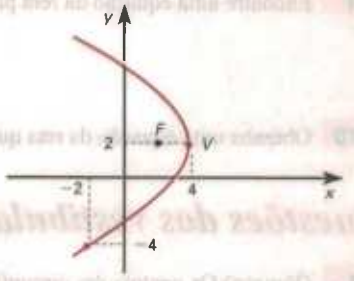
a) $\mathcal{P}: (x - 3)^2 = 4(y - 1)$;
b) $\mathcal{P}: (y - 2)^2 = -6(x + 1)$;
c) $\mathcal{P}: (x + 5)^2 = -2(y - 4)$;
d) $\mathcal{P}: (y - 5)^2 = 8x$.

B.5 Obtenha a equação reduzida da parábola $\mathcal{P}$ em cada um dos seguintes casos, em que F e V representam, respectivamente, o foco e o vértice:

a)



b)



B.6 Determine o foco F e a equação da diretriz r da parábola $\mathcal{P}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $\mathcal{P}: (y-2)^2 = 12(x-1)$;
b) $\mathcal{P}: (x+1)^2 = 4(y-2)$;
c) $\mathcal{P}: (x-2)^2 = 8y$;
d) $\mathcal{P}: (y-3)^2 = x-4$.

B.7 Escreva a equação reduzida da parábola $\mathcal{P}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $\mathcal{P}: y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{7}{4}$;
b) $\mathcal{P}: x = \frac{y^2}{4} + 2y + 3$;
c) $\mathcal{P}: y = \frac{x^2}{3} + 2x + 3$;
d) $\mathcal{P}: x = \frac{y^2}{4} - 3y + 8$.

B.8 Descreva a posição do ponto Q em relação à parábola $\mathcal{P}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $Q(5, 2)$ e $\mathcal{P}: (x-1)^2 = 4(y+2)$;
b) $Q(0, 4)$ e $\mathcal{P}: (y+1)^2 = -2(x-3)$;
c) $Q(3, 6)$ e $\mathcal{P}: (x-4)^2 = y-1$;
d) $Q(4, -6)$ e $\mathcal{P}: (x+2)^2 = -6y$;
e) $Q(6, 0)$ e $\mathcal{P}: (y+2)^2 = 3(x-1)$;
f) $Q(-2, -2)$ e $\mathcal{P}: (y-1)^2 = -x$.

B.9 Represente no plano cartesiano cada uma das seguintes inequações:

a) $(x-2)^2 \leqslant 8(y-3)$;
b) $(y+3)^2 > -4(x-1)$;
c) $(x+4)^2 \geqslant -12y$;
d) $(y-5)^2 < 16(x-3)$.

B.10 Determine a intersecção da reta s com a parábola $\mathcal{P}$ nos seguintes casos:

a) $s: x + 2y - 4 = 0$ e $\mathcal{P}: (x-2)^2 = 4(y-1)$;
b) $s: y - 5 = 0$ e $\mathcal{P}: (y-3)^2 = 2(x+2)$;
c) $s: x + y + 2 = 0$ e $\mathcal{P}: x^2 = -4(y+3)$;
d) $s: x - y - 1 = 0$ e $\mathcal{P}: (x-1)^2 = 4(y-3)$;
e) $s: x - y + 2 = 0$ e $\mathcal{P}: (y+1)^2 = 3(x+3)$;
f) $s: x + y + 4 = 0$ e $\mathcal{P}: (y-1)^2 = 2(x-4)$;
g) $s: x + 3 = 0$ e $\mathcal{P}: (x-5)^2 = 8(y+1)$;
h) $s: 2x - y = 0$ e $\mathcal{P}: (x-1)^2 = y-3$.

B.11 Chama-se **corda** de uma parábola $\mathcal{P}$ todo segmento de reta cujos extremos pertencem a $\mathcal{P}$. Calcule o comprimento da corda que a reta $r: x + y - 3 = 0$ determina na parábola $\mathcal{P}: (x-2)^2 = 2(y-1)$.

Exercícios complementares

C.1 Obtenha a equação reduzida da parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos $(2, 0)$ e $(4, 0)$ e intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 6)$.

C.2 Encontre uma equação do eixo de simetria da parábola $(x-2)^2 = 4(y+3)$.

C.3 Para que valor(es) de k a parábola $(y-1)^2 = 4(x+k)$ passa pela origem do sistema cartesiano?

C.4 Dê o vértice, o foco e a equação da diretriz da parábola $\mathcal{P}$ de equação $y = x^2 - 2x + 3$.

C.5 Para que valor real de k a reta $r: x + y + k = 0$ é tangente à parábola $\mathcal{P}: (x-1)^2 = 2(y+1)$?

C.6 Obtenha os valores reais de m para os quais a reta $r: y = mx + 1$ é secante à parábola $\mathcal{P}: x^2 = 4(y-2)$.

C.7 Determine os valores reais de k de modo que a reta $r: x + 2y + k = 0$ seja exterior à parábola $\mathcal{P}: (y-1)^2 = 3(x+1)$.

C.8 Para que valores reais de k a reta $x + ky - 2 = 0$ é secante à parábola $(x - 2)^2 = y - 1$?

C.9 Encontre uma equação da reta paralela à reta s: $2x - y + 5 = 0$ e tangente à parábola:

$$\mathcal{P}: y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}.$$

C.10 Obtenha uma equação da reta que passa pelo ponto $A(0, 5)$ e é tangente à parábola $\mathcal{P}$: $x = y^2 - 10y + 26$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Vunesp) Os centros das circunferências que passam pela origem do sistema cartesiano de eixos e tangenciam a reta $y = 1$, estão em:

a) duas retas paralelas.
b) duas retas concorrentes.
c) um círculo.
d) uma parábola.
e) uma hipérbole.

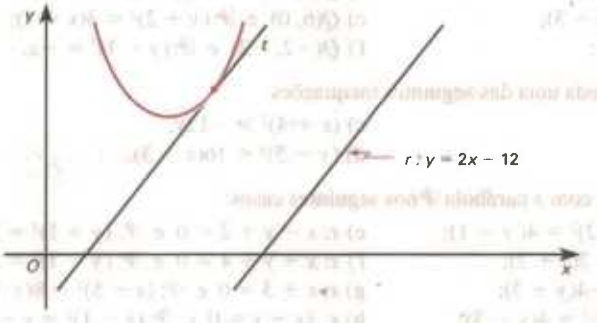
V.2 (PUC-SP) As coordenadas do vértice da parábola $2x^2 + 4x + 3y - 4 = 0$ são:

a) $(1, -2)$. b) $(-1, 0)$. c) $(-1, 2)$. d) $(0, -1)$. e) $(1, 1)$.

V.3 (Fatec-SP) Represente graficamente a região do plano Oxy formada pelos pontos $P(x, y)$ tais que, simultaneamente, $y - 5 \geqslant x^2 - 6x$ e $y \leqslant 5 - x$.

V.4 (FGV-SP) Dadas a parábola cuja equação é $y = x^2 - 4x + 8$, a reta t tangente à parábola e a reta r: $y = 2x - 12$, paralela a t, podemos dizer que a reta t intercepta o eixo Oy no ponto:

a) $(0, 3)$.
b) $(0, -4)$.
c) $(0, -1)$.
d) $(0, -2)$.
e) $(0, 2)$.



V.5 (FGV-SP) Uma parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ passa pela origem do sistema de coordenadas e é tangente à reta r de equação $y = 4$, no ponto $(2, 4)$. Então $a + b + c$ vale:

a) 3. b) -2. c) -1. d) 1. e) -3.

V.6 (Cescem) Os gráficos $x^2 + y = 10$ e $x + y = 10$ interceptam-se em dois pontos; a distância entre esses pontos é:

a) menor do que 1.
b) $\sqrt{2}$.
c) 1.
d) 2.
e) maior do que 2.

Capítulo 14
Reconhecimento de uma curva através de sua equação

1. Equação do 2º grau em duas variáveis

Uma equação do tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

tal que $\{A, B, C, D, E, F\} \subset \mathbb{R}$, com A, B e C não simultaneamente nulos, representa um dos seguintes conjuntos de pontos:

- circunferência;
- elipse;
- hipérbole;
- parábola;
- par de retas;
- conjunto com um único ponto;
- conjunto vazio.

Para determinar qual dos conjuntos é representado pela equação, devemos adotar alguns procedimentos, que estudaremos em dois casos.

1.1. Primeiro caso: equações do 2º grau cujo coeficiente do produto xy é nulo ($C = 0$)

I. Se na sentença $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ temos $A = B$ (A e B não-nulos), então a equação pode representar uma circunferência ou um ponto ou o conjunto vazio. Para concluir sobre qual dessas possibilidades ocorre, reduzimos a equação à forma:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Essa equação representa:

- uma circunferência se, e somente se, $k > 0$;
- um ponto se, e somente se, $k = 0$;
- o conjunto vazio se, e somente se, $k < 0$.

Exercícios resolvidos

R.1 Qual é a figura representada pela equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$?

Resolução

- Agrupam-se os termos em x e os termos em y, isolando o termo independente:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -6.$$

- Soma-se a ambos os membros da equação o número 1, com o objetivo de transformar o agrupamento em x num quadrado perfeito: $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y) = -6 + 1$.
- Soma-se a ambos os membros da equação o número 9, com o objetivo de transformar o agrupamento em y num quadrado perfeito:

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -6 + 1 + 9 \therefore (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

Logo, a equação representa uma circunferência.

R.2 Qual é a figura representada pela equação $5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 25 = 0$?

Resolução

- Dividem-se por 5 ambos os membros da equação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$.
- Agrupam-se os termos em x e os termos em y, isolando o termo independente, do seguinte modo:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) = -5.$$

- Soma-se a ambos os membros o número 1:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y) = -5 + 1.$$

- Soma-se a ambos os membros o número 4:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -5 + 1 + 4 \therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0.$$

Logo, a equação representa o ponto (1, 2).

R.3 Qual é o conjunto de pontos representados pela equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9 = 0$?

Resolução

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9 = 0 \therefore (x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) = -9.$$

Completando os quadrados perfeitos, temos:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = -9 + 1 + 4 \therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = -4.$$

Essa igualdade é absurda, pois a soma dos quadrados de números reais nunca é negativa. Logo, a equação representa o conjunto vazio.

R.4 Obter k, $k \in \mathbb{R}$, de modo que a equação $x^2 + y^2 - 4y + 1 - k = 0$ represente uma circunferência.

Resolução

$$x^2 + y^2 - 4y + 1 - k = 0 \therefore x^2 + (y^2 - 4y) = k - 1.$$

Completando o quadrado perfeito, temos $x^2 + (y^2 - 4y + 4) = k - 1 + 4 \therefore x^2 + (y - 2)^2 = k + 3$.
Essa equação representa uma circunferência se, e somente se, $k + 3 > 0$, ou seja, $k > -3$.

II. Se na sentença $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ temos A e B não-nulos, diferentes e com mesmo sinal (ambos positivos ou ambos negativos), então a equação pode representar uma elipse ou um ponto ou o conjunto vazio. Para o reconhecimento, reduzimos a equação à forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{p^2} + \frac{(y - y_0)^2}{q^2} = k, \{p, q, k\} \subset \mathbb{R}, p \neq 0 \text{ e } q \neq 0.$$

Essa equação representa:

- uma elipse se, e somente se, $k > 0$;
- um ponto se, e somente se, $k = 0$;
- o conjunto vazio se, e somente se, $k < 0$.

Exercícios resolvidos

R.5 Qual é a figura representada pela equação $4x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$?

Resolução

- Agrupam-se os termos em x e os termos em y, isolando o termo independente em um dos membros da igualdade: $(4x^2 - 16x) + (9y^2 - 54y) = -61$.
- Soma-se 16 a ambos os membros da equação, com o objetivo de transformar o agrupamento em x num quadrado perfeito: $(4x^2 - 16x + 16) + (9y^2 - 54y) = -61 + 16$.
- Soma-se 81 a ambos os membros da equação, com o objetivo de transformar o agrupamento em y num quadrado perfeito:

$$(4x^2 - 16x + 16) + (9y^2 - 54y + 81) = -61 + 16 + 81 \therefore (2x - 4)^2 + (3y - 9)^2 = 36$$

$$\therefore 4(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 36 \therefore \frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1.$$

Logo, a equação representa uma elipse.

R.6 Qual é a figura representada pela equação $16x^2 + 4y^2 - 32x + 16y + 96 = 0$?

Resolução

- Agrupam-se os termos em x e os termos em y: $(16x^2 - 32x) + (4y^2 + 16y) = -96$.
- Soma-se 16 a ambos os membros: $(16x^2 - 32x + 16) + (4y^2 + 16y) = -96 + 16$.
- Soma-se 16 a ambos os membros:

$$\underbrace{(16x^2 - 32x + 16)}_{(4x - 4)^2} + \underbrace{(4y^2 + 16y + 16)}_{(2x + 4)^2} = \underbrace{-96 + 16 + 16}_{-64}.$$

Note que essa igualdade é absurda, pois a soma dos quadrados de dois números reais nunca é negativa. Logo, a equação representa o conjunto vazio.

R.7 Qual é a figura representada pela equação $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 40 = 0$?

Resolução

$$(4x^2 - 8x) + (9y^2 - 36y) = -40$$

$$\therefore (4x^2 - 8x + 4) + (9y^2 - 36y + 36) = -40 + 4 + 36 \therefore (2x - 2)^2 + (3y - 6)^2 = 0.$$

Essa equação tem uma única solução: o ponto (1, 2). Logo, a equação representa um único ponto.

III. Se na sentença $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ temos A e B não-nulos e com sinais opostos (um positivo e outro negativo), então a equação pode representar uma hipérbole ou um par de retas. Para o reconhecimento, reduzimos a equação à forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{p^2} - \frac{(y - y_0)^2}{q^2} = k,\ \{p, q, k\} \subset \mathbb{R},\ p \neq 0 \text{ e } q \neq 0.$$

Essa equação representa:

- uma hipérbole se, e somente se, $k \neq 0$;
- um par de retas se, e somente se, $k = 0$.

Exercícios resolvidos

R.8 Qual é a figura representada pela equação $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$?

Resolução

- Agrupam-se os termos em x e os termos em y de modo que os coeficientes dos termos do 2º grau fiquem positivos. Isola-se o termo independente num dos membros da igualdade:

$$(9x^2 - 18x) - (4y^2 + 16y) = 43.$$

- Soma-se 9 a ambos os membros da equação, com o objetivo de transformar o agrupamento em x num quadrado perfeito: $(9x^2 - 18x + 9) - (4y^2 + 16y) = 43 + 9$.

- Soma-se -16 a ambos os membros da equação, com o objetivo de transformar o agrupamento em y num quadrado perfeito:

$$(9x^2 - 18x + 9) - (4y^2 + 16y + 16) = 43 + 9 - 16$$
$$\therefore (3x - 3)^2 - (2y + 4)^2 = 36 \therefore 9(x - 1)^2 - 4(y + 2)^2 = 36$$
$$\therefore \frac{9(x-1)^2}{36} - \frac{4(y+2)^2}{36} = \frac{36}{36} \therefore \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Logo, a equação representa uma hipérbole.

R.9 Qual é a figura representada pela equação $4y^2 - x^2 - 24y + 2x + 35 = 0$?

Resolução

$$(4y^2 - 24y) - (x^2 - 2x) = -35$$
$$\therefore (4y^2 - 24y + 36) - (x^2 - 2x + 1) = -35 + 36 - 1 \therefore (2y - 6)^2 - (x - 1)^2 = 0.$$

Logo, a equação representa um par de retas. Para obter esse par de retas, fatoramos o primeiro membro da equação: $(2y - 6 + x - 1)(2y - 6 - x + 1) = 0$.
Temos, então, as retas r: $2y + x - 7 = 0$ e s: $2y - x - 5 = 0$.

IV. Se na sentença $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ temos $A = 0$ e $B \neq 0$ ou $A \neq 0$ e $B = 0$, então a equação representa uma parábola ou um par de retas ou o conjunto vazio. Temos:

- uma parábola se, e somente se, a equação é redutível a uma das formas:

$$(x - x_0)^2 = k(y - y_0) \text{ ou } (y - y_0)^2 = k(x - x_0),\ k \in \mathbb{R}^*;$$

- um par de retas se, e somente se, a equação se reduz a uma equação do 2º grau em uma só variável com discriminante maior ou igual a zero (**nota:** no caso do discriminante igual a zero, temos duas retas coincidentes);
- o conjunto vazio se, e somente se, a equação se reduz a uma equação do 2º grau em uma só variável com discriminante menor que zero.

Exercícios resolvidos

R.10 Qual é a figura representada pela equação $y = \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$?

Resolução

$$y = \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} + \frac{5}{3} \therefore 6y = x^2 - 4x + 10.$$

Isolando num dos membros da igualdade os termos em x, temos $6y - 10 = x^2 - 4x$.
Somando 4 a ambos os membros da igualdade, com o objetivo de transformar o polinômio em x num quadrado perfeito, temos:

$$6y - 10 + 4 = x^2 - 4x + 4 \therefore 6y - 6 = x^2 - 4x + 4 \therefore (x - 2)^2 = 6(y - 1).$$

Logo, a equação representa uma parábola.

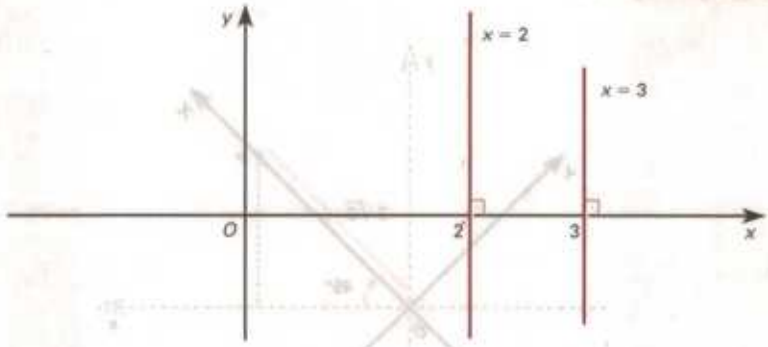
R.11 Dar o gráfico cartesiano determinado pela equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resolução

Temos uma equação do 2º grau em uma única variável tal que $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$.
Como o discriminante é maior que zero, concluímos que a equação representa um par de retas.

Para determinar essas retas, temos $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \therefore x = 3$ ou $x = 2$.

Assim, o gráfico das retas é:



R.12 Qual é a figura representada pela equação $y^2 + 3y + 5 = 0$?

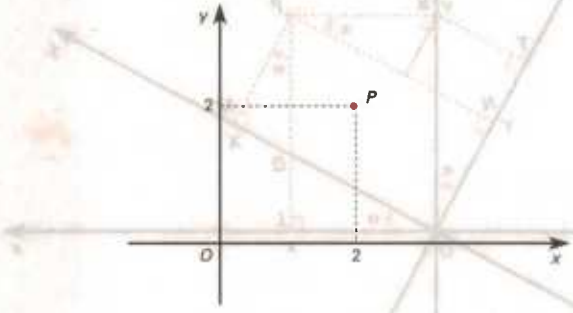
Resolução

Temos uma equação do 2º grau em uma única variável tal que $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11$.

Como o discriminante é menor que zero, temos que a equação representa o conjunto vazio.

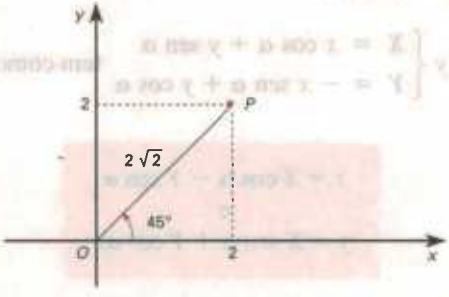
1.2. Segundo caso: equações do 2º grau cujo coeficiente do produto *xy* é não-nulo ($C \neq 0$)

Para poder estudar esse caso, necessitamos do conceito de mudança de coordenadas através de uma **rotação**. Para compreender esse conceito, observe o gráfico:

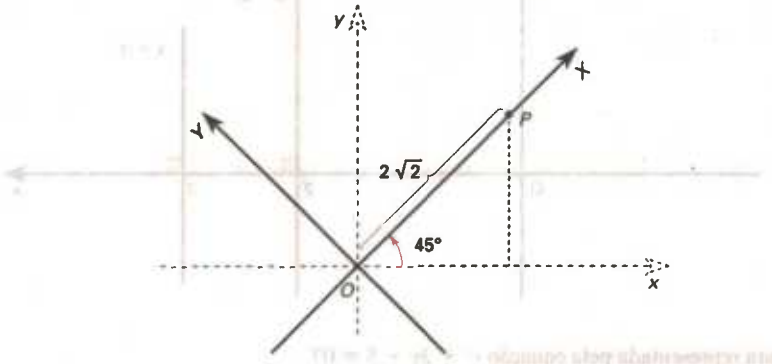


As coordenadas do ponto P em relação ao sistema xOy formam o par (2, 2). Quais são as coordenadas do ponto P em relação ao sistema XOY obtido pela rotação de 45° do sistema xOy em torno da origem O, no sentido anti-horário?

Para responder a essa pergunta, observemos que P pertence à bissetriz do primeiro quadrante e que $PO = 2\sqrt{2}$.

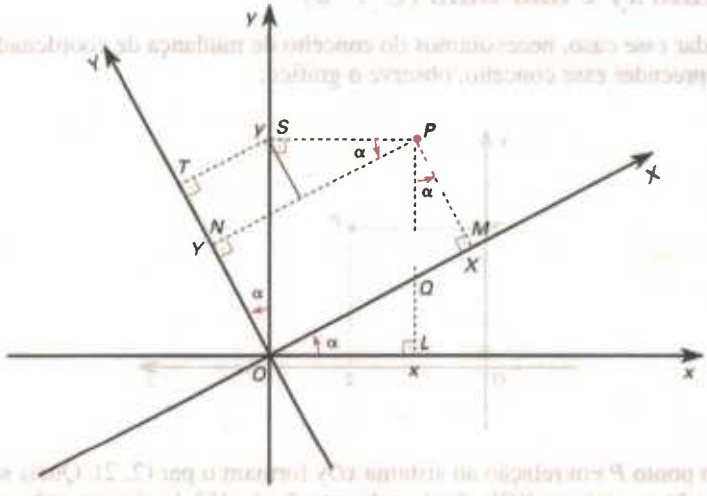


Girando 45° em torno de O o sistema xOy no sentido anti-horário, vamos obter um novo sistema XOY tal que o eixo OX passa por P.



Assim, a abscissa e a ordenada de P em relação ao novo sistema XOY são $2\sqrt{2}$ e 0, respectivamente, ou seja, $P(2\sqrt{2}, 0)$.

Generalizando, consideremos um ponto $P(x, y)$ cujas coordenadas são dadas em relação ao sistema xOy. Vamos obter a abscissa X e a ordenada Y do ponto P em relação a um novo sistema de coordenadas, obtido através de uma rotação α do sistema xOy em torno de O no sentido anti-horário, ou seja:



A medida X do segmento $\overline{OM}$ é a soma das medidas das projeções ortogonais de $\overline{OL}$ e $\overline{LP}$ sobre o eixo OX, ou seja, $X = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha$.

A medida Y do segmento $\overline{ON}$ é a diferença entre as medidas das projeções ortogonais de $\overline{OS}$ e $\overline{PS}$ sobre o eixo OY, ou seja, $Y = y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha$.

O sistema nas variáveis x e y $\begin{cases} X = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \\ Y = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$ tem como única solução:

$$x = X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha$$
e
$$y = X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha.$$

Exercício resolvido

R.13 Uma curva tem equação $4x^2 + 4y^2 - 2xy - 15 = 0$ em relação a um sistema cartesiano ortogonal xOy. Qual é a equação dessa mesma curva em relação a um sistema de coordenadas obtido pela rotação de 45° do sistema xOy em torno de O, no sentido anti-horário?

Resolução

Basta substituir x e y por $X \cos 45° - Y \operatorname{sen} 45°$ e $X \operatorname{sen} 45° + Y \cos 45°$, respectivamente, ou seja:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y).$$

Assim, temos a equação:

$$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\right) + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) - 15 = 0$$

$$\therefore 4 \cdot \frac{1}{2}(X^2 - 2XY + Y^2) + 4 \cdot \frac{1}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) - 2 \cdot \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) - 15 = 0$$

$$\therefore 3X^2 + 5Y^2 = 15 \therefore \frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{3} = 1.$$

Note que através dessa rotação percebemos que a curva é uma elipse.

Propriedade

Seja $\mathscr{C}$ uma curva cuja equação em relação a um sistema cartesiano ortogonal xOy é $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, $\{A, B, C, D, E, F\} \subset \mathbb{R}$, com A, B e C não simultaneamente nulos. Existe pelo menos um sistema de coordenadas XOY, obtido por uma rotação de xOy em torno de O, tal que a equação de $\mathscr{C}$ em relação a esse novo sistema não apresenta o produto XY.

Essa propriedade nos oferece um método relativamente simples para reconhecer a curva representada por uma equação do 2º grau. Ou seja, dada a equação do 2º grau:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, C \neq 0,$$

para identificar a curva que ela representa adotaremos a seguinte técnica:

- eliminamos o produto xy através de uma rotação do sistema de coordenadas;
- aplicamos o primeiro caso, ou seja, o reconhecimento de uma equação do 2º grau que não apresenta o produto xy.

Exercícios resolvidos

R.14 Qual é a figura representada pela equação $5x^2 + 5y^2 - 8xy - 9 = 0$?

Resolução

Para efetuar uma rotação α do sistema xOy, em torno de O, no sentido anti-horário, basta fazer as mudanças de variáveis: $\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha \\ y = X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha. \end{cases}$

Temos, então:

$5(X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha)^2 + 5(X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha)^2 - 8(X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha)(X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha) - 9 = 0$ **(I)**

$\therefore 5(X^2 \cos^2 \alpha - 2XY \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + Y^2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + 5(X^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2XY \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + Y^2 \cos^2 \alpha) -$

$- 8(X^2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + XY \cos^2 \alpha - YX \operatorname{sen}^2 \alpha - Y^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) - 9 = 0$

$\therefore 5X^2 \cos^2 \alpha + 5Y^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 5X^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 5Y^2 \cos^2 \alpha -$

$- 8[X^2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + XY(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - Y^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha] - 9 = 0.$

Note que o coeficiente do produto XY é $(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)$. Assim, a rotação que nos convém, para eliminar o produto XY, é aquela em que:

$$\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha, \text{ ou seja: } \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha \text{ ou } \cos \alpha = -\operatorname{sen} \alpha.$$

Qualquer uma das duas igualdades resolve o problema. Tomemos, por exemplo, a primeira:

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo $\cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ em (I), obtemos:

$$5\left(X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - Y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 5\left(X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + Y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 8\left(X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - Y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + Y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 9 = 0$$

$$\therefore 5 \cdot \frac{1}{2}(X - Y)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2}(X + Y)^2 - 8 \cdot \frac{1}{2}(X - Y)(X + Y) - 9 = 0$$

$$\therefore \frac{5}{2}(X^2 - 2XY + Y^2) + \frac{5}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) - 4(X^2 - Y^2) - 9 = 0$$

$$\therefore X^2 + 9Y^2 - 9 = 0 \therefore X^2 + 9Y^2 = 9 \therefore \frac{X^2}{9} + Y^2 = 1.$$

Logo, a equação representa uma elipse.

R.15 Qual é a figura representada pela equação $xy - 1 = 0$?

Resolução

Para efetuar uma rotação α do sistema xOy em torno do ponto O no sentido anti-horário, basta mudarmos as variáveis do seguinte modo: $\begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha \\ y = X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha, \end{cases}$

ou seja:

$$(X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha)(X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha) - 1 = 0 \quad \text{(I)}$$
$$\therefore X^2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + XY \cos^2 \alpha - XY \operatorname{sen}^2 \alpha + Y^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - 1 = 0$$
$$\therefore X^2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + Y^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + XY(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - 1 = 0.$$

Note que o coeficiente do produto XY é $\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$.
Assim, a rotação que nos convém para eliminar o produto XY é aquela em que:

$$\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha, \text{ ou seja: } \cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha \text{ ou } \cos \alpha = -\operatorname{sen} \alpha.$$

Qualquer uma das duas igualdades resolve o problema. Tomemos, por exemplo, a primeira:

$$\cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo $\cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ em (I), obtemos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y\right) - 1 = 0$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{2}}{2}X\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}Y\right)^2 - 1 = 0 \therefore \frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 1.$$

Logo, a figura é uma hipérbole.

R.16 Qual é a figura determinada pela equação $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$?

Resolução

Nesse caso não é necessária a rotação do sistema xOy, pois:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0 \therefore (x - y)^2 - 4 = 0$$
$$\therefore (x - y + 2)(x - y - 2) = 0 \therefore x - y + 2 = 0 \text{ ou } x - y - 2 = 0.$$

Logo, a equação representa um par de retas.

R.17 Descrever a figura determinada pela equação $16x^2 + 9y^2 + 24xy - 50x + 25 = 0$.

Resolução

Mudando as variáveis $\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha, \end{cases}$ temos:

$$16(X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha)^2 + 9(X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha)^2 + 24(X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha)(X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha) -$$
$$- 50(X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha) + 25 = 0. \text{ (I)}$$

Para evitar muitos cálculos, vamos operar apenas com os termos que apresentam o produto XY. São eles:

$$-32XY\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + 18XY\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 24XY(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha), \text{ ou seja:}$$
$$-14XY\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + 24XY(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = -7XY\operatorname{sen}2\alpha + 24XY\cos2\alpha = XY(-7\operatorname{sen}2\alpha + 24\cos2\alpha).$$

Para eliminar o produto XY, impomos que:

$$-7\operatorname{sen}2\alpha + 24\cos2\alpha = 0 \therefore \cos2\alpha = \frac{7\operatorname{sen}2\alpha}{24}$$
$$\therefore \cos^2 2\alpha = \frac{49\operatorname{sen}^2 2\alpha}{576} \therefore \cos^2 2\alpha = \frac{49(1 - \cos^2 2\alpha)}{576}$$
$$\therefore 576\cos^2 2\alpha = 49 - 49\cos^2 2\alpha \therefore 625\cos^2 2\alpha = 49 \therefore \cos2\alpha = \pm\frac{7}{25}.$$

Qualquer um dos valores de $\cos 2\alpha$ resolve o nosso problema. Tomemos:

$$\cos2\alpha = \frac{7}{25} \therefore 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{7}{25} \therefore 2\cos^2\alpha = \frac{32}{25} \therefore \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \therefore \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}.$$

Pela relação fundamental da trigonometria, obtemos $\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{3}{5}$.

Quaisquer valores encontrados para $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ resolvem o problema.

Tomemos $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$.

Substituindo $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ em (I), temos:

$$16\left(\frac{4X}{5} - \frac{3Y}{5}\right)^2 + 9\left(\frac{3X}{5} + \frac{4Y}{5}\right)^2 + 24\left(\frac{4X}{5} - \frac{3Y}{5}\right)\left(\frac{3X}{5} + \frac{4Y}{5}\right) - 50\left(\frac{4X}{5} - \frac{3Y}{5}\right) + 25 = 0$$
$$\therefore 16\left(\frac{16X^2 - 24XY + 9Y^2}{25}\right) + 9\left(\frac{9X^2 + 24XY + 16Y^2}{25}\right) +$$
$$+ 24\left(\frac{12X^2 + 16XY - 9XY - 12Y^2}{25}\right) - 50\left(\frac{4X - 3Y}{5}\right) + 25 = 0$$
$$\therefore 25X^2 - 40X + 30Y + 25 = 0 \therefore 5X^2 - 8X + 6Y + 5 = 0 \therefore 5X^2 - 8X = -6Y - 5$$
$$\therefore 5X^2 - 8X + \frac{16}{5} = -6Y - 5 + \frac{16}{5} \therefore \left(\sqrt{5}X - \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = -6Y - \frac{9}{5}$$
$$\therefore \left(\sqrt{5}X - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = -6Y - \frac{9}{5} \therefore 5\left(X - \frac{4}{5}\right)^2 = -6\left(Y + \frac{3}{10}\right) \therefore \left(X - \frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{6}{5}\left(Y + \frac{3}{10}\right).$$

Logo, a equação representa uma parábola.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b, c), B.2, B.4 (a, b, c), B.5, B.7 (a, b), B.8, B.10 (a, b, c), B.11, C.1, C.3, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (d, e, f), B.3, B.4 (d, e, f), B.6, B.7 (c, d), B.9, B.10 (d, e, f), B.12, B.13, C.2, C.4, C.6, C.7, C.8, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Qual é a figura $\mathcal{F}$ representada por sua equação, em cada um dos seguintes casos?

a) $\mathcal{F}$: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$;
b) $\mathcal{F}$: $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0$;
c) $\mathcal{F}$: $3x^2 + 3y^2 - 18y + 30 = 0$;
d) $\mathcal{F}$: $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 14 = 0$;
e) $\mathcal{F}$: $5x^2 + 5y^2 - 10x + 5 = 0$;
f) $\mathcal{F}$: $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$.

B.2 Para que valores reais de k a equação $x^2 + y^2 + 6x - 4y + k = 0$ representa:

a) uma circunferência? b) um ponto? c) o conjunto vazio?

B.3 Obtenha m e k, $\{m, k\} \subset \mathbb{R}$, de modo que a equação $mx^2 + 3y^2 - 6x + k = 0$ represente uma circunferência que passa pela origem do sistema cartesiano.

B.4 Descreva a figura $\mathcal{F}$ representada por sua equação, em cada um dos seguintes casos:

a) $\mathcal{F}$: $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$;
b) $\mathcal{F}$: $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 17 = 0$;
c) $\mathcal{F}$: $x^2 + 3y^2 + 6y + 12 = 0$;
d) $\mathcal{F}$: $x^2 + 4y^2 + 4x + 4 = 0$;
e) $\mathcal{F}$: $2x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$;
f) $\mathcal{F}$: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6} - x + 1 = 0$.

B.5 Para que valores reais de k a equação $x^2 + 4y^2 - 2x + k = 0$ representa uma elipse?

B.6 Obtenha os valores reais de m tal que a equação $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 5 - 2m = 0$ represente:

a) uma elipse;
b) um ponto;
c) o conjunto vazio.

B.7 Cada uma das equações a seguir representa uma figura $\mathcal{F}$. Qual é a figura, em cada caso?

a) $\mathcal{F}$: $x^2 - 2y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$;
b) $\mathcal{F}$: $x^2 - 3y^2 - 2x - 12y - 11 = 0$;
c) $\mathcal{F}$: $5y^2 - x^2 - 18y + 14 = 0$;
d) $\mathcal{F}$: $4x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$.

B.8 Encontre o valor de k, $k \in \mathbb{R}$, de modo que a equação $x^2 - y^2 - 2x - 2y + k = 0$ represente um par de retas.

B.9 Dada a equação $x^2 - y^2 + 4x + 10y - 20 - k = 0$, encontre os valores reais de k, para que ela represente:

a) uma hipérbole;
b) um par de retas.

B.10 Através de cada uma das equações a seguir, descreva a figura $\mathcal{F}$ representada:

a) $\mathcal{F}$: $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$;
b) $\mathcal{F}$: $x^2 - 6x + 5 = 0$;
c) $\mathcal{F}$: $y^2 + 4y + 5 = 0$;
d) $\mathcal{F}$: $y^2 + 10y - 2x + 27 = 0$;
e) $\mathcal{F}$: $x^2 + x + 3 = 0$;
f) $\mathcal{F}$: $3x^2 - 2x = 0$.

B.11 A equação $x^2 - 4x - ky + 4 = 0$ representa uma parábola para que valores reais de k?

B.12 Obtenha os valores reais de m de modo que a equação $x^2 - 2x + my - m - 3 = 0$ represente:

a) uma parábola;
b) um par de retas.

B.13 Para que valores reais de k a equação $y^2 - 2y + (k^2 - 4)x + k = 0$ representa:

a) um par de retas? b) o conjunto vazio? c) uma parábola?

Exercícios complementares

C.1 Uma curva tem equação $2xy - 1 = 0$ em relação a um sistema de coordenadas xOy. Qual é a equação dessa mesma curva em relação a um sistema de coordenadas obtido pela rotação de 45° do sistema xOy em torno de O, no sentido anti-horário?

C.2 A equação de uma curva $\mathscr{C}$ é $xy + x + y = 0$ em relação a um sistema de coordenadas xOy. Efetuando-se uma rotação de 135° desse sistema em torno de O, no sentido anti-horário, qual é a equação de $\mathscr{C}$ em relação a esse novo sistema?

C.3 Qual é a figura representada pela equação $y^2 - x^2 - 2\sqrt{3}xy - 2 = 0$?

C.4 Descreva a figura representada pela equação $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4 = 0$.

C.5 A equação $9x^2 - xy = 0$ representa que figura geométrica? **Sugestão:** nesse caso não é necessária a rotação dos eixos coordenados. Fatore o primeiro membro.

C.6 Represente graficamente a figura cuja equação é $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$. **Sugestão:** fatore o primeiro membro.

C.7 Descreva a figura representada pela equação $4x^2 + 11y^2 + 24xy = 0$. **Sugestão:** some $25y^2$ a ambos os membros da igualdade.

C.8 Qual é a curva representada pela equação $x^2 + y^2 - 2xy - 2\sqrt{2}(x + y) = 0$? **Sugestão:** efetue uma rotação do sistema de eixos.

C.9 Descreva a curva representada pela equação $5x^2 - 2y^2 + 24xy + 8 = 0$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) No plano cartesiano ortogonal, a equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$ representa:

a) uma circunferência. c) o conjunto vazio. e) um par de retas.
b) um único ponto. d) uma elipse.

V.2 (FGV-SP) A equação $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ representa:

a) uma circunferência. c) uma elipse. e) nenhuma das alternativas anteriores.
b) uma parábola. d) uma hipérbole.

V.3 (Cesgranrio) O gráfico cartesiano da equação $x^2 - 2y^2 + 4y - 4 = 0$ é:

a) uma hipérbole. c) um par de retas. e) uma circunferência.
b) uma parábola. d) um ponto.

V.4 (PUC-SP) A equação $(x + 4)^2 + 2y - x = 0$ representa:

a) uma circunferência. c) uma hipérbole. e) o conjunto vazio.
b) uma elipse. d) uma parábola.

V.5 (E. E. Lins-SP) O conjunto de pontos (x, y) que satisfazem a equação $x^2 - y^2 + x + y = 0$ representa:

a) uma circunferência. d) duas retas paralelas entre si.
b) duas retas perpendiculares entre si. e) nenhuma das respostas anteriores.
c) uma hipérbole.

V.6 (EPUSP-SP) A equação $x^2 + y^2 - 10y + 26 = 0$ representa:

a) uma circunferência. c) o conjunto vazio. e) uma hipérbole.
b) um único ponto. d) uma elipse.

Capítulo 15

Lugar geométrico (L.G.)

1. Conceituação

Lugar geométrico (**L.G.**) é qualquer conjunto de pontos, podendo inclusive ser o conjunto vazio.

1.1. Determinação de um lugar geométrico

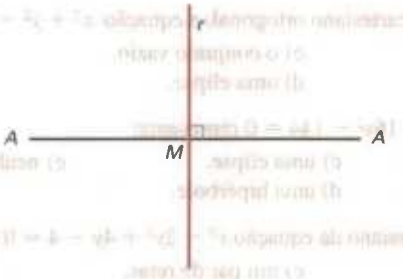
Um L.G. é determinado por uma propriedade p se, e somente se:

I. todos os pontos do L.G. satisfazem a propriedade p;

II. somente os pontos do L.G. satisfazem a propriedade p.

Exemplos

a) O L.G. dos pontos de um plano α que equidistam de dois pontos distintos A e B de α é a mediatriz r do segmento $\overline{AB}$.

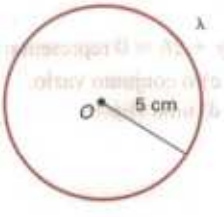


M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Note que:

- todos os pontos de r equidistam de A e B;
- nenhum outro ponto do plano α equidista de A e B.

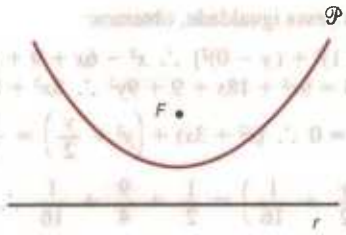
b) O L.G. dos pontos de um plano α que distam 5 cm de um ponto O, $O \in \alpha$, é uma circunferência λ de centro O e raio $R = 5$ cm.



Note que:

- todos os pontos de λ distam 5 cm do ponto O;
- nenhum outro ponto do plano α dista 5 cm do ponto O.

c) O L.G. dos pontos de um plano α equidistantes de uma reta r de α e de um ponto F de α, $F \notin r$, é uma parábola $\mathcal{P}$.



Note que:

- todos os pontos de $\mathcal{P}$ distam igualmente de F e r;
- nenhum outro ponto de α equidista de F e r.

2. Equação de um lugar geométrico do plano cartesiano

Se um lugar geométrico do plano cartesiano é determinado por uma propriedade p que indica uma igualdade, então a equação desse L.G. é obtida do seguinte modo:

- considera-se um ponto genérico $Q(x, y)$ de coordenadas variáveis x e y;
- impõe-se ao ponto $Q(x, y)$ a condição p, obtendo assim a equação do L.G.

Exercícios resolvidos

R.1 Obter uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano que equidistam dos pontos $A(2, 4)$ e $B(0, 1)$.

Resolução

- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto $Q(x, y)$ pertença ao L.G., devemos impor:

$$QA = QB \therefore \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}.$$

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, temos:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-0)^2 + (y-1)^2$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \therefore 4x + 6y - 19 = 0.$$

Assim, o L.G. é a reta de equação $4x + 6y - 19 = 0$.

R.2 Encontrar uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano que distam 5 unidades do ponto $C(1, 3)$.

Resolução

- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto $Q(x, y)$ pertença ao lugar geométrico, devemos impor:

$$QC = 5 \therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = 5.$$

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$.
Logo, o L.G. é a circunferência de equação $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$.

R.3 Descrever o L.G. dos pontos do plano cartesiano que distam do ponto $A(3, 2)$ o triplo da distância ao ponto $B(-1, 0)$.

Resolução

- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto $Q(x, y)$ pertença ao L.G., devemos impor:

$$QA = 3QB \therefore \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2}.$$

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9[(x+1)^2 + (y-0)^2] \therefore x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9(x^2 + 2x + 1 + y^2)$
$\therefore x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2 \therefore 8x^2 + 8y^2 + 24x + 4y - 4 = 0$

$$\therefore x^2 + y^2 + 3x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} = 0 \therefore (x^2 + 3x) + \left(y^2 + \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \therefore \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}.$$

Assim, o L.G. é a circunferência de centro $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ e raio $R = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

R.4 Obter uma equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas r: $2x + y - 1 = 0$ e s: $x + 2y + 3 = 0$.

Resolução

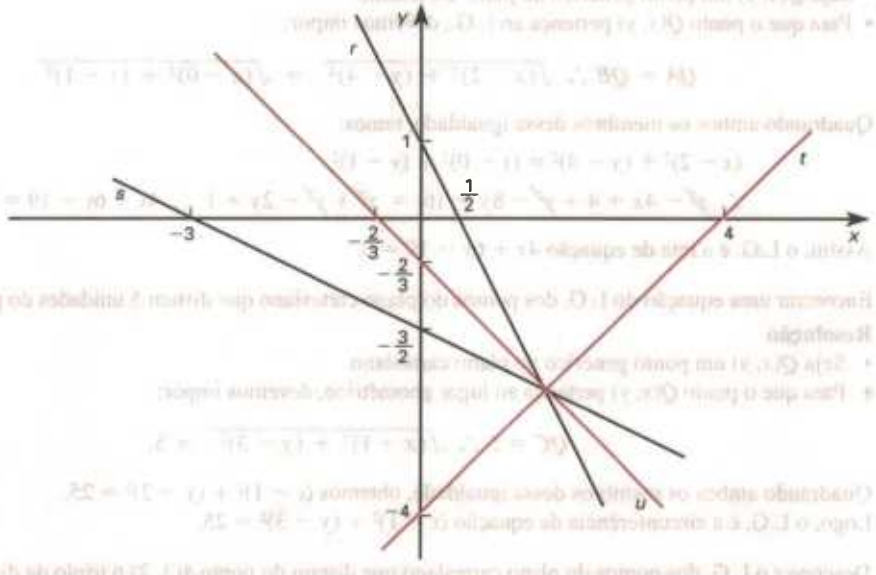
- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto $Q(x, y)$ pertença ao L.G., devemos impor:

$$Qr = Qs \therefore \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x + 2y + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \therefore |2x + y - 1| = |x + 2y + 3|.$$

Então, temos que:

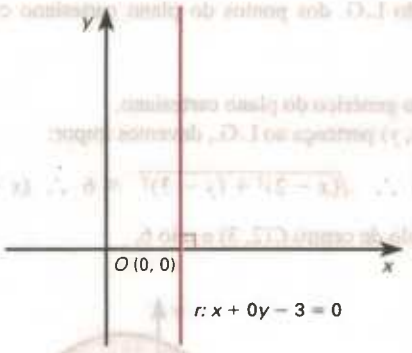
$$2x + y - 1 = x + 2y + 3 \therefore x - y - 4 = 0 \text{ ou}$$
$$2x + y - 1 = -x - 2y - 3 \therefore 3x + 3y + 2 = 0.$$

Logo, o L.G. é constituído pelo par de retas t: $x - y - 4 = 0$ e u: $3x + 3y + 2 = 0$.
Graficamente, temos:



As retas t e u contêm as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s.

R.5 Determinar uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano que equidistam da origem do sistema e da reta r: $x - 3 = 0$.



Resolução

- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto Q pertença ao L.G., devemos impor:

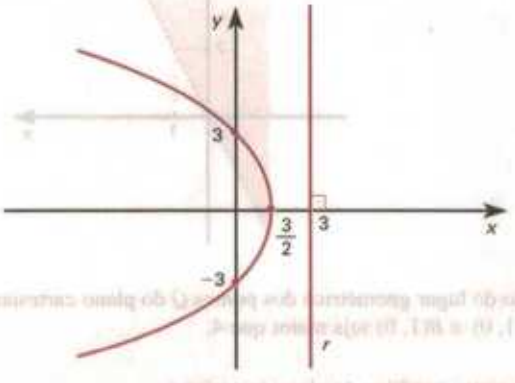
$$QO = Qr \therefore \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \frac{|x + 0y - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = |x - 3|.$$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$$x^2 + y^2 = (x-3)^2 \therefore x^2 + y^2 = x^2 - 6x + 9 \therefore y^2 = -6\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Assim, o L.G. é a parábola $\mathcal{P}$ de equação $y^2 = -6\left(x - \frac{3}{2}\right)$.
Graficamente, temos:



3. Inequação de um lugar geométrico do plano cartesiano

Se um lugar geométrico do plano cartesiano é determinado por uma propriedade p que indica uma **desigualdade**, então a inequação desse L.G. é obtida do seguinte modo:

- considera-se um ponto genérico $Q(x, y)$ de coordenadas variáveis x e y;
- impõe-se ao ponto $Q(x, y)$ a condição p, obtendo assim a inequação do L.G.

Exercícios resolvidos

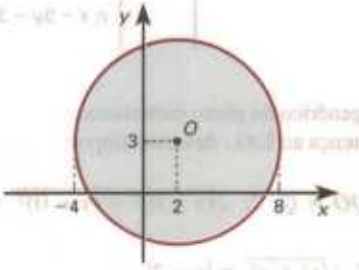
R.6 Obter uma inequação do L.G. dos pontos do plano cartesiano cujas distâncias ao ponto $A(2, 3)$ sejam menores ou iguais a 6.

Resolução

- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto $Q(x, y)$ pertença ao L.G., devemos impor:

$$QA \leq 6 \therefore \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \leq 6 \therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 36.$$

Logo, o L.G. é um círculo de centro $C(2, 3)$ e raio 6.
Graficamente, temos:

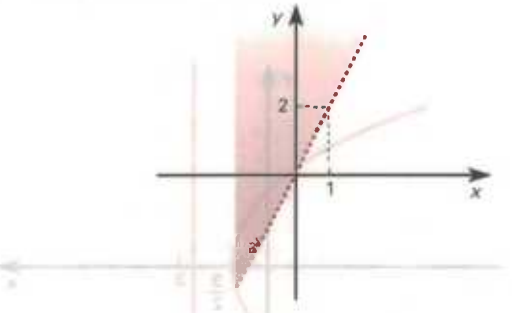


R.7 Representar graficamente o L.G. dos pontos do plano cartesiano cujas ordenadas são maiores que o dobro das respectivas abscissas.

Resolução

- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto $Q(x, y)$ pertença ao L.G., devemos impor $y > 2x$.

Essa inequação tem como gráfico o semiplano aberto:

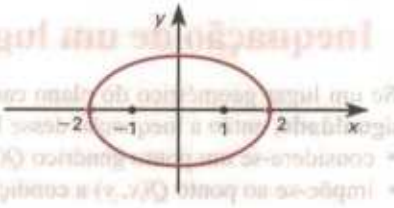


R.8 Dar uma inequação do lugar geométrico dos pontos Q do plano cartesiano tal que a soma das distâncias de Q aos pontos $A(-1, 0)$ e $B(1, 0)$ seja maior que 4.

Resolução

- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto $Q(x, y)$ pertença ao L.G., devemos impor $QA + QB > 4$.

Sabemos que os pontos cuja soma das distâncias a A e B é igual a 4 é a elipse de focos $A(-1, 0)$ e $B(1, 0)$ e eixo maior de medida 4, conforme a figura ao lado.



Nessa elipse, temos que:

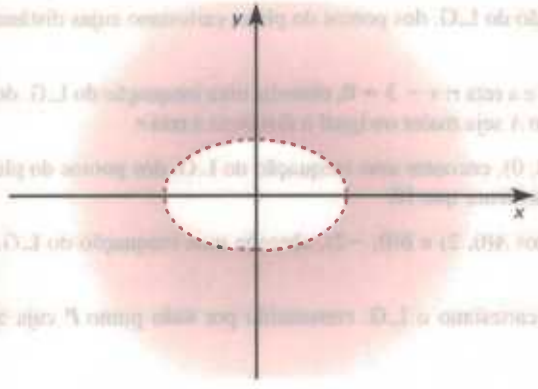
- a medida do semi-eixo maior é $a = 2$;
- a medida da semidistância focal é $c = 1$;
- a medida b do semi-eixo menor é tal que $b^2 + c^2 = a^2 \therefore b^2 + 1^2 = 2^2 \therefore b = \sqrt{3}$.

Assim, a equação da elipse é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Os pontos Q tais que $QA + QB > 4$ são exteriores à elipse e a inequação desses pontos é:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} > 1.$$

Graficamente, temos:



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.4, B.5, B.6, B.8, B.9, B.10, B.13, B.14, C.2, C.8.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.7, B.11, B.12, B.15, B.16, B.17, C.1, C.3, C.4, C.5, C.6, C.7, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Obtenha uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano, equidistantes dos pontos $A(1, 4)$ e $B(-1, 2)$.

B.2 Dados os pontos $A(2, 0)$ e $B(1, 0)$, obtenha uma equação do L.G. dos pontos Q do plano cartesiano tal que $(QA)^2 - (QB)^2 = 2$.

B.3 Qual é o L.G. dos pontos médios de todas as cordas de comprimento 8 na circunferência $\lambda: x^2 + (y - 1)^2 = 25$? Dê uma equação desse L.G.

B.4 Sendo $A(1, 0)$ e $B(0, 2)$, represente graficamente no plano cartesiano o L.G. dos pontos $Q(x, y)$ tal que o triângulo ABQ tenha área igual a 3 unidades.

B.5 Represente no plano cartesiano o L.G. dos pontos que distam 6 unidades da reta $r: 4x + 3y - 12 = 0$.

B.6 Encontre uma equação do L.G. dos pontos equidistantes das retas $r: 3x - y + 2 = 0$ e $s: 3x + y - 1 = 0$.

B.7 Dadas as retas $r: x + 2y - 1 = 0$ e $s: x + 2y - 5 = 0$, obtenha uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano, equidistantes de r e s.

B.8 Descreva o L.G. dos pontos do plano cartesiano que distam da origem do sistema o dobro da distância ao ponto $A(2, 5)$.

B.9 Dados a reta $r: x - 3 = 0$ e o ponto $A(0, 1)$, obtenha uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano que distam da reta r o dobro da distância ao ponto A.

B.10 O L.G. dos pontos do plano cartesiano cuja soma das distâncias aos pontos $A(1, 2)$ e $B(1, -2)$ é sempre igual a 6 intercepta o eixo das abscissas nos pontos:

a) $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

b) $(-4, 0)$ e $(4, 0)$.

c) $(1 + \sqrt{3}, 0)$ e $(1 - \sqrt{3}, 0)$.

d) $(1 + \sqrt{5}, 0)$ e $(1 - \sqrt{5}, 0)$.

e) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$.

B.11 Considere os pontos $O(0, 0)$ e $A(1, 0)$. Quais são os pontos do eixo das ordenadas que pertencem ao L.G. dos pontos $Q(x, y)$ tais que $(QA)^2 = 2QO$?

B.12 Dados os pontos $A(1, 3)$ e $B(4, 6)$, obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano cuja razão entre suas distâncias aos pontos A e B, nessa ordem, seja igual a $\sqrt{2}$.

B.13 Obtenha uma inequação do L.G. dos pontos do plano cartesiano cujas distâncias ao ponto $A(1, -5)$ sejam maiores que 2.

B.14 Sendo o ponto $A(1, 0)$ e a reta r: $x - 3 = 0$, obtenha uma inequação do L.G. dos pontos do plano cartesiano cuja distância ao ponto A seja maior ou igual à distância à reta r.

B.15 Dados $A(-3, 0)$ e $B(3, 0)$, encontre uma inequação do L.G. dos pontos do plano cartesiano cuja soma das distâncias a A e B seja menor que 10.

B.16 Considerando os pontos $A(0, 2)$ e $B(0, -2)$, obtenha uma inequação do L.G. dos pontos $Q(x, y)$ tais que $|QA - QB| > 2$.

B.17 Represente no plano cartesiano o L.G. constituído por todo ponto P cuja abscissa é menor ou igual à ordenada.

Exercícios complementares

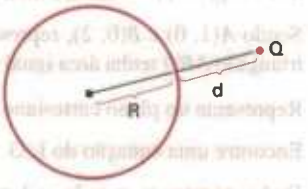
C.1 Obtenha uma equação do L.G. dos pontos médios de todos os segmentos de reta de comprimento igual a 10 unidades, cujos extremos pertencem aos eixos coordenados e não têm nenhuma das coordenadas negativa.

C.2 Considere todos os cilindros circulares retos que possuem área lateral igual a 2 unidades. Representando-se no eixo das abscissas as medidas R dos raios desses infinitos cilindros e no eixo das ordenadas suas alturas H, qual é o L.G. dos pontos (R, H)?

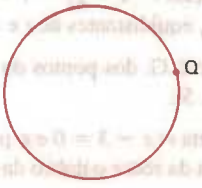
C.3 Dados os pontos $A(1, 3)$ e a reta r: $x - 5 = 0$, encontre uma equação do L.G. dos centros das circunferências do plano cartesiano que passam por A e tangenciam a reta r.

C.4 Obtenha a equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano equidistantes das circunferências λ_1: $(x + 2)^2 + y^2 = 1$ e λ_2: $(x - 2)^2 + y^2 = 1$. **Sugestão:** sendo λ uma circunferência de centro C e raio R, e sendo Q um ponto do plano de λ, tem-se que a distância d entre Q e λ é:

- $d = QC - R$, se Q é exterior a λ;



- $d = 0$, se $Q \in \lambda$;



- $d = R - QC$, se Q é interior a λ.

Podemos sintetizar esses três casos dizendo simplesmente que a distância d é:

$$d = |QC - R|.$$

C.5 Encontre uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano, que equidistam do ponto $A(4, 0)$ e da circunferência λ: $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

C.6 Obtenha uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano, que equidistam do ponto $A(1, 0)$ e da circunferência λ: $x^2 + y^2 = 9$.

C.7 Dadas a circunferência λ: $x^2 + (y - 5)^2 = 4$ e a reta r: $y - 1 = 0$, encontre uma equação do L.G. dos pontos equidistantes de λ e r.

C.8 Considere todos os segmentos de reta, perpendiculares ao eixo Oy, com um extremo nesse eixo e o outro na reta r: $x + y - 2 = 0$. Obtenha a equação do L.G. dos pontos médios desses segmentos.

C.9 Sendo a circunferência λ: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$, represente no plano cartesiano o L.G. dos pontos $Q(x, y)$ de modo que o segmento $\overline{QT}$ tenha medida maior do que 3, onde T é o ponto de tangência da reta $\overline{QT}$ com a circunferência.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Num plano são dados os pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (1, 0)$. Qual o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ desse plano tais que $(AP)^2 - (BP)^2 = 4$?

V.2 (Fuvest-SP) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano cuja distância à origem é o dobro da distância ao ponto $(1, 1)$.

V.3 (Fuvest-SP) Qual a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes da reta $y = 0$ e da circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 1$?

V.4 (Vunesp-SP) Dada a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, achar a equação do lugar geométrico dos pontos médios das cordas de comprimento r.

V.5 (Mackenzie-SP) O conjunto dos pontos tais que a distância de cada ponto à reta $y = 3$ é igual à diferença entre a abscissa x e a ordenada y do ponto é:

a) um par de semi-retas não-colineares.
b) um losango.
c) uma circunferência.
d) uma reta.
e) um conjunto finito de pontos.

Capítulo 16
Conjunto dos números complexos

1. A insuficiência dos números reais

Quando estudamos o conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, percebemos a necessidade de novos números ao tentarmos efetuar subtrações tais como $3 - 5$. Foi criado então o conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros. Esse novo conjunto também se mostrou insuficiente para efetuar divisões como $3 : 2$. A partir dessa necessidade foi construído o conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, e, a seguir, para superar outro obstáculo, construiu-se o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais.

Estamos mais uma vez em um ponto crítico. O conjunto dos reais não é suficiente para efetuarmos a radiciação, pois em $\mathbb{R}$ não existem raízes quadradas, quartas, sextas, etc. de números negativos. Para que esses resultados sejam possíveis, devemos ampliar mais uma vez o conceito de número.

2. A unidade imaginária (i)

Para ampliar o conceito de número de modo que a radiciação seja sempre possível, definimos o número i, não-real, denominado **unidade imaginária**, que satisfaz a seguinte condição:

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

3. Número complexo

Definição

Número complexo é todo número da forma $a + bi$ tal que a e b são números reais quaisquer e i é a unidade imaginária.

A expressão $a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é denominada **forma algébrica** do número complexo, em que a e b são, respectivamente, a **parte real** e a **parte imaginária** do complexo.

Exemplos

a) $3 + 5i$ é um número complexo com $\begin{cases} \text{parte real } 3 \\ \text{e} \\ \text{parte imaginária } 5. \end{cases}$

b) $6 - 3i$ é um número complexo com { parte real 6 e parte imaginária -3.

c) 8 é um número complexo com { parte real 8 e parte imaginária 0.

d) i é um número complexo com { parte real 0 e parte imaginária 1.

Denotamos por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, isto é: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid \{a, b\} \subset \mathbb{R}\}$.

3.1. Número complexo real

Um número complexo $a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é **real** se, e somente se, $b = 0$.

Exemplos

a) O número real 5 é o número complexo $5 + 0i$.
b) O número real 0 é o número complexo $0 + 0i$.

De modo geral, todo número real a é o número complexo $a + 0i$; logo, temos que:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

3.2. Número complexo imaginário

Um número complexo $a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é **imaginário** se, e somente se, $b \neq 0$.

Exemplos

a) O número $5 + 3i$ é imaginário, pois sua parte imaginária, 3, é diferente de zero.
b) O número $-8i$ é imaginário, pois sua parte imaginária, -8, é diferente de zero.

3.3. Número complexo imaginário puro

Um número complexo $a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é **imaginário puro** se, e somente se, $a = 0$ e $b \neq 0$.

Exemplos

a) O número complexo $6i$ é imaginário puro, pois sua parte real é igual a zero e sua parte imaginária, 6, é diferente de zero.

b) O número complexo i é imaginário puro, pois sua parte real é igual a zero e sua parte imaginária, 1, é diferente de zero.

Exercícios resolvidos

R.1 Obter x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o número complexo $5 + (x^2 - 9)i$ seja real.

Resolução

O número $5 + (x^2 - 9)i$ é real se, e somente se, $x^2 - 9 = 0 \therefore x^2 = 9 \therefore x = \pm 3$.
Logo, o número é real se, e somente se, $x = 3$ ou $x = -3$.

R.2 Determinar x, $x \in \mathbb{R}$, para que o número complexo $(x^2 - 25) + (x - 5)i$ seja imaginário puro.

Resolução

O número $(x^2 - 25) + (x - 5)i$ é imaginário puro se, e somente se, $\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \pm 5 \\ x \neq 5. \end{cases}$

Logo, $x = -5$.

Assim, o número é imaginário puro se, e somente se, $x = -5$.

4. Igualdade entre números complexos

Sendo $a + bi$ e $c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, define-se: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$

Exercícios resolvidos

R.3 Determinar os números reais x e y tais que $x^2 - 3 + 2i = 13 + yi$.

Resolução

$$x^2 - 3 + 2i = 13 + yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 13 \\ 2 = y \end{cases} \therefore \begin{cases} x^2 = 16 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ y = 2. \end{cases}$$

Assim, os números reais x e y são tais que $x = 4$ ou $x = -4$ e $y = 2$.

R.4 Obter os números reais x e y de modo que $x + 2y + 4i = 11 + (9x - y)i$.

Resolução

$$x + 2y + 4i = 11 + (9x - y)i \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 11 \\ 9x - y = 4 \end{cases} \therefore \begin{cases} x + 2y = 11 \quad \text{(I)} \\ 18x - 2y = 8. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Somamos membro a membro (I) e (II): $19x = 19 \Rightarrow x = 1$.

Substituindo $x = 1$ em (I), temos $1 + 2y = 11 \therefore y = 5$.

Logo, os reais x e y são $x = 1$ e $y = 5$.

5. Números complexos conjugados

Definição

O conjugado de um número complexo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é o número $\overline{z}$ (lê-se "conjugado de z") tal que $\overline{z} = a - bi$.

Exemplos

a) O conjugado de $z = 3 + 2i$ é $\overline{z} = 3 - 2i$.
b) O conjugado de $z = 6 - 3i$ é $\overline{z} = 6 + 3i$.
c) O conjugado de $z = 8i$ é $\overline{z} = -8i$.
d) O conjugado de $z = 6$ é $\overline{z} = 6$.

Exercício resolvido

R.5 Demonstrar que $\overline{\overline{z}} = z$, $\forall z, z \in \mathbb{C}$.

Resolução

Seja $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a + bi = z.$$

(c.q.d.)

6. Adição de números complexos

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, define-se: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

Exemplos

a) Sendo $z_1 = 4 + 2i$ e $z_2 = 3 + 6i$, tem-se que $z_1 + z_2 = (4 + 3) + (2 + 6)i = 7 + 8i$.
b) Sendo $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = -9i$, tem-se que $z_1 + z_2 = (3 + 0) + (4 - 9)i = 3 - 5i$.
c) Sendo $z_1 = 8$ e $z_2 = 6 - 3i$, tem-se que $z_1 + z_2 = (8 + 6) + (0 - 3)i = 14 - 3i$.

6.1. Propriedades da adição de números complexos

A.1 Associativa

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall \{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C}.$$

Demonstração

Sendo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$, com $\{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) \overset{(1)}{=} [(a + c) + (b + d)i] +$$
$$+ (e + fi) \overset{(2)}{=} [(a + c) + e] + [(b + d) + f]i \overset{(3)}{=} [a + (c + e)] +$$
$$+ [b + (d + f)]i \overset{(4)}{=} (a + bi) + [(c + e) + (d + f)i] = z_1 + (z_2 + z_3).$$

Justificativa das passagens:

- (1), (2) e (4), pela definição de adição de números complexos;
- (3), pela propriedade associativa da adição de números reais.

(c.q.d.)

A.2 Comutativa

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall \{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}.$$

Demonstração

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) \overset{(1)}{=} (a + c) + (b + d)i \overset{(2)}{=} (c + a) + (d + b)i \overset{(3)}{=} (c + di) +$$
$$+ (a + bi) = z_2 + z_1.$$

Justificativa das passagens:

- (1) e (3), pela definição de adição de números complexos;
- (2), pela propriedade comutativa da adição de números reais.

(c.q.d.)

A.3 Elemento neutro

Existe e, $e \in \mathbb{C}$, tal que $z + e = e + z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Demonstração

Sendo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$z = a + bi \overset{(1)}{=} (a + 0) + (b + 0)i \overset{(2)}{=} (a + bi) + (0 + 0i) = z + (0 + 0i) \overset{(3)}{=} (0 + 0i) + z.$$

Justificativa das passagens:

- (1), pela propriedade do elemento neutro da adição de números reais;
- (2), pela definição de adição de números complexos;
- (3), pela propriedade comutativa da adição de números complexos.

Logo, existe $e = 0 + 0i$ tal que $z + e = e + z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(c.q.d.)

O número $e = 0 + 0i$ é denominado "**elemento neutro** da adição de números complexos".

A.4 Elemento oposto

Para cada número complexo z existe o número complexo w tal que $z + w = w + z = 0 + 0i$.

Demonstração

Sendo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$0 + 0i \overset{(1)}{=} [a + (-a)] + [b + (-b)]i \overset{(2)}{=} (a + bi) + (-a - bi) =$$

$$= z + (-a - bi) \overset{(3)}{=} (-a - bi) + z.$$

Justificativa das passagens:

- (1), pela propriedade do elemento oposto para a adição de números reais;
- (2), pela definição de adição de números complexos;
- (3), pela propriedade comutativa da adição de números complexos.

Logo, para todo complexo $z = a + bi$ existe o complexo $w = -a - bi$ tal que $z + w = w + z = 0 + 0i$.

(c.q.d.)

Os números $z = a + bi$ e $w = -a - bi$ são denominados **números opostos**. Indicamos esse fato por $w = -z$ ou por $z = -w$.

Exemplos

a) O oposto de $z = 3 + 5i$ é $-z = -3 - 5i$.
b) O oposto de $z = 6 - 3i$ é $-z = -6 + 3i$.
c) O oposto de $z = -2i$ é $-z = 2i$.
d) O oposto de $z = 4$ é $-z = -4$.
e) O oposto de $z = 0$ é $-z = 0$.

7. Subtração de números complexos

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, define-se $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, ou seja:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Exemplos

a) Sendo $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 2 + 7i$, tem-se que:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (3 + 4i) + (-2 - 7i) = (3 - 2) + (4 - 7)i = 1 - 3i.$$

b) Sendo $z_1 = -8 + i$ e $z_2 = 4 - 10i$, tem-se que:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (-8 + i) + (-4 + 10i) = (-8 - 4) + (1 + 10)i = -12 + 11i.$$

Exercícios resolvidos

R.6 Sejam $z_1 = 8 - 4i$, $z_2 = 2 + 5i$ e $z_3 = 6i$. Calcular:

a) $z_1 + z_2$;
b) $z_1 + \overline{z_2}$;
c) $z_1 - z_2$;
d) $z_1 - \overline{z_2}$;
e) $\overline{z_1} + z_2 - z_3$;
f) $\overline{z_1 - z_2} + z_3$.

Resolução

a) $z_1 + z_2 = (8 - 4i) + (2 + 5i) = (8 + 2) + (-4 + 5)i = 10 + i$.
b) $z_1 + \overline{z_2} = (8 - 4i) + (2 - 5i) = (8 + 2) + (-4 - 5)i = 10 - 9i$.
c) $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (8 - 4i) + (-2 - 5i) = (8 - 2) + (-4 - 5)i = 6 - 9i$.
d) $z_1 - \overline{z_2} = z_1 + (-\overline{z_2}) = 8 - 4i + [-(2 - 5i)] = (8 - 4i) + (-2 + 5i) = (8 - 2) + (-4 + 5)i = 6 + i$.
e) $\overline{z_1} + z_2 - z_3 = [\overline{z_1} + z_2] + (-z_3) = [(8 + 4i) + (2 + 5i)] + (-6i) = [10 + 9i] + (-6i) = 10 + 3i$.
f) $\overline{z_1 - z_2} + z_3 = \overline{z_1 + (-z_2)} + z_3 = \overline{(8 - 4i) + (-2 - 5i)} + (6i) = \overline{6 - 9i} + 6i = 6 + 9i + 6i = 6 + 15i$.

R.7 Determinar o número complexo $z = 2 + yi$, $y \in \mathbb{R}$, tal que $z = \overline{z} + 8i$.

Resolução

$$2 + yi = 2 - yi + 8i \therefore 2 + yi = 2 + (-y + 8)i \therefore y = -y + 8 \Rightarrow 2y = 8 \therefore y = 4.$$

Logo, o número z é $z = 2 + 4i$.

R.8 Determinar os números reais x e y tais que $(2x + 2i) + (3 + yi) = 5 + 7i$.

Resolução

$$(2x + 2i) + (3 + yi) = 5 + 7i \therefore (2x + 3) + (2 + y)i = 5 + 7i \therefore \begin{cases} 2x + 3 = 5 \\ 2 + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5. \end{cases}$$

Logo, os reais x e y são $x = 1$ e $y = 5$.

R.9 Demonstrar que o elemento neutro da adição de números complexos, $e = 0 + 0i$, é único.

Resolução

Suponhamos que exista outro número complexo, $e' = c + di$, $\{c, d\} \subset \mathbb{R}$, tal que $z + e' = e' + z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Sendo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$z + e' = z \Rightarrow (a + bi) + (c + di) = a + bi \therefore (a + c) + (b + d)i = a + bi$$

$$\therefore \begin{cases} a + c = a \\ b + d = b \end{cases} \therefore \begin{cases} c = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$

Logo, $e' = 0 + 0i = e$.

Assim, concluímos que o elemento neutro da adição é único.

(c.q.d.)

8. Multiplicação de números complexos

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, define-se: $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Exemplos

a) Sendo $z_1 = 4 + 2i$ e $z_2 = 3 + 5i$, tem-se que:

$$z_1 z_2 = (4 \cdot 3 - 2 \cdot 5) + (4 \cdot 5 + 2 \cdot 3)i = 2 + 26i.$$

b) Sendo $z_1 = -3i$ e $z_2 = 6 + 2i$, tem-se que:

$$z_1 z_2 = [0 \cdot 6 - (-3) \cdot 2] + [0 \cdot 2 + (-3) \cdot 6]i = 6 - 18i.$$

Você deve estar assustado com essa estranha definição de multiplicação. Porém, sua origem é extremamente simples.

Ao definir a adição e a multiplicação em $\mathbb{C}$, pretende-se que estas sejam extensões dos conceitos de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ e que as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro, elemento oposto, elemento inverso e distributiva sejam preservadas. Ora, para que isso ocorra deve-se ter:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Vamos mostrar, a seguir, que a multiplicação em $\mathbb{C}$ preserva as propriedades da multiplicação em $\mathbb{R}$.

8.1. Propriedades da multiplicação de números complexos

M.1 Associativa

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3), \forall \{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C}.$$

Demonstração

Sendo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$, com $\{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$(z_1 z_2) z_3 = [(a + bi)(c + di)](e + fi) \overset{(1)}{=} [(ac - bd) + (ad + bc)i](e + fi) \overset{(2)}{=}$$

$$= [(ac - bd)e - (ad + bc)f] + [(ac - bd)f + (ad + bc)e]i \overset{(3)}{=}$$

$$= [ace - bde - adf - bcf] + [acf - bdf + ade + bce]i \overset{(4)}{=}$$

$$= [a(ce - df) - b(cf + de)] + [a(cf + de) + b(ce - df)]i \overset{(5)}{=}$$

$$= (a + bi)[(ce - df) + (cf + de)i] \overset{(6)}{=} (a + bi)[(c + di)(e + fi)] = z_1 (z_2 z_3).$$

Justificativa das passagens:

- (1), (2), (5) e (6), pela definição de multiplicação de números complexos;
- (3) e (4), pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números reais e pela propriedade comutativa da adição de números reais. (c.q.d.)

M.2 Comutativa

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \forall \{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$$

Demonstração

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) \overset{(1)}{=} (ac - bd) + (ad + bc)i \overset{(2)}{=} (ca - db) + (cb + da)i \overset{(3)}{=}$$
$$= (c + di)(a + bi) = z_2 z_1.$$

Justificativa das passagens:

- (1) e (3), pela definição de multiplicação de números complexos;
- (2), pelas propriedades comutativas da adição e da multiplicação de números reais.

(c.q.d.)

M.3 Elemento neutro

Existe u, $u \in \mathbb{C}$, tal que $zu = uz = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Demonstração

Sendo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$z = a + bi \overset{(1)}{=} (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i \overset{(2)}{=} (a + bi)(1 + 0i) = z(1 + 0i) \overset{(3)}{=} (1 + 0i)z.$$

Justificativa das passagens:

- (1), pela propriedade do elemento neutro da multiplicação de números reais e pelo fato de que $b \cdot 0 = a \cdot 0 = 0$, $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}$;
- (2), pela definição de multiplicação de números complexos;
- (3), pela propriedade comutativa da multiplicação de números complexos.

Logo, existe $u = 1 + 0i$ tal que $zu = uz = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

(c.q.d.)

O número $u = 1 + 0i$ é denominado "**elemento neutro** da multiplicação de números complexos".

M.4 Elemento inverso

Para cada número complexo z, $z \neq 0 + 0i$, existe o número complexo v tal que $zv = vz = 1 + 0i$.

Demonstração

Seja $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Vamos mostrar que existe um número complexo $v = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tal que $zv = vz = 1 + 0i$.

De fato, temos que:

$$zv = 1 + 0i \Leftrightarrow (a + bi)(x + yi) = 1 + 0i \therefore zv = 1 + 0i \Leftrightarrow (ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i$$

$$\therefore zv = 1 + 0i \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0. \end{cases} \quad (I)$$

Observe que o determinante $D = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$ é diferente de zero, pois, por hipótese, temos que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Assim, pelo **teorema de Cramer**, concluímos que o sistema (I), nas incógnitas x e y, é possível e determinado.

Logo, existe um único complexo $v = x + yi$ tal que $zv = 1 + 0i$.

Como já foi provada a propriedade comutativa, temos que $zv = vz = 1 + 0i$. **(c.q.d.)**

Notas

1. Resolvendo o sistema (I), obtém-se $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ e, portanto,

$$v = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}.$$

2. Os números não-nulos $z = a + bi$ e $v = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$ são denominados **números inversos** ou **números recíprocos**. Indicamos esse fato por $v = z^{-1}$ ou por $z = v^{-1}$.

3. A demonstração anterior provou a **existência** e a **unicidade** do inverso de um complexo não-nulo, $z = a + bi$.

Exemplo

O inverso do número $z = 3 + 2i$ é o complexo $v = x + yi$ tal que $zv = vz = 1 + 0i$ ou, simplesmente, $zv = 1 + 0i$, pois é válida a propriedade comutativa para a multiplicação.

Para a obtenção de v, resolvemos a equação:

$$(3 + 2i)(x + yi) = 1 + 0i \therefore (3x - 2y) + (3y + 2x)i = 1 + 0i$$

$$\therefore \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 6x - 4y = 2 & \text{(I)} \\ -6x - 9y = 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

Somando (I) e (II), membro a membro, temos $-13y = 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{13}$.

Substituindo $y = -\frac{2}{13}$ em $2x + 3y = 0$, obtemos $2x + 3\left(-\frac{2}{13}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{13}$.

Logo, temos $v = z^{-1} = \frac{3}{13} - \frac{2i}{13}$.

Vamos ver mais adiante um método mais rápido para o cálculo do inverso de um complexo não-nulo.

M.5 Distributivas

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3, \forall \{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C} \text{ e}$$
$$(z_2 + z_3)z_1 = z_2z_1 + z_3z_1, \forall \{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C}.$$

Demonstração

Sendo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$, com $\{a, b, c, d, e, f\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$z_1(z_2 + z_3) = (a + bi)[(c + di) + (e + fi)] \overset{(1)}{=} (a + bi)[(c + e) + (d + f)i] \overset{(2)}{=}$$

$$= [a(c + e) - b(d + f)] + [a(d + f) + b(c + e)]i \overset{(3)}{=} [ac + ae - bd - bf] +$$

$$+ [ad + af + bc + be]i \overset{(4)}{=} [(ac - bd) + (ae - bf)] + [(ad + bc) + (af + be)]i \overset{(5)}{=}$$

$$= [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(ae - bf) + (af + be)i] \overset{(6)}{=} (a + bi)(c + di) +$$
$$+ (a + bi)(e + fi) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

Justificativa das passagens:

- (1) e (5), pela definição de adição de números complexos;
- (2) e (6), pela definição de multiplicação de números complexos;
- (3), pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números reais;
- (4), pelas propriedades associativa e comutativa, da adição de números reais.

Note que, como a multiplicação de complexos é comutativa, fica automaticamente demonstrada a distributiva à direita, ou seja: $(z_2 + z_3)z_1 = z_2z_1 + z_3z_1$.

(c.q.d.)

8.2. Cálculo do produto de números complexos através de propriedades

Para efetuarmos a multiplicação de dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, podemos simplesmente aplicar as propriedades operatórias, evitando assim a definição, que é confusa e de difícil memorização.

Exemplos

a) Para calcular o produto do complexo $z_1 = 3 + 2i$ por $z_2 = 5 + 4i$, aplicamos a propriedade distributiva e, a seguir, as comutativas da multiplicação e da adição:

$$(3 + 2i)(5 + 4i) = 15 + 12i + 10i + 8i^2 = 15 + 12i + 10i - 8 = 7 + 22i.$$

b) Analogamente, efetuamos o produto de $z_1 = -4i$ por $z_2 = 2 - 6i$:

$$-4i\,(2 - 6i) = -8i + 24i^2 = -8i - 24.$$

Exercícios resolvidos

R.10 Sejam os números complexos $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4$, $z_3 = 5i$, $z_4 = 6 - 2i$. Calcular:

a) z_1z_2;
b) z_1z_3;
c) z_1z_4;
d) $z_2z_3 + z_4$;
e) $z_3z_4 - z_2z_1$.

Resolução

a) $z_1z_2 = (3 + 2i)4 = 12 + 8i$.
b) $z_1z_3 = (3 + 2i)5i = 15i + 10i^2 = -10 + 15i$.
c) $z_1z_4 = (3 + 2i)(6 - 2i) = 18 - 6i + 12i - 4i^2 = 18 - 6i + 12i + 4 = 22 + 6i$.
d) $z_2z_3 + z_4 = 4 \cdot 5i + 6 - 2i = 20i + 6 - 2i = 6 + 18i$.
e) $z_3z_4 - z_2z_1 = 5i(6 - 2i) - 4(3 + 2i) = 30i - 10i^2 - 12 - 8i = 30i + 10 - 12 - 8i = -2 + 22i$.

R.11 Determinar o número $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tal que $zi + 2\bar{z} = 4 - i$.

Resolução

$(x + yi)i + 2(x - yi) = 4 - i \therefore xi + yi^2 + 2x - 2yi = 4 - i \therefore (-y + 2x) + (x - 2y)i = 4 - i$

$$\therefore \begin{cases} -y + 2x = 4 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \therefore \begin{cases} y = 2x - 4 \quad \text{(I)} \\ x - 2y = -1. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II): $x - 2(2x - 4) = -1 \therefore x - 4x + 8 = -1 \therefore -3x = -9 \therefore x = 3$.
Fazendo $x = 3$ em (I), temos $y = 2 \cdot 3 - 4 \Rightarrow y = 2$.
Logo, $z = 3 + 2i$.

9. Divisão de números complexos

Definição

O quociente de um complexo z por um complexo não-nulo w é o número complexo k se, e somente se, $kw = z$. Indica-se esse quociente por $\frac{z}{w}$ ou por $z : w$. Assim, temos:

$$\frac{z}{w} = k \Leftrightarrow kw = z.$$

Exemplos

a) Observando que $(3 + 2i)(1 + i) = 1 + 5i$, pode-se concluir que $\frac{1 + 5i}{1 + i} = 3 + 2i$.

b) Para todo complexo não-nulo z tem-se que $z \cdot z^{-1} = 1$. Pode-se então concluir: $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

9.1. Propriedade da divisão de números complexos

Sendo z, w e c números complexos tais que $w \neq 0$ e $c \neq 0$, tem-se $\frac{z}{w} = \frac{zc}{wc}$.

Demonstração

Sendo k o quociente de z por w, temos que:

$$\frac{z}{w} = k \Leftrightarrow z = kw;$$

$$z = kw \Leftrightarrow zc = kwc;$$

$$zc = kwc \Leftrightarrow \frac{zc}{wc} = k.$$

Logo, $\frac{z}{w} = k \Leftrightarrow \frac{zc}{wc} = k$, ou seja: $\frac{z}{w} = \frac{zc}{wc}$. (c.q.d.)

Essa propriedade garante que o quociente $\frac{z}{w}$ não se altera ao multiplicarmos o numerador e o denominador por um complexo não-nulo c. Desse modo, pode-se obter facilmente o quociente $\frac{z}{w}$, conforme mostraremos nos exercícios a seguir.

Exercícios resolvidos

R.12 Sejam $z_1 = 2$ e $z_2 = 3 + 5i$. Efetuar $z_1 : z_2$.

Resolução

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3 + 5i}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, temos que:

$$z_1 : z_2 = \frac{2}{3 + 5i} = \frac{2}{3 + 5i} \cdot \frac{3 - 5i}{3 - 5i} = \frac{2(3 - 5i)}{3^2 - (5i)^2} = \frac{2(3 - 5i)}{34} = \frac{3 - 5i}{17}.$$

Logo, $z_1 : z_2 = \frac{3}{17} - \frac{5i}{17}$.

R.13 Sejam $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 1 - i$. Efetuar $z_1 : z_2$.

Resolução

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{1 - i}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, temos que:

$$z_1 : z_2 = \frac{1 + 2i}{1 - i} = \frac{1 + 2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{1 + i + 2i + 2i^2}{1^2 - i^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}.$$

R.14 Determinar o inverso do número complexo não-nulo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

Resolução

Por definição, temos que o inverso de um número complexo não-nulo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é o número z^{-1} tal que $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

Podemos representar o número z^{-1} também por $z^{-1} = \frac{1}{z} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$.

Para colocar na forma algébrica o número z^{-1}, basta multiplicarmos o numerador e o denominador da expressão $\frac{1}{a + bi}$ pelo conjugado do denominador, ou seja:

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2i^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Logo, $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$.

R.15 Determinar o inverso do número complexo $z = 4 + 2i$.

Resolução

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{4 + 2i}.$$

Multiplicando por $4 - 2i$ o numerador e o denominador de $\frac{1}{4 + 2i}$, obtemos a forma algébrica de z^{-1}:

$$z^{-1} = \frac{1(4 - 2i)}{(4 + 2i)(4 - 2i)} = \frac{4 - 2i}{4^2 - 2^2i^2} = \frac{4 - 2i}{20}.$$

Logo, $z^{-1} = \frac{4}{20} - \frac{2i}{20} = \frac{1}{5} - \frac{i}{10}$.

10. Potências de números complexos com expoentes inteiros

Sendo w um número complexo qualquer, definem-se:

I. $w^0 = 1$;

II. $w^1 = w$;

III. $w^n = w \cdot w \cdot w \cdot \ldots \cdot w$, $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$;

IV. $w^{-n} = \frac{1}{w^n}$, $w \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

a) $i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i \cdot i)(i \cdot i) = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$.

b) $(1 + i)^2 = (1 + i)(1 + i) = 1 + i + i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

c) $(2i)^{-4} = \frac{1}{(2i)^4} = \frac{1}{2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i} = \frac{1}{16i^4} = \frac{1}{16 \cdot 1} = \frac{1}{16}$.

10.1. Propriedades das potências de números complexos

Através da definição de potência e das propriedades da multiplicação, demonstra-se que:

P.1 $w^n \cdot w^m = w^{n+m}$,

P.2 $w^n : w^m = w^{n-m}$,

P.3 $(w^n)^m = w^{nm}$,

P.4 $(wv)^n = w^n v^n$,

P.5 $\left(\frac{w}{v}\right)^n = \frac{w^n}{v^n}$,

para quaisquer complexos w e v e quaisquer inteiros m e n, **obedecidas as condições de existência**.

Exercícios resolvidos

R.16 Calcular:

a) i^8; b) i^5; c) i^6; d) i^{-4}; e) i^{-5}.

Resolução

a) $i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$.

b) $i^5 = i^4 \cdot i^1 = (i^2)^2 \cdot i = (-1)^2 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

c) $i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$.

d) $i^{-4} = \frac{1}{i^4} = \frac{1}{(i^2)^2} = \frac{1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$.

e) $i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i^4 \cdot i^1} = \frac{1}{(i^2)^2 \cdot i} = \frac{1}{(-1)^2 \cdot i} = \frac{1}{i}$.

Podemos escrever esse resultado sob uma forma mais simples se multiplicarmos o numerador e o denominador da expressão $\frac{1}{i}$ por $-i$. Ou seja: $i^{-5} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)} = -i$.

R.17 Calcular $(1 + i)^{10}$.

Resolução

$(1 + i)^{10} = [(1 + i)^2]^5 = [1 + 2i + i^2]^5 = [\cancel{1} + 2i \cancel{- 1}]^5 = (2i)^5 = 2^5 \cdot i^5 = 32i^4 \cdot i = 32(i^2)^2 \cdot i = 32(-1)^2 i = 32i$.

10.2. Teorema

Existem quatro e somente quatro valores para potências de i com expoentes inteiros. São eles:

$$i^0 = 1;$$
$$i^1 = i;$$
$$i^2 = -1;$$
$$i^3 = -i.$$

Demonstração

Calculemos a potência i^n com n inteiro.

Primeira parte: $n \geq 4$

Dividindo n por 4, obtemos um quociente inteiro q e um resto r, r inteiro e $0 \leq r < 4$, isto é, $n = 4q + r$. Assim, temos que $i^n = i^{4q+r} = i^{4q} i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$.

Como r é inteiro e $0 \leq r < 4$, temos que i^n é um dos quatro valores, i^0, i^1, i^2 ou i^3.

Segunda parte: $n < 0$

$$i^n = (i^{-1})^{-n}.$$

Note que $i^{-1} = \frac{1}{i}$. Multiplicamos o numerador e o denominador dessa fração por $-i$:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i.$$

Assim, temos que $i^n = (-i)^{-n} = (-1)^{-n} i^{-n}$.

Como $n < 0$, temos que $-n > 0$; logo, i^{-n} é um dos quatro valores, $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e, portanto, $(-1)^{-n} i^{-n}$ também assume esses quatro valores.

(c.q.d.)

Conseqüência

Para o cálculo da potência i^n com n inteiro e $n \geq 4$, divide-se n por 4, obtendo-se resto inteiro r. Tem-se então $i^n = i^r$.

Exercícios resolvidos

R.18 Calcular:

a) i^{10}; b) i^{53}; c) i^{79}; d) i^{72}; e) i^{-37}; f) i^{-47}.

Resolução

a)

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ 2 & 2 \end{array}$$

$\therefore i^{10} = i^2 = -1.$

b)

$$\begin{array}{r|l} 53 & 4 \\ 1 & 13 \end{array}$$

$\therefore i^{53} = i^1 = i.$

c)

$$\begin{array}{r|l} 79 & 4 \\ 3 & 19 \end{array}$$

$\therefore i^{79} = i^3 = -i.$

d)

$$\begin{array}{r|l} 72 & 4 \\ 0 & 18 \end{array}$$

$\therefore i^{72} = i^0 = 1.$

e)

$$i^{-37} = \frac{1}{i^{37}}$$

$$\begin{array}{r|l} 37 & 4 \\ 1 & 9 \end{array}$$

$$\therefore i^{-37} = \frac{1}{i^{37}} = \frac{1}{i^1} = \frac{1 \cdot (-i)}{i\,(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i.$$

f)

$$i^{-47} = \frac{1}{i^{47}}$$

$$\begin{array}{r|l} 47 & 4 \\ 07 & 11 \\ 3 & \end{array}$$

$$\therefore i^{-47} = \frac{1}{i^{47}} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1 \cdot i}{-i \cdot i} = \frac{i}{-i^2} = i.$$

11. Propriedades do conjugado de um número complexo

Seja o número complexo $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. Denotando a parte real x por $\mathrm{Re}(z)$, a parte imaginária y por $\mathrm{Im}(z)$ e o conjugado de z por $\overline{z}$, valem as seguintes propriedades:

G.1 $\overline{\overline{z}} = z;$

G.2 $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R};$

G.3 $z + \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Re}(z);$

G.4 $z - \overline{z} = 2 \cdot \mathrm{Im}(z) \cdot i;$

G.5 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2;$

G.6 $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2;$

G.7 $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2;$

G.8 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$;

G.9 $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrações

G.1 $\overline{\overline{z}} = \overline{(x + yi)} = (x - yi) = x + yi = z$.

G.2 Temos:

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi;$$
$$x + yi = x - yi \Leftrightarrow y = 0;$$
$$\begin{cases} z = x + yi \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

G.3 $z + \overline{z} = x + yi + x - yi = 2x = 2\text{Re}(z)$.

G.4 $z - \overline{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi = 2\text{Im}(z)i$.

G.5 Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$.

$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) + (b + d)i = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

G.6 Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$.

$\overline{z_1 - z_2} = (a - c) + (b - d)i = (a - c) - (b - d)i = (a - bi) - (c - di) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

G.7 Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$.

$\overline{z_1 z_2} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

G.8 Sejam os complexos z_1 e z_2, $z_2 = a + bi$, $z_2 \neq 0$ e $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} \overset{\text{G.7}}{=} \overline{z_1}\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1}\left(\frac{1}{a + bi}\right) = \overline{z_1}\left(\frac{a - bi}{a^2 + b^2}\right) = \overline{z_1} \cdot \frac{a + bi}{a^2 + b^2} =$$

$$= \overline{z_1} \cdot \frac{1}{a - bi} = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

G.9 $(\overline{z})^n = \underbrace{\overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \ldots \cdot \overline{z}}_{n \text{ fatores}} = \overline{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z} = \overline{z^n}$.

Extensão da G.2

Exercícios resolvidos

R.19 Determinar o número complexo z_2 de modo que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + 3 + 2i$.

Resolução

Pela propriedade G.5, temos:

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1} + 3 + 2i \therefore \overline{z_2} = 3 + 2i \therefore z_2 = 3 - 2i.$$

R.20 Determinar o número complexo z_2, tal que $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{3z_1}}{8 - 2i}$, com $z_1 \neq 0$.

Resolução

Pelas propriedades G.8, G.7 e G.2, temos que:

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{3} \cdot \overline{z_1}}{8 - 2i} \Rightarrow \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{3 \cdot \overline{z_1}}{8 - 2i} \therefore \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{3}{8 - 2i} \therefore \overline{z_2} = \frac{8}{3} - \frac{2i}{3} \therefore z_2 = \frac{8}{3} + \frac{2i}{3}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5 (a, b), B.6, B.7, B.8 (a, b, c, d), B.9, B.12 (a), B.13 (a até e), B.14 (a, b), B.15 (a, b), B.16, B.18 (a, b, c), B.19 (a), B.20, B.23, B.24 (a), B.25 (a), C.4, C.5, C.8 (a), C.10, C.12.

Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.5 (c), B.8 (e, f, g, h), B.10, B.11, B.12 (b), B.13 (f até i), B.14 (c), B.15 (c até g), B.17, B.18 (d até h), B.19 (b), B.21, B.22, B.24 (b), B.25 (b), C.1, C.2, C.3, C.6, C.7, C.8 (b), C.9, C.11, C.13, C.14.

Exercícios básicos

B.1 Para que valores reais de x o número $\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) + 3i$ é imaginário puro?

B.2 Determine todos os valores reais de x, de modo que o número $(x^4 - 16) + (x + 2)i$ seja imaginário puro.

B.3 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o número $5 + (x^3 - 8)i$ seja real.

B.4 Obtenha todos os valores reais de x, de modo que o número $x + (x^2 - 9)i$ seja real.

B.5 Encontre os números reais x e y de modo que:

a) $2x - y + (x + y)i = 7 + 8i$;

b) $x^2 - 8 + (y + 2x)i = 1 + 11i$;

c) $\frac{x + 5}{y - 2} + (3x + y)i = 6 + 2yi$.

B.6 Dado um número complexo z, demonstre que $\overline{z} \neq z$ se, e somente se, $\text{Im}(z) \neq 0$.

B.7 Assinale V ou F:

a) O conjugado de um número real é ele mesmo.
b) O conjugado de um número imaginário puro é ele mesmo.
c) Dois números imaginários puros conjugados entre si não podem ser iguais.
d) Sendo z um número complexo qualquer, tem-se $\overline{\overline{z}} = \overline{z}$.

B.8 Dados $z_1 = 8 + 6i$, $z_2 = -4 + 2i$, $z_3 = 9 + i$ e $z_4 = -3i$, calcule:

a) $z_1 + z_2$;
b) $z_1 + z_2 + \overline{z_3}$;
c) $z_1 - z_2$;
d) $\overline{z_1 - z_2} - (z_3 + z_4)$;
e) $z_1 + \overline{z_1}$;
f) $z_1 - \overline{z_1}$;
g) $\overline{z_2} + \overline{z_4}$;
h) $z_1 - z_2 + z_3$.

B.9 Determine o número complexo $z = 5 + yi$, $y \in \mathbb{R}$, tal que $z + (3 + 2i) = \overline{z} + (3 + 10i)$.

B.10 Obtenha o número complexo $z = 8 + yi$, $y \in \mathbb{R}$, tal que $z - \overline{z} = 6i$.

B.11 Qual é o número complexo $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tal que $z = -z$?

B.12 Encontre os números reais x e y de modo que:

a) $(3x + 4yi) + (5 + 6i) = 11 + 18i$;
b) $(2x + 3yi) + (y + xi) = 6 + 13i$.

B.13 Sejam os números complexos $z_1 = 6$, $z_2 = 3i$, $z_3 = 5 - 7i$, $z_4 = 8 + 3i$. Calcule:

a) $z_1 z_2$;
b) $z_1 z_3$;
c) $z_2 z_3$;
d) $z_3 z_4$;
e) z_3^2;
f) $z_3\overline{z_4} + \overline{z_3}z_4$;
g) $z_3\overline{z_3}$;
h) $z_4^2 - z_2 z_3$;
i) $(z_4 + z_3)^2$.

B.14 Determine o número complexo $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tal que:
a) $3\overline{z} + 2z = 10 - 5i$; b) $\overline{z}i + 5z = 2\overline{z}$; c) $\overline{z} + 2z = z(1 + 2i)$.

B.15 Determine o inverso de cada um dos seguintes números complexos:
a) $z_1 = 2 + 3i$; c) $z_3 = 6 - 2i$; e) $z_5 = i$; g) $z_7 = 3i$.
b) $z_2 = 4 + i$; d) $z_4 = 1 - i$; f) $z_6 = -i$;

B.16 Para que valor real de a os números complexos $z = 1 + 2i$ e $w = \frac{1}{5} + ai$ são inversos entre si?

B.17 Sendo $z = 1 + xi$, $x \in \mathbb{R}$, obtenha x tal que $z = 2z^{-1}$.

B.18 Dados $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4 - i$, $z_3 = i$ e $z_4 = 5$, efetue:
a) $z_1 : z_2$; c) $z_4 : \overline{z_1}$; e) $3z_1 : 2\overline{z_2}$; g) $(3z_1 + \overline{z_2}) : (z_3 - z_1)$;
b) $z_1 : z_3$; d) $z_3 : z_2$; f) $(z_1 + z_2) : (z_3 - z_4)$; h) $(z_1^2 - \overline{z_3}) : z_2^2$.

B.19 Efetue:
a) $\frac{(2 + i)(1 - i)}{-i} - \frac{(1 + i)^2}{1 - i}$; b) $\left(\frac{-1 + i}{1 + i}\right)^2 - (1 + i)^{-1}$.

B.20 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o número $z = \frac{1 + i}{x - i}$ seja imaginário puro.

B.21 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o número $z = \frac{2 + i}{x + i} - \frac{i}{x}$ seja real.

B.22 Para que valor real de x o número $z = \frac{i}{x + i} - x + 2i$ é real?

B.23 Calcule:
a) i^{42}; b) i^{743}; c) i^{1024}; d) i^{97}.

B.24 Determine o valor de cada uma das expressões:
a) $E = (i^{729} \cdot i^{413})^{62}$; b) $E = (i^{628} : i^{712})^{425}$; c) $E = [(i^{614})^{327}]^{65}$ d) $E = (i^{-325} \cdot i^{68})^{33}$.

B.25 Calcule:
a) $(1 + i)^{12}$; **sugestão:** $[(1 + i)^2]^6$; b) $(2 - 2i)^6$.

Exercícios complementares

C.1 Determine todos os valores reais de x, de modo que o número $(x^4 - 16) + (x^2 - 4)i$ seja imaginário puro.

C.2 Calcule o valor real de x, tal que o número $(x^2 + 9) + 2i$ seja imaginário puro.

C.3 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o número $x + (x^2 + 1)i$ seja real.

C.4 Mostre que não existem reais x e y de modo que $x + y + xi = 3y - 3 + (2x - 2y)i$.

C.5 Prove que existem infinitos reais x e y, de modo que $x + y + xi = 3y - x + (2y - x)i$.

C.6 Demonstre que a igualdade a seguir não é possível para x e y reais: $x^2 + 2x + yi = x - 8 + 3i$.

C.7 Demonstre que o elemento neutro da multiplicação de números complexos $u = 1 + 0i$ é único.

C.8 Determine o número complexo $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tal que:
a) $z^2 = 6i$; b) $3 + z^2 - (\overline{z})^2 = z$.

C.9 Mostre que $(\overline{z_1} + \overline{z_2})^2 = (\overline{z_1})^2 + (\overline{z_2})^2$ se, e somente se, um dos complexos z_1 ou z_2 for igual a zero.

C.10 Sabendo que z_1 e z_2 são números complexos e que $z_1^2 = z_2^2$ e $\frac{\overline{z_1}^3}{\overline{z_2}^2}$, determine z_1.

C.11 Determine o número complexo z tal que $\overline{z + \bar{z}} = \overline{z - z}$.

C.12 Sendo z_1 e z_2 números complexos, $z_2 \neq 0$, demonstre a seguinte identidade:

$$\overline{\left[\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^n\right]\left[(z_2 \cdot z_1)^n\right]} = z_1^{2n}, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

C.13 Dado que z_1 e z_2 são números complexos tais que $\frac{\bar{z}_1}{1 + z_2} = 3\bar{z}_1 - 2$, mostre que $z_1 = \frac{2 + 2\bar{z}_2}{2 + 3z_2}$.

C.14 Sabendo que z_1 e z_2 são números complexos tais que $\frac{\bar{z}_1^n z_2}{z_1 + z_2} = i$, $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\bar{z}_2 = \frac{-z_1 i}{z_1^n + i}$, sob a condição $z_1^n \neq -i$.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFPA) Qual é o valor de m para que o produto $(2 + mi)(3 + i)$ seja um imaginário puro?

a) 5. b) 6. c) 7. d) 8. e) 10.

V.2 (PUC-MG) O número complexo z tal que $5z + \bar{z} = 12 + 16i$ é igual a:

a) $-2 + 2i$. b) $2 - 3i$. c) $1 + 2i$. d) $2 + 4i$. e) $3 + i$.

V.3 (FGV-SP) Sendo i a unidade imaginária, o valor de $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^4$ é:

a) 1. b) i. c) -1. d) $-i$. e) $2i$.

V.4 (Fatec-SP) Determine a forma algébrica do número complexo $z = \frac{i^{3+4n}}{1 - i}$, onde n é natural e i é unidade imaginária.

V.5 (Fuvest-SP) Ache os valores reais de x de modo que a parte real do número complexo $z = \frac{x - i}{x + i}$ seja negativa (i é a unidade imaginária).

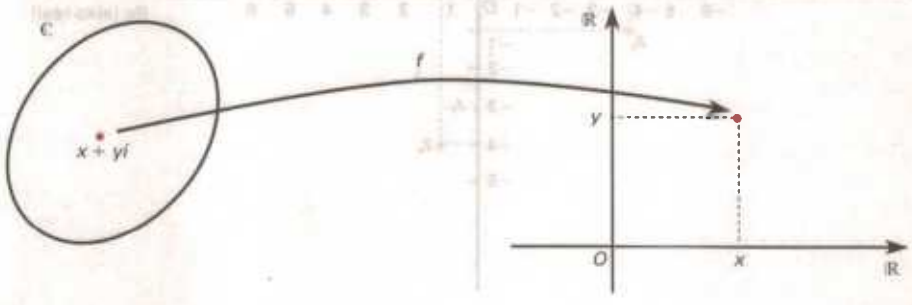
Capítulo 17

Representação geométrica e forma trigonométrica de um número complexo

1. Plano de Argand-Gauss

Consideremos o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos e o conjunto $\mathbb{R}^2$, isto é, o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Seja a função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(x + yi) = (x, y)$.



A função f é bijetora. De fato, temos que:

I. f é injetora, pois:

$$x_1 + y_1 i \neq x_2 + y_2 i \Leftrightarrow x_1 \neq x_2 \text{ ou } y_1 \neq y_2 \therefore x_1 + y_1 i \neq x_2 + y_2 i \Leftrightarrow (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2);$$

II. f é sobrejetora, pois para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe o número complexo $x + yi$ tal que $f(x + yi) = (x, y)$.

Por (I) e (II), temos que f é bijetora, isto é, a cada número complexo está associado um único ponto do plano $\mathbb{R}^2$ e a cada ponto do plano $\mathbb{R}^2$ está associado um único número complexo.

Através da função f, representa-se geometricamente o conjunto $\mathbb{C}$ pelo plano $\mathbb{R}^2$, que é chamado de **plano de Argand-Gauss**, em homenagem aos matemáticos que o criaram. No plano de Argand-Gauss o eixo das abscissas é chamado de **eixo real** (Re) e o das ordenadas é denominado **eixo imaginário** (Im). Cada ponto $P(x, y)$ desse plano é a **imagem** ou **afixo** do número complexo $x + yi$.

Exercícios resolvidos

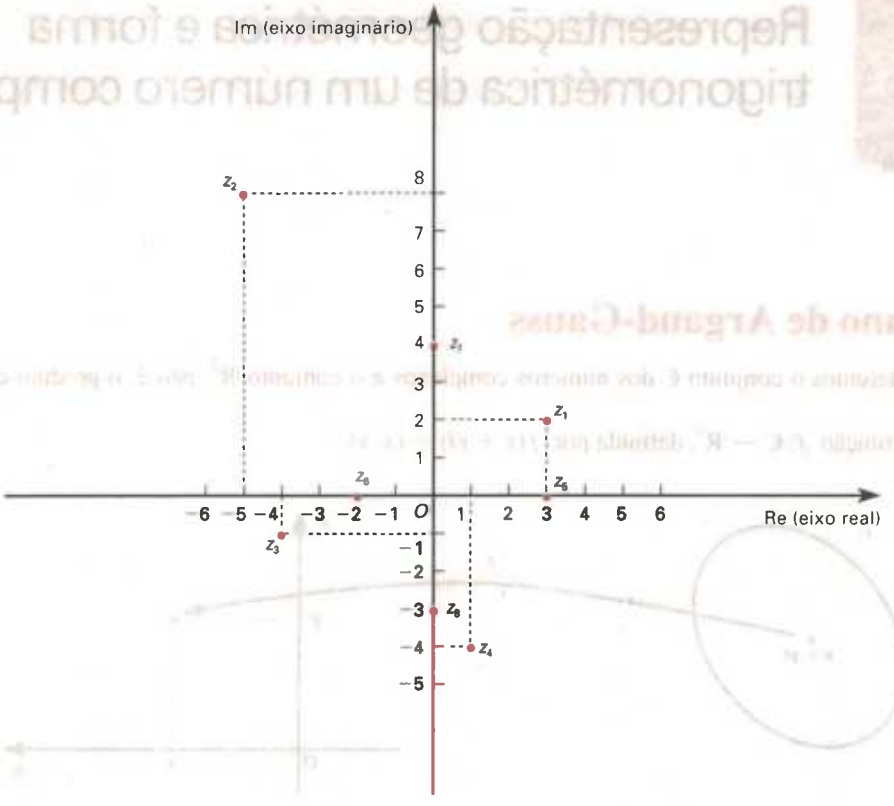
R.1 Representar no plano de Argand-Gauss as imagens dos seguintes números complexos:

$z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = -5 + 8i$; $z_3 = -4 - i$; $z_4 = 1 - 4i$;
$z_5 = 3$; $z_6 = -2$; $z_7 = 4i$; $z_8 = -3i$.

Resolução

Aos números z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 e z_8 associamos os pares ordenados de números reais (3, 2), (−5, 8), (−4, −1), (1, −4), (3, 0), (−2, 0), (0, 4) e (0, −3), respectivamente.

Assim, temos:



R.2 Representar no plano de Argand-Gauss as imagens de todos os números complexos z tais que $z + 2\bar{z} = zi$.

Resolução

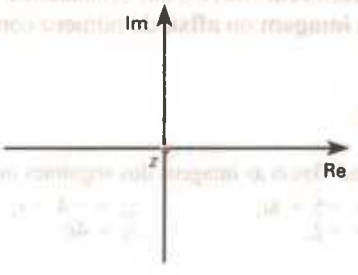
Fazendo $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos que:

$$x + yi + 2(x - yi) = (x + yi)i \;\therefore\; x + yi + 2x - 2yi = xi + yi^2$$

$$\therefore\; 3x - yi = -y + xi \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -y \\ -y = x \end{cases}$$

$$\therefore\; x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Logo, existe um único complexo que satisfaz a igualdade $z + 2\bar{z} = zi$. É o complexo $z = 0 + 0i$.

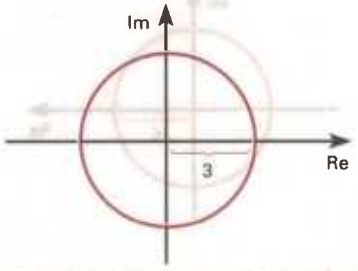


R.3 Representar no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico dos complexos z tais que $z\bar{z} = 9$.

Resolução

Fazendo $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos que $(x + yi)(x - yi) = 9 \therefore x^2 + y^2 = 9$.

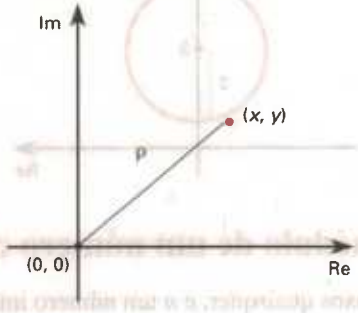
Esta é uma equação da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 3.



2. Módulo de um número complexo

Definição

O módulo de um número complexo $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, é a distância do ponto (x, y) ao ponto $(0, 0)$ do plano de Argand-Gauss.



$$z = x + yi \Rightarrow \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exercícios resolvidos

R.4 Calcular o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 3 + 4i$;
b) $z_2 = -5 + 12i$;
c) $z_3 = 4i$;
d) $z_4 = -5$.

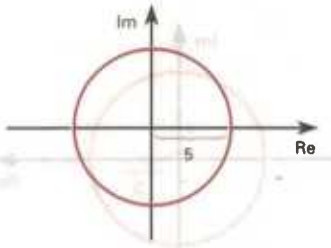
Resolução

a) $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.
b) $|z_2| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.
c) $|z_3| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$.
d) $|z_4| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$.

R.5 Representar no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z tais que $|z| = 5$.

Resolução

Fazendo $z = x + yi$ com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos que $|z| = 5 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \therefore x^2 + y^2 = 25$, que é uma equação da circunferência de centro (0, 0) e raio 5.



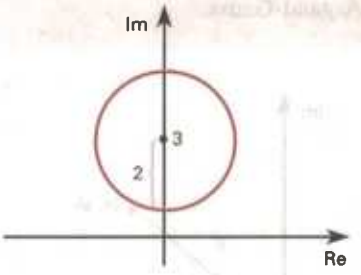
R.6 Representar no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z tais que $|z - 3i| = 2$.

Resolução

Fazendo $z = x + yi$ com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos que:

$|z - 3i| = 2 \Rightarrow |x + yi - 3i| = 2 \therefore |x + (y - 3)i| = 2 \therefore \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 2 \therefore x^2 + (y - 3)^2 = 4$,

que é uma equação da circunferência de centro (0, 3) e raio 2.



2.1. Propriedades do módulo de um número complexo

Sendo z, z_1 e z_2 números complexos quaisquer, e n um número inteiro, tem-se que:

D.1 $|z| \geq 0$;

D.2 $z\bar{z} = |z|^2$;

D.3 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

D.4 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, com $z_2 \neq 0$;

D.5 $|z|^n = |z^n|$, para todo n se $z \neq 0$ ou para $n > 0$ se $z = 0$.

Demonstrações

D.1 Seja $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

Temos que $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$. Portanto, obtemos $x^2 + y^2 \geq 0 \therefore \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \Leftrightarrow |z| \geq 0$.

D.2 Seja $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

D.3 $|z_1 z_2|^2 \overset{D.2}{=} (z_1 z_2)\overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \therefore |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

D.4 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 \overset{D.2}{=} \frac{z_1}{z_2}\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_1}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \; z_2 \neq 0$.

D.5 $|z^n|^2 \overset{D.2}{=} z^n \overline{z^n} = z^n (\overline{z})^n = (z\overline{z})^n = (|z|^2)^n = (|z|^n)^2 \therefore |z^n| = |z|^n$.

Exercícios resolvidos

R.7 Calcular:

a) $|(3 + 4i)(5 - 12i)|$; b) $\left|\frac{1 + 2i}{3 - 4i}\right|$; c) $|(2 + i)^8|$.

Resolução

a) Por D.3, temos que:

$$|(3 + 4i)(5 - 12i)| = |3 + 4i| \cdot |5 - 12i| = \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 5 \cdot 13 = 65.$$

b) Por D.4, temos que $\left|\frac{1 + 2i}{3 - 4i}\right| = \frac{|1 + 2i|}{|3 - 4i|} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Por D.5, temos que $|(2 + i)^8| = |2 + i|^8 = (\sqrt{2^2 + 1^2})^8 = (\sqrt{5})^8 = 5^4 = 625$.

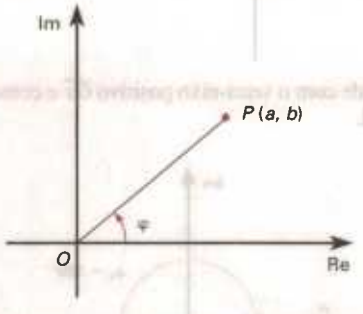
R.8 Se os complexos z e $\frac{1}{z}$ têm o mesmo módulo, mostrar que $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

Resolução

$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| \therefore$ por D.4, temos que $|z| = \frac{1}{|z|} \Rightarrow |z|^2 = 1; \therefore$ por D.2, temos que $z\overline{z} = 1 \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$.

3. Argumento de um número complexo

Dado um número complexo não-nulo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, consideremos no plano de Argand-Gauss os pontos $O(0, 0)$, $P(a, b)$ e o ângulo cujos lados são o semi-eixo positivo $\overrightarrow{Ox}$ e a semi-reta $\overrightarrow{OP}$.



Medindo o ângulo $P\hat{O}x$, no sentido anti-horário, a partir do semi-eixo positivo Ox, obtém-se a medida φ, com $0 \leq \varphi < 2\pi$ ou $0° \leq \varphi < 360°$, que denominamos "**argumento** do número complexo z".

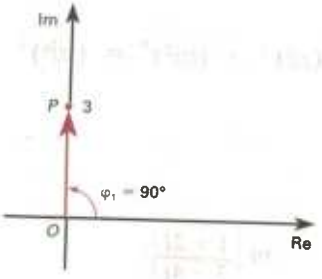
Exercício resolvido

R.9 Determinar o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 3i$; b) $z_2 = -3i$; c) $z_3 = 5$; d) $z_4 = -5$.

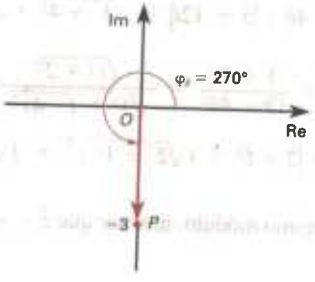
Resolução

a) $z_1 = 3i$



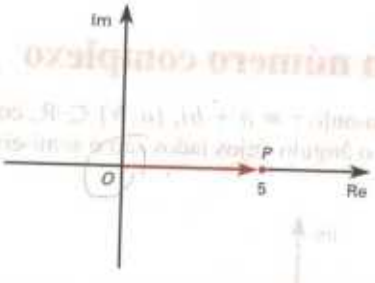
Logo, $\varphi_1 = 90°$ ou $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.

b) $z_2 = -3i$



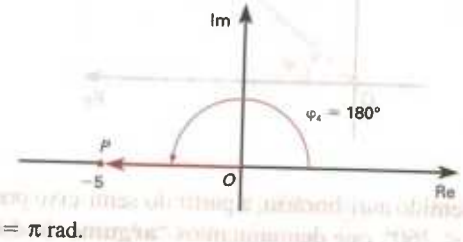
Logo, $\varphi_2 = 270°$ ou $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ rad.

c) $z_3 = 5$



Como a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ coincide com o semi-eixo positivo $\overrightarrow{Ox}$ e como $0° \leq \varphi < 360°$, devemos ter $\varphi_3 = 0°$.
Logo, $\varphi_3 = 0°$ ou $\varphi_3 = 0$ rad.

d) $z_4 = -5$



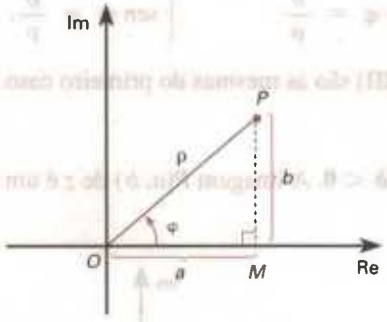
Logo, $\varphi = 180°$ ou $\varphi = \pi$ rad.

3.1. Cálculo do argumento de um número complexo

Vimos que, se a imagem do número complexo pertence a um dos eixos coordenados, então é muito simples o cálculo do argumento. Vejamos como se determina o argumento quando a imagem do número complexo não pertence a nenhum dos eixos coordenados.

Primeiro caso

Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$. A imagem $P(a, b)$ de z é um ponto do primeiro quadrante.



A distância $OP = \rho$ é o módulo do complexo, isto é:

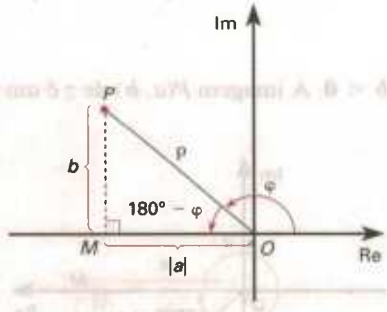
$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad \text{(I)}$$

No triângulo OMP, temos $\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} & \text{(II)} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho}. & \text{(III)} \end{cases}$

As igualdades (I), (II) e (III) determinam o argumento de z.

Segundo caso

Seja $z = a + bi$, com $a < 0$ e $b > 0$. A imagem $P(a, b)$ de z é um ponto do segundo quadrante.



Note que, como $a < 0$, a medida OM é igual a $|a|$. Lembrando que $|a|^2 = a^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad \text{(I)}$$

No triângulo OMP, temos $\begin{cases} \cos(180° - \varphi) = \dfrac{|a|}{\rho} \\ \operatorname{sen}(180° - \varphi) = \dfrac{b}{\rho}. \end{cases}$

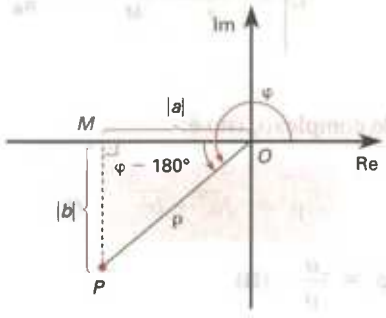
Lembrando que $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$, $\operatorname{sen}(180° - \varphi) = \operatorname{sen}\varphi$ e $|a| = -a$, pois $a < 0$, concluímos:

$$\begin{cases} -\cos\varphi = -\dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} \quad \text{(II)} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{\rho}. \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Note que as igualdades (I), (II), (III) são as mesmas do primeiro caso.

Terceiro caso

Seja $z = a + bi$, com $a < 0$ e $b < 0$. A imagem $P(a, b)$ de z é um ponto do terceiro quadrante.

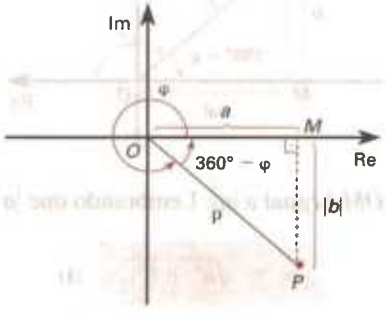


Deixamos como exercício a demonstração de:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(I)} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} \quad \text{(II)} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{\rho}. \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Quarto caso

Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b < 0$. A imagem $P(a, b)$ de z é um ponto do quarto quadrante.



Deixamos como exercício a demonstração de:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(I)} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} & \text{(II)} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho}. & \text{(III)} \end{cases}$$

Nota: as igualdades (I), (II) e (III), obtidas nos quatro casos, são válidas também quando a imagem $P(a, b)$ do número $z = a + bi$ pertence a um dos eixos coordenados.

Em resumo, temos o seguinte:

Se $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é um número complexo não-nulo, então:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho}. \end{cases}$$

Exercício resolvido

R.10 Determinar o módulo e o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = \sqrt{3} + i$; b) $z_2 = 2 - 2i$.

Resolução

a) $z_1 = \sqrt{3} + i \begin{cases} \text{Parte real: } a = \sqrt{3} \\ \text{Parte imaginária: } b = 1. \end{cases}$

Temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \therefore \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

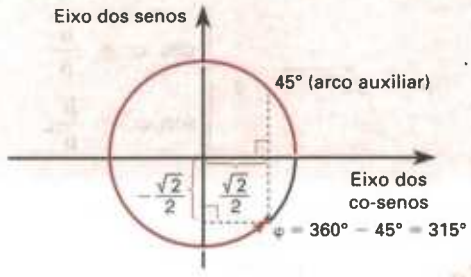
Logo, $\rho = 2$ e $\varphi = 30°$.

b) $z_2 = 2 - 2i$ $\begin{cases} \text{Parte real: } a = 2 \\ \text{Parte imaginária: } b = -2. \end{cases}$

Temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$



Logo, $\rho = 2\sqrt{2}$ e $\varphi = 315°$.

4. Forma trigonométrica de um número complexo

Para todo número complexo não-nulo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, de módulo ρ e argumento φ, temos que:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \operatorname{sen} \varphi. \end{cases}$$

Assim, podemos escrever o número $z = a + bi$ sob a forma $z = \rho \cos \varphi + (\rho \operatorname{sen} \varphi)i$ ou, ainda:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi),$$

que é chamada de **forma trigonométrica** ou **forma polar do número complexo** z.

Exercício resolvido

R.11 Dar a forma trigonométrica de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = \sqrt{3} + i$;
b) $z_2 = -1 + i$;
c) $z_3 = -3i$.

Resolução

a) $z_1 = \sqrt{3} + i \begin{cases} \text{Parte real: } a = \sqrt{3} \\ \text{Parte imaginária: } b = 1. \end{cases}$

Temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \therefore \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Logo, a forma trigonométrica de z_1 é:

$$z_1 = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$$

ou

$$z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right).$$

b) $z_2 = -1 + i \begin{cases} \text{Parte real: } a = -1 \\ \text{Parte imaginária: } b = 1. \end{cases}$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Logo, a forma trigonométrica de z_2 é:

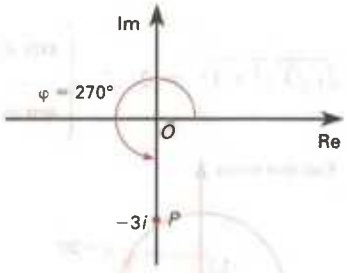
$$z_2 = \sqrt{2}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$$

ou

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right).$$

c) $z_3 = -3i$

Como z_3 é um imaginário puro, temos que sua imagem pertence ao eixo imaginário e, nesse caso, podemos obter facilmente o módulo e o argumento de z, graficamente, sendo desnecessárias as "fórmulas".



O módulo de $z_3 = -3i$ é a distância do ponto P à origem O do sistema, isto é, $\rho = 3$.
Logo, a forma trigonométrica de z_3 é:

$$z_3 = 3(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) \text{ ou } z_3 = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right).$$

Nota: Pode-se representar um número complexo não-nulo z **também** sob a seguinte forma:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi), \text{ com } \varphi \notin [0, 2\pi[\text{ e } \varphi \notin [0°, 360°[.$$

Por exemplo, $z = 8(\cos 390° + \text{i sen } 390°)$.
Essa forma de apresentação é denominada **forma trigonométrica secundária**, e a medida φ é um **argumento secundário** de z.
Para que não haja confusão de linguagem, convencionamos que:
• ao usar a expressão "**argumento** de um número complexo", estamos nos referindo à medida φ no intervalo $[0°, 360°[$ ou no intervalo $[0, 2\pi[$;
• ao usar a expressão "**forma trigonométrica** de um número complexo", estamos nos referindo à seguinte forma: $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, com $0° \leq \varphi < 360°$ ou $0 \leq \varphi < 2\pi$.

5. Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

Teorema

Se $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ e $w = \beta(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, então:

$$zw = \rho\beta[\cos(\varphi + \alpha) + i \operatorname{sen}(\varphi + \alpha)].$$

Demonstração

$$zw = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \cdot \beta(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = \rho\beta(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) =$$
$$= \rho\beta(\cos \varphi \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha + i^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha) =$$
$$= \rho\beta[\cos \varphi \cos \alpha - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha + (\operatorname{sen} \varphi \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi)\, i] =$$
$$= \rho\beta[\cos(\varphi + \alpha) + i \operatorname{sen}(\varphi + \alpha)].$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.12 São dados os números complexos $z_1 = 3(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$, $z_2 = 4(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$ e $z_3 = 8(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$.
Calcular:
a) z_1z_2; b) z_1z_3; c) z_2z_3; d) z_1^2.

Resolução

a) $z_1z_2 = 3(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°) \cdot 4(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) = 12[\cos (15° + 45°) + i \operatorname{sen} (15° + 45°)] =$

$= 12(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 12\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6 + 6\sqrt{3}i.$

b) $z_1z_3 = 3(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°) \cdot 8(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) = 24[\cos (15° + 135°) + i \operatorname{sen} (15° + 135°)] =$

$= 24[\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°] = 24\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -12\sqrt{3} + 12i.$

c) $z_2z_3 = 4(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) \cdot 8(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) = 32[\cos (45° + 135°) + i \operatorname{sen} (45° + 135°)] =$

$= 32(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = 32(-1 + i \cdot 0) = -32.$

d) $z_1^2 = z_1 \cdot z_1 = 3(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°) \cdot 3(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°) = 9[\cos(15° + 15°) + i \operatorname{sen} (15° + 15°)] =$

$= 9(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 9\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9i}{2}.$

R.13 Seja $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ a forma trigonométrica do número complexo z. Calcular z^3.

Resolução
Temos:

$$z^2 = z \cdot z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \cdot \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) =$$
$$= \rho \cdot \rho[\cos(\varphi + \varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi + \varphi)] = \rho^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi) \text{ e}$$
$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi) \cdot \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) =$$
$$= \rho^2 \cdot \rho[\cos (2\varphi + \varphi) + i \operatorname{sen} (2\varphi + \varphi)] = \rho^3(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi).$$

Logo, $z^3 = \rho^3(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi)$.

6. Divisão de números complexos na forma trigonométrica

Teorema

Se $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ e $w = \beta(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, então:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\beta}[\cos (\varphi - \alpha) + i \operatorname{sen} (\varphi - \alpha)].$$

Demonstração

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \cdot \beta(\cos\alpha - i \operatorname{sen} \alpha)}{\beta^2} =$$

$$= \frac{\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \cdot \beta[\cos (-\alpha) + i \operatorname{sen} (-\alpha)]}{\beta^2} =$$

$$= \frac{\rho\beta}{\beta^2}[\cos (\varphi - \alpha) + i \operatorname{sen} (\varphi - \alpha)] = \frac{\rho}{\beta}[\cos (\varphi - \alpha) + i \operatorname{sen} (\varphi - \alpha)].$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

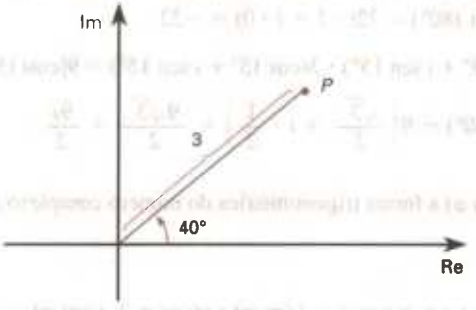
R.14 São dados os complexos $z_1 = 12(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$ e $z_2 = 2(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$. Calcular $\frac{z_1}{z_2}$.

Resolução

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{2}[\cos(40° - 10°) + i \operatorname{sen}(40° - 10°)] \therefore \frac{z_1}{z_2} = 6(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) \therefore \frac{z_1}{z_2} = 3\sqrt{3} + 3i.$$

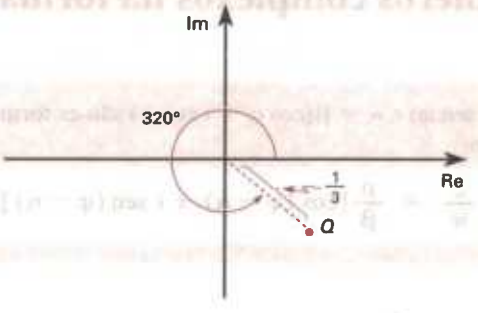
R.15 O gráfico mostra o ponto P, imagem do número $z = 3(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$. Representar, no plano de Argand-Gauss, o número $\frac{1}{z}$.



Resolução

$$\frac{1}{z} = \frac{1(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)}{3(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)} = \frac{1}{3}[\cos(-40°) + i \operatorname{sen}(-40°)] = \frac{1}{3}(\cos 320° + i \operatorname{sen} 320°).$$

Logo, a imagem do número $\frac{1}{z}$ é o ponto Q, representado a seguir:



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.5 (a até f), B.6 (a, b), B.7 (a até d), B.8, B.10, B.11, B.12, B.14 (a, b, c), B.15 (a), B.16 (a até d), B.17 (a, b), B.18, B.20 (a, b, c), B.22, B.24, B.26 (a, b), B.27, C.2, C.4, C.8, C.9.

Tarefa de casa: exercícios B.4, B.5 (g até j), B.6 (c, d), B.7 (e, f, g), B.9, B.13, B.14 (d, e, f), B.15 (b), B.16 (e até h), B.17 (c, d, e), B.19, B.20 (d até g), B.21, B.23, B.25, B.26 (c, d), C.1, C.3, C.5, C.6, C.7, C.10, C.11, C.12, C.13.

Exercícios básicos

B.1 Represente no plano de Argand-Gauss as imagens dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = -3 + 4i$; d) $z_4 = 2 + 5i$; g) $z_7 = -2i$;
b) $z_2 = -5 - i$; e) $z_5 = 6i$; h) $z_8 = 4i$.
c) $z_3 = 4 - 4i$; f) $z_6 = 4$;

B.2 Qual é o lugar geométrico das imagens de todos os números complexos z tais que $z = \overline{z}i$?

B.3 Dê o gráfico, no plano de Argand-Gauss, do lugar geométrico das imagens dos números complexos z tais que $z = \overline{z}$.

B.4 Que figura é o lugar geométrico das imagens dos números complexos z tais que $5z = \overline{z}(-3 + 4i)$?

B.5 Calcule o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 6 - 8i$; e) $z_5 = 6i$; i) $z_9 = 1$;
b) $z_2 = 1 + 2i$; f) $z_6 = -3$; j) $z_{10} = -9i$.
c) $z_3 = \sqrt{3} + i$; g) $z_7 = 1 - i$;
d) $z_4 = -3 + \sqrt{7}\,i$; h) $z_8 = i$;

B.6 Represente no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z, tais que:

a) $|z + 2 - 3i| = 2$; c) $2 \leq |z| < 5$;
b) $|z - 1 - i| \leq 4$; d) $|z| = 5$ e $\text{Re}(z) > 0$.

B.7 Calcule:

a) $|(3 - i)(1 + i)|$; c) $\left|\frac{2}{1 + i}\right|$; e) $|(5 + 12i)^{-2}|$; g) $\left|\left(\frac{2}{1 - i}\right)^5\left(\frac{4 + 3i}{5 + 5i}\right)^4\right|$.
b) $\left|\frac{2 + i}{-4 + 3i}\right|$; d) $|(\sqrt{2} + i)^4|$; f) $\left|\left(\frac{3 + i}{2 + i}\right)^8\right|$;

B.8 Prove que $|z| = |\overline{z}|$ para todo número complexo z.

B.9 Sabendo que os complexos $2z$ e $\frac{3}{z}$ têm o mesmo módulo, mostre que $\overline{z} = \frac{3}{2z}$.

B.10 Represente no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z tais que $z\overline{z} = |z|$.

B.11 Determine o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 8$; b) $z_2 = -i$; c) $z_3 = -7$; d) $z_4 = 5i$.

B.12 Sabendo que o argumento de um número complexo z é $\frac{\pi}{6}$, determine o argumento de cada um dos seguintes números:

a) $\overline{z}$; b) $-z$; c) $-\overline{z}$.

B.13 Dado que o argumento de um número complexo z é 220°, determine o argumento de cada um dos seguintes números:

a) $\overline{z}$; b) $-z$; c) $-\overline{z}$.

B.14 Determine o módulo e o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i$; c) $z_3 = -3 - 3i$; e) $z_5 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$;
b) $z_2 = 1 + i$; d) $z_4 = 2\sqrt{3} - 2i$; f) $z_6 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

B.15 Obtenha o módulo e o argumento do número complexo z, de modo que:

a) $z = (1 + i)^{10}$; **sugestão**: $z = [(1 + i)^2]^5$; b) $z = \frac{3 + 5i}{4 + i}$.

B.16 Dê a forma trigonométrica de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = -\sqrt{3} - i$; c) $z_3 = 3i$; e) $z_5 = -3 + \sqrt{3}\,i$; g) $z_7 = 2$;
b) $z_2 = 1 - i$; d) $z_4 = -2$; f) $z_6 = -4i$; h) $z_8 = 5 + 5i$.

B.17 Obtenha a forma algébrica de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$;

b) $z_2 = 1\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$;

c) $z_3 = 8(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$;

d) $z_4 = 10\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$;

e) $z_5 = 5(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$.

B.18 Determine o menor valor inteiro positivo de n, de modo que o número $z = 5\left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}\right)$ seja real.

B.19 Encontre o menor valor inteiro positivo de n, de modo que o número $z = 4\left(\cos \frac{n\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{8}\right)$ seja imaginário puro.

B.20 São dados os números complexos $z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$, $z_3 = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$. Calcule:

a) $z_1 z_2$;
b) $z_1 z_3$;
c) z_3^2;
d) $z_2 z_3$;
e) z_1^2;
f) z_2^3;
g) $z_1 z_2 z_3$.

B.21 Seja $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ a forma trigonométrica do número complexo z. Prove que um argumento de z^4 é o quádruplo do argumento de z.

B.22 São dados os complexos $z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 4\left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\alpha\pi}{2}\right)$. Determine o menor valor de α, real e positivo, de modo que o número $z_1 z_2$ seja real.

B.23 Sejam os números complexos $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 4\,(\cos \alpha\pi + i \operatorname{sen} \alpha\pi)$. Calcule o menor valor de α, real e positivo, de modo que o número $z_1 z_2$ seja imaginário puro.

B.24 Seja $z_1 = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ a forma trigonométrica do complexo z, e seja $z_2 = 6\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}\right)$. Calcule os valores ρ e φ, sabendo que $z_1 z_2 = 12$.

B.25 Se os argumentos de dois números complexos z_1 e z_2 são respectivamente φ e α, tais que $\varphi + \alpha = 180°$, então podemos afirmar que:

a) $z_1 + z_2$ é um número real.
b) $z_1 + z_2$ é um número imaginário puro.
c) z_1 é o conjugado de z_2.
d) $z_1 z_2$ é um número real.
e) z_1 é o oposto de z_2.

B.26 São dados os números complexos $z_1 = 15(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°)$, $z_2 = 3(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$ e $z_3 = \cos 40° + i \operatorname{sen} 40°$. Calcule:

a) $\frac{z_1}{z_2}$; b) $\frac{z_1}{z_3}$; c) $\frac{z_3}{z_2}$; d) $\frac{z_2}{z_3}$.

B.27 Represente no plano de Argand-Gauss o número $\frac{1}{z}$ em que $z = \frac{2}{3}(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)$.

Exercícios complementares

C.1 Represente no plano de Argand-Gauss o conjunto das imagens dos números complexos z, tais que $z^2 - \bar{z}^2 = 0$.

C.2 Represente no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z, tais que $|z + 3| + |z - 3| = 10$.

C.3 Dê o gráfico, no plano de Argand-Gauss, das imagens dos números complexos z, tais que $|z - 3i| = |\text{Im}(z)|$.

C.4 Calcule o módulo do número complexo z, tal que $\frac{z\bar{z}}{3 + i} = \frac{\bar{z}}{1 + i}$.

C.5 Mostre que os números $\frac{\bar{z}|z|^n}{z}$ e z^n têm o mesmo módulo, para todo número complexo não-nulo z e para todo n inteiro.

C.6 Sabendo que $|z| = 2$, mostre que $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{4\bar{z} + \bar{z}^2}{16}$.

C.7 Represente no plano de Argand-Gauss os números complexos z_0, z_1, z_2, z_3 e z_4, de argumentos φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 e φ_4, respectivamente, tais que $|z_n| = 3$ e $\varphi_n = \frac{n \cdot 2\pi}{5}$, com n inteiro e $0 \leq n \leq 4$.

C.8 Represente no plano de Argand-Gauss todos os números complexos que têm argumento igual a 60°.

C.9 Determine os números complexos z, $z = \rho(\cos \varphi + i \text{ sen } \varphi)$, sabendo que $\rho^3(\cos 3\varphi + i \text{ sen } 3\varphi) = 8\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{\pi}{2}\right)$. **Sugestão:** $\begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\varphi = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

C.10 Determine os números complexos z, $z = \rho(\cos \varphi + i \text{ sen } \varphi)$, sabendo que $\rho^4(\cos 4\varphi + i \text{ sen } 4\varphi) = 81\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{3}\right)$.

C.11 Dados os números complexos $z_1 = 3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{3}\right)$ e $z_2 = 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\pi\right) + i \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\pi\right)\right]$, determine o menor valor de α, real e positivo, de modo que o número $\frac{z_1}{z_2}$ seja real.

C.12 Dados os complexos $z = \rho(\cos \varphi + i \text{ sen } \varphi)$ e $w = \rho^2(\cos 2\varphi + i \text{ sen } 2\varphi)$, prove que $\frac{w}{z} = z$.

C.13 Dados os complexos $z = \rho(\cos \varphi + i \text{ sen } \varphi)$ e $w = \beta(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$, prove que, se $\frac{z}{w} = \frac{w}{z}$, então $\rho = \beta$ e $\varphi - \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Unicamp-SP) Identifique o lugar geométrico dos pontos $z = x + yi$ do plano complexo tal que $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}$. Determine a equação cartesiana e faça o gráfico desse lugar. **Nota:** o símbolo $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ indica a parte real do número complexo $\frac{1}{z}$.

V.2 (Fesp-SP) O módulo de $\frac{(1+i)^2}{3+4i}$ é:

a) $\frac{3}{25}$. b) $\frac{4}{25}$. c) $\frac{3}{5}$. d) $\frac{4}{5}$. e) $\frac{2}{5}$.

V.3 (UFPE) Indique o valor do módulo do número complexo $z = \frac{2i^{21} + 2\sqrt{3}}{i^{10} - 1}$.

V.4 (Fuvest-SP) O número complexo $z \neq 0$ e o seu inverso $\frac{1}{z}$ têm o mesmo módulo. Conclui-se que:

a) z e $\frac{1}{z}$ são conjugados.
b) $z + \frac{1}{z} = i$.
c) esse módulo é 2.
d) z e $\frac{1}{z}$ são reais.
e) $z^2 = 1$.

V.5 (FEI-SP) Considerando-se $z = a + bi$ um número complexo, as soluções da equação $|z - i| = 2$ são representadas graficamente por:

a) uma circunferência com centro $C = (1, 0)$ e raio 4.
b) uma circunferência com centro $C = (1, 1)$ e raio 4.
c) uma circunferência com centro $C = (0, 1)$ e raio 4.
d) uma circunferência com centro $C = (1, 1)$ e raio 2.
e) uma circunferência com centro $C = (0, 1)$ e raio 2.

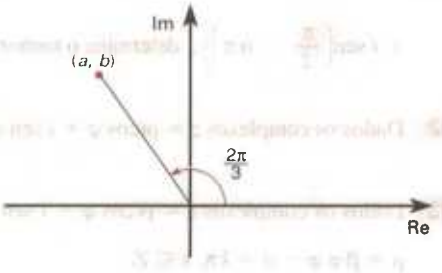
V.6 (Mackenzie-SP) A solução da equação $2 + i = |z| + z$ é o número complexo:

a) $\frac{3i}{4}$. b) $\frac{3}{4} + i$. c) i. d) $\frac{3}{4}$. e) 1.

V.7 (ITA-SP) O produto dos números complexos $z = x + yi$, que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta $y = 2x - 1$ contida no plano complexo, é igual a:

a) $\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$.
b) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.
c) $-\frac{8}{5} - \frac{8}{5}i$.
d) $2 + 2i$.
e) Não existe nenhum número complexo que pertença à reta $y = 2x - 1$ e cujo módulo seja $\sqrt{2}$.

V.8 (UFRS) O número complexo (a, b), representado ao lado, no plano complexo e cujo módulo é $\sqrt{3}$ pode ser escrito na forma algébrica:



a) $3 - \sqrt{3}\,i$.
b) $\frac{3 - \sqrt{3}\,i}{2}$.
c) $\frac{-3 + \sqrt{3}\,i}{2}$.
d) $\frac{\sqrt{3} - 3i}{2}$.
e) $\frac{-\sqrt{3} + 3i}{2}$.

V.9 (UFRS) Os argumentos dos números complexos u e z são, respectivamente, $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{4}$; além disso, $|uz| = 4$. Calcule a parte real e a parte imaginária de uz.

Capítulo 18
Potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$

1. Potenciação em $\mathbb{C}$

1.1. Teorema (primeira fórmula de De Moivre)

Se $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ é a forma trigonométrica do número complexo z e n é um inteiro, então:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi).$$

Abraham de Moivre (1667-1754), matemático francês. Dedicou boa parte de seus estudos à teoria das probabilidades.

Demonstração

Primeira etapa: $n \geq 0$

Temos que:

- $n = 0 \Rightarrow z^0 = 1 = \rho^0(\cos 0\varphi + i \operatorname{sen} 0\varphi)$;
- $n = 1 \Rightarrow z^1 = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = \rho^1(\cos 1\varphi + i \operatorname{sen} 1\varphi)$;
- $n = 2 \Rightarrow z^2 = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \cdot \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = \rho^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi)$;
- $n = 3 \Rightarrow z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi) \cdot \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = \rho^3(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi)$.

Note, por esses exemplos, que podemos admitir a existência de um valor k, $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$ ou $k = 3$, tal que:

$$z^k = \rho^k(\cos k\varphi + i \operatorname{sen} k\varphi). \text{ (I)}$$

Se, a partir dessa hipótese, demonstrarmos que:

$$z^{k+1} = \rho^{k+1}[\cos (k + 1)\varphi + i \operatorname{sen} (k + 1)\varphi],$$

então o teorema estará provado para todo expoente n inteiro e $n \geq 0$.

Ora, $z^{k+1} = z^k \cdot z$. Usando a hipótese (I), temos:

$$z^{k+1} = \rho^k(\cos k\varphi + i \operatorname{sen} k\varphi) \cdot \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \therefore z^{k+1} = \rho^{k+1}[\cos (k+1)\varphi + i \operatorname{sen} (k+1)\varphi].$$

Segunda etapa: $n < 0$

Temos $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}}$.

Como $-n > 0$, temos, pela primeira parte, que:

$$z^n = \frac{1}{\rho^{-n}[\cos(-n\varphi) + i \operatorname{sen}(-n\varphi)]} = \frac{1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}{\rho^{-n}[\cos(-n\varphi) + i \operatorname{sen}(-n\varphi)]} =$$

$$= \frac{1}{\rho^{-n}}\Big\{\cos[0 - (-n\varphi)] + i \operatorname{sen}[0 - (-n\varphi)]\Big\} \therefore z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Sendo $z = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$, calcular z^{10}.

Resolução

Temos:

$$z^{10} = 2^{10}[\cos(10 \cdot 30°) + i \operatorname{sen}(10 \cdot 30°)] \therefore z^{10} = 1024(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$$

$$\therefore z^{10} = 1024\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \therefore z^{10} = 512 - 512\sqrt{3}i.$$

R.2 Calcular $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{20}$.

Resolução

Em primeiro lugar, vamos obter a forma trigonométrica do número complexo:

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad \begin{cases} \text{Parte real: } a = -\dfrac{1}{2}. \\ \text{Parte imaginária: } b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Temos que:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\therefore \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1} = -\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \therefore \varphi = 120°.$$

Assim, $z = 1(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) \therefore z^{20} = 1^{20}(\cos 2400° + i \operatorname{sen} 2400°)$.

Reduzindo 2400° à primeira volta positiva, obtemos 240°.

Logo, temos:

$$z^{20} = 1(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) \therefore z^{20} = 1\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \therefore z^{20} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

2. Radiciação em ℂ

Definição

Sejam z e w números complexos e n um número inteiro positivo, tal que:

$$w^n = z.$$

Nessas condições, o número w é uma raiz n-ésima de z.

Exercícios resolvidos

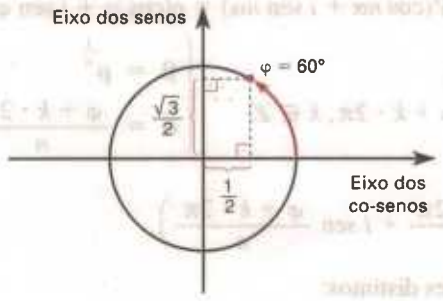
R.3 Mostrar que o número $w = 1 + \sqrt{3}i$ é uma raiz quarta de $z = -8 - 8\sqrt{3}i$.

Resolução

Basta mostrar que $w^4 = z$. No complexo $w = 1 + \sqrt{3}i$, a parte real é 1 e a parte imaginária é $\sqrt{3}$.

Temos que:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \therefore \rho = 2 \text{ e } \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$



Logo, $w = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$.

Então, temos:

$$w^4 = 2^4 [\cos(4 \cdot 60°) + i \operatorname{sen}(4 \cdot 60°)] \therefore w^4 = 16(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$$

$$\therefore w^4 = 16\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - 8\sqrt{3}i \therefore w^4 = z.$$

Logo, w é uma raiz quarta de z.

R.4 Calcular as raízes cúbicas de 1.

Resolução

Seja $w = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ a forma trigonométrica de uma das raízes cúbicas de 1. Devemos ter:

$$w^3 = 1 \therefore \rho^3(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi) = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

$$\therefore \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\varphi = 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \therefore \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Como $0 \leq \varphi < 2\pi$, atribuímos a k os valores inteiros 0, 1 e 2:

$$k = 0 \Rightarrow \varphi = 0;\ k = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3};\ k = 2 \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3}.$$

Assim, as raízes cúbicas de 1 são os números:

$$w_0 = 1\,(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1;\ w_1 = 1\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ e}$$

$$w_2 = 1\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

2.1. Teorema (segunda fórmula de De Moivre)

Se $z = \rho\,(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ é a forma trigonométrica do número complexo z e n é um inteiro positivo, então as raízes n-ésimas do complexo z são dadas por:

$$w_k = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right), \text{ com } k \text{ inteiro e } 0 \leq k < n.$$

Demonstração

Seja $w = \beta\,(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ a forma trigonométrica de uma das raízes n-ésimas de z. Devemos ter:

$$w^n = z \therefore \beta^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

$$\therefore \begin{cases} \beta^n = \rho \\ n\alpha = \varphi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \therefore \begin{cases} \beta = \rho^{\frac{1}{n}} \\ \alpha = \dfrac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Logo, $w_k = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos \dfrac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \dfrac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right)$.

Note que w_k assume n valores distintos:

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi}{n}\right);$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\varphi + 2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 2\pi}{n}\right);$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\varphi + 4\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + 4\pi}{n}\right);$$

$$\vdots$$

$$k = n - 1 \Rightarrow w_{n-1} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\varphi + (n-1)\,2k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + (n-1)\,2k}{n}\right).$$

Os n valores $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ são distintos entre si. Se atribuirmos ao k outro valor inteiro qualquer, repetiremos uma dessas raízes. Observe:

$$k = n \Rightarrow w_n = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\varphi + n2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi + n2\pi}{n}\right) = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\varphi}{n}\right) = w_0.$$

Analogamente:

- para $k = n + 1$, teremos $w_{n+1} = w_1$;
- para $k = n + 2$, teremos $w_{n+2} = w_2$;
- etc.

Assim, a expressão w_k assume n, e somente n, valores distintos. Para se obterem esses n valores, basta atribuir ao k os valores 0, 1, 2, 3, ..., $n - 1$.

(c.q.d.)

Notas

1. k assume os n valores inteiros 0, 1, 2, ..., $n - 1$. Logo, existem n raízes n-ésimas distintas de z.

2. Todas as raízes n-ésimas de z têm o mesmo módulo: $\rho^{\frac{1}{n}}$.

3. Os argumentos das raízes w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}, que são $\frac{\varphi}{n}$, $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$, $\frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}$, ..., $\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$, respectivamente, estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

4. As imagens das raízes w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1} pertencem a uma mesma circunferência de centro (0, 0) e raio $\rho^{\frac{1}{n}}$ e dividem essa circunferência em n partes iguais.

5. Para o cálculo de raízes de um número complexo, não é necessária a segunda fórmula de De Moivre. Pode-se proceder como no exercício R.4.

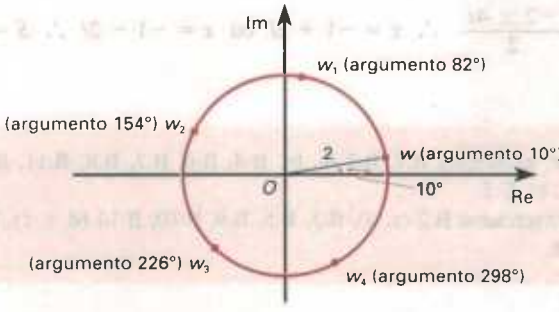
Exercícios resolvidos

R.5 Sabe-se que uma das raízes quintas de um complexo z é $w = 2$ (cos 10° + i sen 10°). Determinar as outras quatro raízes quintas de z.

Resolução

Sabemos que todas as raízes procuradas têm o mesmo módulo de w, isto é, 2.

Sabemos ainda que, no plano de Argand-Gauss, as cinco raízes dividem em cinco partes iguais a circunferência de centro (0, 0) e raio 2. Logo, temos:



Assim, as outras quatro raízes são:

$w_1 = 2$ (cos 82° + i sen 82°);

$w_2 = 2$ (cos 154° + i sen 154°);

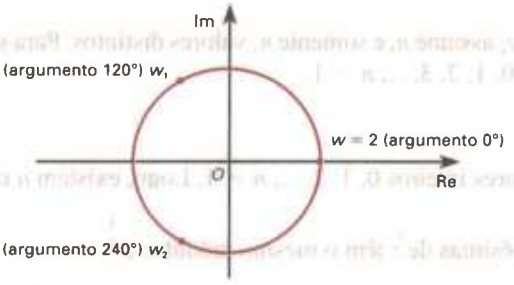
$w_3 = 2$ (cos 226° + i sen 226°);

$w_4 = 2$ (cos 298° + i sen 298°).

R.6 Determinar as raízes cúbicas de 8.

Resolução

Sabemos que uma das raízes cúbicas de 8 é o número $w = 2$ e que, no plano de Argand-Gauss, as três raízes cúbicas de 8 dividem em três partes iguais a circunferência de centro (0, 0) e raio 2. Logo, temos:



Assim, as raízes cúbicas de 8 são:

$w = 2$;

$w_1 = 2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = 2\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$;

$w_2 = 2(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = 2\left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$.

3. Resolução de equações do 2º grau em $\mathbb{C}$

Quando estudamos as equações do 2º grau no conjunto universo $\mathbb{R}$, demos o conjunto vazio ($\varnothing$) como solução para equações com discriminantes negativos. Porém no conjunto universo $\mathbb{C}$ tais equações possuem conjunto solução **não-vazio**, pois em $\mathbb{C}$ é possível extrair raízes quadradas de números negativos.

Exercício resolvido

R.7 Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Resolução

Temos que $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$.

As raízes quadradas de -16 são $4i$ e $-4i$; logo, temos:

$$x = \frac{-2 \pm 4i}{2} \quad \therefore \quad x = -1 + 2i \text{ ou } x = -1 - 2i \quad \therefore \quad S = \{-1 + 2i, -1 - 2i\}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2 (a, b), B.4, B.6, B.7, B.8, B.11, B.12, B.13, B.14 (a, b, c), B.15 (a, b), C.2.

Tarefa de casa: exercícios B.2 (c, d), B.3, B.5, B.9, B.10, B.14 (d, e, f), B.15 (c, d), C.1, C.3, C.4, C.5, C.6.

Exercícios básicos

B.1 Sendo $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$, calcule z^4.

B.2 Calcule:

a) $(\sqrt{3} + i)^{10}$; b) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{100}$; c) $(1 + i)^9$; d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}\right)^{10}$.

B.3 Determine os números complexos z tais que $z^4 = 1$. **Sugestão:** faça $z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ e $1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$.

B.4 Determine o menor valor de n, inteiro e positivo, de modo que o número $(1 + \sqrt{3}i)^n$ seja real.

B.5 Obtenha o menor valor de n, inteiro e positivo, de modo que o número $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^n$ seja imaginário puro.

B.6 Mostre que o número $w = 1 + i$ é uma das raízes quintas de $z = -4 - 4i$.

B.7 Calcule as raízes sextas de 1. **Sugestão**: exercício R.4.

B.8 Represente no plano de Argand-Gauss as raízes sextas de 1.

B.9 Calcule as raízes quartas de -1. **Sugestão**: exercício R.4.

B.10 Represente no plano de Argand-Gauss as raízes quartas de -1.

B.11 Calcule as raízes cúbicas de $8i$. **Sugestão**: exercício R.4.

B.12 Represente no plano de Argand-Gauss as raízes cúbicas de $8i$.

B.13 Sabendo que uma das raízes quartas de um complexo z é o número $w = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, determine as outras raízes quartas de z.

B.14 Determine:

a) as raízes cúbicas de $z = -1$;
b) as raízes oitavas de $z = 1$;
c) as raízes quadradas de $z = 25$;
d) as raízes quadradas de $z = 16$;
e) as raízes quartas de $z = 16$;
f) as raízes quadradas de $z = -1$.

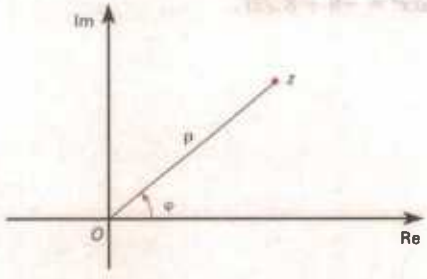
B.15 Resolva em ℂ as equações:

a) $x^2 - 6x + 10 = 0$;
b) $x^2 - 2x + 2 = 0$;
c) $x^2 - 4x + 5 = 0$;
d) $x^2 - 8x + 17 = 0$.

Exercícios complementares

C.1 Dados os números complexos $z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ e $w = 9\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, prove que, se $z^n = w^{\frac{n}{2}}$ para todo n par e positivo, então $\rho = 3$ e $\varphi = \frac{\pi}{12} + q\pi$, com $q \in \mathbb{Q}$ (racionais).

C.2 Seja o número complexo na forma trigonométrica $z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, cuja representação no plano de Argand-Gauss está indicada no gráfico. Represente, nesse plano, os números zi, zi^2, zi^3 e zi^4.



Sugestão: $i = 1(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$.
Nota: os produtos zi, zi^2, zi^3 e zi^4 são rotações do ponto z, em torno da origem, de 90°, 180°, 270° e 360°, respectivamente.

C.3 Calcule as raízes quintas de $16 - 16\sqrt{3}i$.

C.4 Represente no plano de Argand-Gauss as raízes quintas de $16 - 16\sqrt{3}i$.

C.5 Calcule as raízes oitavas de $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$.

C.6 Represente no plano de Argand-Gauss as raízes oitavas de $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cesgranrio) O valor de $\left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ é:

a) $\frac{1}{2}$. b) $-i$. c) i. d) -1. e) 1.

V.2 (PUC-SP) Sabendo que $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos 30° + i \operatorname{sen} 30°$, o valor de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{20}$ é:

a) $\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°$.
b) $\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°$.
c) $\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°$.
d) $\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°$.
e) $\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°$.

V.3 (UFPE) Sejam os números complexos $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$ e $w = i^3 + i^2 + i$. Encontre $y = z^6 + w^6$.

V.4 (Fatec-SP) Determine o menor número natural não-nulo n de modo que $(1 - i)^n$ seja um número real.

V.5 (Fesp-SP) As raízes imaginárias da equação $8x^3 + 1 = 0$ são:

a) $\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i$.
b) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
c) $\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}i$.
d) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
e) $\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}i$.

V.6 (Mackenzie-SP) Que números complexos representam dois vértices de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro na origem, onde um dos três vértices do triângulo é dado por $V_1 = -2i$?

a) $2i$ e 2.
b) $\sqrt{3} + i$ e $\sqrt{3} - i$.
c) $-\sqrt{3} - i$ e $\sqrt{3} - i$.
d) $\sqrt{3} + i$ e $-\sqrt{3} + i$.
e) $-\sqrt{3} + i$ e $-\sqrt{3} - i$.

V.7 (UFBA) Determine a soma das soluções da equação $x^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

Capítulo 19
Polinômio em uma variável

1. Função polinomial

Definição

Chama-se **função polinomial complexa de variável complexa** toda função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ em que:}$$

$$\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0\} \subset \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \{n, n-1, n-2, \ldots, 1, 0\} \subset \mathbb{N}.$$

- A expressão $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ é denominada **polinômio complexo de variável complexa**.
- Os números $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ são os **coeficientes** do polinômio.
- x é a **variável** do polinômio.
- Cada uma das parcelas $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, a_{n-2} x^{n-2}, \ldots, a_1 x, a_0$ é um **termo** ou **monômio** do polinômio.
- a_0 é o **termo independente** da variável do polinômio.

Exemplos

a) A expressão $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 7$ é um polinômio em que:
- 5, -3, 2, -4 e 7 são seus coeficientes;
- x é sua variável;
- $5x^4$, $-3x^3$, $2x^2$, $-4x$ e 7 são seus termos ou seus monômios;
- 7 é seu termo independente.

b) A expressão $2it^5 + t^3 + 3t + 6$, que pode ser escrita sob a forma $2it^5 + 0t^4 + t^3 + 0t^2 + 3t + 6$, é um polinômio em que:
- $2i$, 0, 1, 0, 3 e 6 são seus coeficientes;
- $2it^5$, $0t^4$, t^3, $0t^2$, $3t$ e 6 são seus termos ou seus monômios;
- 6 é o seu termo independente.

c) As expressões $5x^{-2} + 2x^{-1} + 4x + 2$ e $3x^4 + 5x^{\frac{1}{2}}$ **não** são polinômios, pois em cada uma delas há pelo menos um expoente da variável que **não** é um número natural.

Notas

1. Binômios e trinômios são nomes dados a polinômios com apenas dois termos e apenas três termos respectivamente. Exemplos: $2x + 1$ é um binômio; $5x^2 - 3x + 6$ é um trinômio.

2. Polinômio constante é todo aquele formado apenas pelo termo independente. Exemplo: o número 7 é um polinômio constante.

3. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_0$, com $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0\} \subset \mathbb{R}$ e $\{n, n-1, n-2, ..., 0\} \subset \mathbb{N}$, é denominada **função polinomial real de variável real** e a expressão $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_0$ é chamada de **polinômio real de variável real**.

2. Polinômio identicamente nulo

Definição

O polinômio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_0$, na variável x, é identicamente nulo se, e somente se:

$$a_j = 0, \forall j, j \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq j \leq n.$$

Indicamos que um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo por $P(x) \equiv 0$ e, caso contrário, por $P(x) \not\equiv 0$.

Exercício resolvido

R.1 Para que valor complexo de a o polinômio $(a^2 - 1)x^2 + (a - 1)x + 0$ é identicamente nulo?

Resolução

Indicando esse polinômio por $P(x)$, temos que:

$$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \therefore P(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ a = 1. \end{cases}$$

Logo, $a = 1$.

3. Identidade de polinômios

Definição

Os polinômios $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_0$ e $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + ... + b_0$, na variável x, são idênticos se, e somente se:

$$a_j = b_j, \forall j, j \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq j \leq n.$$

Indicamos que dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são idênticos por $P(x) \equiv Q(x)$; caso não sejam idênticos, indicamos por $P(x) \not\equiv Q(x)$.

Exercício resolvido

R.2 Para que valores complexos de m e n os polinômios $(m^2 - 1)x^3 + 2x + 5$ e $8x^3 + (m - 3)x^2 + (m - n)x + 5$, na variável x, são idênticos?

Resolução

Indicando esses polinômios por $P(x)$ e $Q(x)$, respectivamente, temos:

$$P(x) \equiv Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 8 \\ m - 3 = 0 \\ m - n = 2 \end{cases} \therefore P(x) \equiv Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \text{ ou } m = -3 \\ m = 3 \\ m - n = 2. \end{cases}$$

Temos, então, $m = 3$ e $n = 1$.

4. Grau de um polinômio

Definição

Grau de um polinômio $P(x)$, $P(x) \not\equiv 0$, é o maior expoente que apresenta a variável x, dentre os termos de **coeficientes não-nulos**.

Indicamos o grau de um polinômio $P(x)$ por ∂P (lê-se "del-P").

Exemplos

a) $P(x) \equiv 5x^8 - 3x^2 + 4 \Rightarrow \partial P = 8$.
b) $Q(t) \equiv 9t \Rightarrow \partial Q = 1$.
c) $E(x) \equiv 5 \Rightarrow \partial E = 0$.

Notas

1. Se o grau de um polinômio $P(x)$ é n, então o coeficiente a_n de x^n é denominado "**coeficiente dominante** de $P(x)$". Exemplos: o coeficiente dominante do polinômio $P(x) \equiv 5x^3 - 8x^2 + 4$ é 5; o coeficiente dominante do polinômio $P(x) \equiv 4$ é 4.

2. Chama-se "polinômio **unitário**" todo polinômio cujo coeficiente dominante é 1. Exemplo: o polinômio $P(t) \equiv t^2 + 2t - 5$ é unitário pois seu coeficiente dominante é 1.

3. Não se define grau de um polinômio identicamente nulo, pois todos os seus coeficientes são iguais a zero.

Exercício resolvido

R.3 Para que valores complexos de m o polinômio $P(x) \equiv (m^2 - 1)x^3 + 2x^2 - 5$ possui grau 3?

Resolução

$$\partial P = 3 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \therefore \partial P = 3 \Leftrightarrow m \neq 1 \text{ e } m \neq -1.$$

Assim, o polinômio $P(x)$ possui grau 3 para todo complexo m, $m \neq 1$ e $m \neq -1$.

5. Adição de polinômios

Definição

Sejam os polinômios $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots + a_0$ e $Q(x) \equiv b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_0$.

Chama-se "**soma** de $P(x)$ com $Q(x)$" o polinômio:

$$P(x) + Q(x) \equiv (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0).$$

Podemos indicar a soma $P(x) + Q(x)$ também por $(P + Q)(x)$ ou por $P + Q$.

Exemplo

Sendo $P(x) \equiv 3x^4 + 2x^3 + x - 1$ e $Q(x) = 2x^2 + 3x + 5$, podemos escrever:

$$P(x) \equiv 3x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 1 \text{ e } Q(x) \equiv 0x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 3x + 5.$$

Assim, a soma de P com Q é $P(x) + Q(x) \equiv 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 4$.

5.1. Propriedades da adição de polinômios

Sendo $P(x)$, $Q(x)$ e $T(x)$ polinômios quaisquer, tem-se que:

A1 Associativa

$$[P(x) + Q(x)] + T(x) \equiv P(x) + [Q(x) + T(x)].$$

A2 Comutativa

$$P(x) + Q(x) \equiv Q(x) + P(x).$$

A3 Elemento neutro

Existe o polinômio $0(x)$ tal que:

$$P(x) + 0(x) \equiv 0(x) + P(x) \equiv P(x).$$

Nota: o polinômio $0(x)$ é o polinômio identicamente nulo e é o elemento neutro da adição de polinômios.

A4 Elemento oposto

Para todo polinômio $P(x)$ existe o polinômio $-P(x)$, denominado "oposto de $P(x)$", tal que $P(x) + [-P(x)] \equiv [-P(x)] + P(x) \equiv 0(x)$, em que $0(x)$ é o polinômio identicamente nulo.

Conseqüência: o oposto do polinômio $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$ é $-P(x) \equiv -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - a_{n-2} x^{n-2} - \ldots - a_0$.

Exemplo

O oposto de $P(x) \equiv 3x^4 - 2x^2 + x - 4$ é $-P(x) \equiv -3x^4 + 2x^2 - x + 4$.

5.2. Grau do polinômio soma

Teorema

Se os polinômios P e Q têm graus m e n respectivamente, com $m \geq n$, e $P + Q$ é não-nulo, então:

$$\partial(P + Q) \leq m.$$

Demonstração

Sejam $P(x) \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $Q(x) \equiv \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, com $\partial P = m$, $\partial Q = n$ e $m \geq n$.

Primeiro caso: $m = n$

Temos $P(x) + Q(x) \equiv \sum_{i=0}^{m} (a_i + b_i)\, x^i$.

- Se $a_m + b_m \neq 0$, então $\partial(P + Q) = m$.
- Se $a_m + b_m = 0$ e $P + Q$ é não-nulo, então $\partial(P + Q) < m$.

Logo, $\partial(P + Q) \leq m$.

Segundo caso: $m > n$

Temos $P(x) + Q(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)\, x^i + \sum_{j=n+1}^{m} a_j x^j$.

Por hipótese temos que $\partial P = m$. Logo, $a_m \neq 0$ e, portanto, $\partial(P + Q) = m$.

Assim, pelo primeiro e pelo segundo caso, concluímos que $\partial(P + Q) \leq m$. (c.q.d.)

Exemplos

a) $P(x) \equiv 3x^2 + 5x - 1 \Rightarrow \partial P = 2$;
$Q(x) \equiv 6x^3 + 2x^2 + x \Rightarrow \partial Q = 3$;
$P(x) + Q(x) \equiv 6x^3 + 5x^2 + 6x - 1 \Rightarrow \partial(P + Q) = 3$.

b) $P(x) \equiv 4x^3 + 5x^2 - x \Rightarrow \partial P = 3$;
$Q(x) \equiv -4x^3 + 2x^2 + 4 \Rightarrow \partial Q = 3$;
$P(x) + Q(x) \equiv 7x^2 - x + 4 \Rightarrow \partial(P + Q) = 2$.

Exercícios resolvidos

R.4 São dados os polinômios $P(x) = (a^2 - 1)x^3 + 5x^2 + 3x - 1$ e $Q(x) \equiv 6x^2 + 8x + 10$.
a) Calcular $P(x) + Q(x)$.
b) Discutir, em função de a, o grau do polinômio $P + Q$.

Resolução
a) $P(x) + Q(x) \equiv (a^2 - 1)x^3 + 11x^2 + 11x + 9$.
b) Se $a^2 - 1 \neq 0$, então $\partial(P + Q) = 3$.
Se $a^2 - 1 = 0$, então $\partial(P + Q) = 2$.
Resumindo: $a \neq 1$ e $a \neq -1 \Rightarrow \partial(P + Q) = 3$; $a = 1$ ou $a = -1 \Rightarrow \partial(P + Q) = 2$.

R.5 Os polinômios P e Q têm graus 3 e 4 respectivamente. Qual é o grau do polinômio soma?

Resolução
Sejam $P(x) \equiv a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_3 \neq 0$, e $Q(x) \equiv b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$, com $b_4 \neq 0$.
Temos que $P(x) + Q(x) \equiv b_4x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$.
Por hipótese, $b_4 \neq 0$. Logo, $\partial(P + Q) = 4$.

R.6 Cada um dos polinômios P e Q tem grau 4. Sabendo que $P + Q$ é não-nulo, qual é o grau de $P + Q$?

Resolução
Sejam $P(x) \equiv a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, com $a_4 \neq 0$, e $Q(x) \equiv b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0$, com $b_4 \neq 0$.
Temos que $P(x) + Q(x) \equiv (a_4 + b_4)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$.
Se $a_4 + b_4 \neq 0$, então $\partial(P + Q) = 4$.
Se $a_4 + b_4 = 0$, então $\partial(P + Q) < 4$, pois $P + Q$ é, por hipótese, não-nulo.
Logo, $\partial(P + Q) \leq 4$.

6. Subtração de polinômios

Definição

Sejam os polinômios $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ e $Q(x) \equiv b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0$.

Chama-se "diferença $P(x) - Q(x)$" o polinômio $P(x) + [-Q(x)]$, ou seja:

$$P(x) - Q(x) \equiv (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + (a_{n-2} - b_{n-2})x^{n-2} + \ldots + (a_0 - b_0).$$

Podemos indicar a diferença $P(x) - Q(x)$ também por $(P - Q)(x)$ ou por $P - Q$.

Exemplo

Sendo $P(x) \equiv 5x^3 + 8x^2 - 3x + 10$ e $Q(x) \equiv 7x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x - 1$, podemos escrever:

$$P(x) \equiv 0x^5 + 0x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 3x + 10 \text{ e } -Q(x) \equiv -7x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1.$$

Assim, a diferença $P - Q$ é $P(x) + [-Q(x)] \equiv -7x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 2x^2 - x + 11$.

6.1. Grau do polinômio diferença

Como a diferença $P - Q$, entre polinômios, é definida como sendo a soma $P + (-Q)$, vale para a diferença o teorema apresentado no item 5.2, cujo enunciado, adaptado, é:

Se os polinômios P e Q têm graus m e n respectivamente, com $m \geq n$, e $P - Q$ é não-nulo, então:

$$\partial(P - Q) \leq m.$$

Exercício resolvido

R.7 Dois polinômios P e Q são tais que $\partial P = 4$ e $\partial(P - Q) = 5$. Qual é o grau do polinômio Q?

Resolução

Temos que $\partial Q > 4$, pois caso contrário teríamos $\partial(P - Q) \leq 4$, o que não ocorre. Sejam:

$$P(x) \equiv a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_4 \neq 0 \text{ e}$$

$$Q(x) \equiv b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0,\ b_n \neq 0,\ n > 4.$$

Temos que:

$$P(x) - Q(x) \equiv (0 - b_n)x^n + \ldots + (a_4 - b_4)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

Como $b_n \neq 0$ e $\partial(P - Q) = 5$, concluímos que $n = 5$.

Logo, $\partial(Q) = n = 5$.

7. Multiplicação de monômios

Definição

Chama-se "**produto** do monômio $M(x) \equiv a_r x^r$ pelo monômio $N(x) \equiv b_s x^s$" o monômio:

$$P(x) \equiv a_r b_s x^{r+s}.$$

Exemplos

a) $3x^4 \cdot 2x^5 \equiv 6x^9$.
b) $-8x \cdot 4x^3 \equiv -32x^4$.
c) $3 \cdot 2x^5 \equiv 6x^5$.

Nota: é imediato verificar que a multiplicação de monômios é comutativa e associativa.

8. Multiplicação de polinômio por polinômio

Definição

Chama-se "**produto** de um polinômio P por um polinômio Q" o polinômio obtido pela soma dos produtos de cada monômio de P por todos os monômios de Q.

Indicamos o produto do polinômio $P(x)$ pelo polinômio $Q(x)$ por $P(x) \cdot Q(x)$, ou por $(PQ)(x)$, ou simplesmente por PQ.

Exemplo

Sendo $H(x) \equiv 3x^2 + 8x$ e $G(x) \equiv 2x^3 + 3x + 6$, temos que:

$$H(x) \cdot G(x) \equiv (3x^2 + 8x)(2x^3 + 3x + 6) \equiv 6x^5 + 9x^3 + 18x^2 + 16x^4 + 24x^2 + 48x$$

$\therefore H(x) \cdot G(x) \equiv 6x^5 + 16x^4 + 9x^3 + 42x^2 + 48x.$

8.1. Propriedades da multiplicação de polinômio por polinômio

Sendo $P(x)$, $Q(x)$ e $T(x)$ polinômios quaisquer, tem-se que:

M.1 Associativa

$$[P(x) \cdot Q(x)] \cdot T(x) \equiv P(x)[Q(x) \cdot T(x)].$$

M.2 Comutativa

$$P(x) \cdot Q(x) \equiv Q(x) \cdot P(x).$$

M.3 Elemento neutro

Existe o polinômio $I(x)$ tal que:

$$P(x) \cdot I(x) \equiv I(x) \cdot P(x) \equiv P(x).$$

Nota: $I(x)$ é o elemento neutro da multiplicação de polinômios e $I(x) \equiv 1$.

M.4 Distributivas

$$P(x) \cdot [Q(x) + T(x)] \equiv P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot T(x) \text{ e}$$
$$[Q(x) + T(x)] \cdot P(x) \equiv Q(x) \cdot P(x) + T(x) \cdot P(x).$$

Exercícios resolvidos

R.8 São dados os polinômios $H(x) \equiv 3x^5 + 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4$ e $G(x) \equiv 2x^3 - 4x^2 + 3$. Calcular $H(x) \cdot G(x)$.

Resolução

Para simplificar o cálculo de $H(x) \cdot G(x)$ existem dispositivos práticos:

Primeiro dispositivo prático

$H(x) \longrightarrow 3x^5 + 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 0x - 4$

$G(x) \longrightarrow 2x^3 - 4x^2 + 0x + 3$ $\quad \times$

$2x^3 \cdot H(x) \longrightarrow 6x^8 + 4x^7 - 10x^6 + 2x^5 + 0x^4 - 8x^3$

$-4x^2 \cdot H(x) \longrightarrow -12x^7 - 8x^6 + 20x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 16x^2$

$3 \cdot H(x) \longrightarrow 9x^5 + 6x^4 - 15x^3 + 3x^2 + 0x - 12$

$H(x) \cdot G(x) \longrightarrow 6x^8 - 8x^7 - 18x^6 + 31x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 19x^2 + 0x - 12.$

Segundo dispositivo prático

H \ G	$2x^3$	$-4x^2$	$0x$	3
$3x^5$	$6x^8$	$-12x^7$	$0x^6$	$9x^5$
$2x^4$	$4x^7$	$-8x^6$	$0x^5$	$6x^4$
$-5x^3$	$-10x^6$	$20x^5$	$0x^4$	$-15x^3$
x^2	$2x^5$	$-4x^4$	$0x^3$	$3x^2$
$0x$	$0x^4$	$0x^3$	$0x^2$	$0x$
-4	$-8x^3$	$16x^2$	$0x$	-12

$$H(x) \cdot G(x) \equiv 6x^8 - 8x^7 - 18x^6 + 31x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 19x^2 + 0x - 12$$

R.9 São dados os polinômios $H(x) = ax^2 + (a - 1)x$, $G(x) = bx^3 + 2b$ e $P(x) = 5x^5 + 4x^4 + 10x^2 + 8x$. Determinar as constantes a e b, sabendo que $H(x) \cdot G(x) \equiv P(x)$.

Resolução

$$H(x) \cdot G(x) = P(x) \Leftrightarrow [ax^2 + (a - 1)x](bx^3 + 2b) = 5x^5 + 4x^4 + 10x^2 + 8x$$
$$\therefore abx^5 + 2abx^2 + b(a - 1)x^4 + 2b(a - 1)x = 5x^5 + 4x^4 + 10x^2 + 8x.$$

Por definição de polinômios idênticos, temos:

$$\begin{cases} ab = 5 \\ 2ab = 10 \\ b(a - 1) = 4 \\ 2b(a - 1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 5 \\ b(a - 1) = 4 \end{cases} \therefore \begin{cases} ab = 5 \quad \text{(I)} \\ ab - b = 4. \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos $5 - b = 4 \Rightarrow b = 1$.
Substituindo $b = 1$ em (I), temos $a \cdot 1 = 5 \Rightarrow a = 5$.
Logo, $a = 5$ e $b = 1$.

8.2. Grau do polinômio produto

Teorema

Se os polinômios não-nulos P e Q têm graus m e n respectivamente, então:

$$\partial(PQ) = m + n.$$

Demonstração

Sejam:

$$P(x) \equiv a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots + a_0, \text{ com } a_m \neq 0, \text{ e}$$

$$Q(x) \equiv b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0, \text{ com } b_n \neq 0.$$

Multiplicando cada monômio de $P(x)$ por todos os monômios de $Q(x)$, obtêm-se um dos produtos igual a $a_m b_n x^{m+n}$ e todos os outros produtos da forma $a_{m-r} b_{n-s} x^{m+n-r-s}$, em que pelo menos um dos números naturais r ou s é não-nulo.

Temos que:

I. $a_m b_n \neq 0$, pois, por hipótese, $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$;

II. $m + n > m + n - r - s$, pois pelo menos um dos naturais r ou s é não-nulo.

Por (I) e (II), concluímos que $\partial(PQ) = m + n$. (c.q.d.)

Exemplo

Sendo $H(x) = 3x^5 + 3x^4 - 6x + 3$ e $G(x) = 4x^3 - 2x$, temos:

$$H(x) \cdot G(x) \equiv 12x^8 + 12x^7 - 6x^6 - 6x^5 - 24x^4 + 12x^3 + 12x^2 - 6x.$$

Note que $\partial H = 5$, $\partial G = 3$ e $\partial(HG) = 5 + 3 = 8$.

Exercício resolvido

R.10 Sendo $H(x) = x^3 + 2x$ e $P(x) = 2x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 4x$, determinar o polinômio $G(x)$ tal que $H(x) \cdot G(x) = P(x)$.

Resolução

Pelo teorema anterior, temos que $P(x) \equiv H(x) \cdot G(x) \Rightarrow \partial P = \partial H + \partial G \therefore 5 = 3 + \partial G \therefore \partial G = 2$.

Assim, o polinômio G é da forma $G(x) \equiv ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Logo, devemos ter: $(x^3 + 2x)(ax^2 + bx + c) \equiv 2x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 4x$

$$\therefore ax^5 + bx^4 + cx^3 + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx \equiv 2x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 4x$$
$$\therefore ax^5 + bx^4 + (c + 2a)x^3 + 2bx^2 + 2cx \equiv 2x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 4x.$$

Pela definição de polinômios idênticos, temos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c + 2a = 6 \\ 2b = 8 \\ 2c = 4. \end{cases} \quad \therefore a = 2, b = 4 \text{ e } c = 2.$$

Logo, $G(x) \equiv 2x^2 + 4x + 2$.

9. Divisão de polinômios

Definição

Sejam os polinômios $E(x) \equiv a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots + a_0$ e $D(x) \equiv b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0$, com $b_n \neq 0$.

Dividir $E(x)$ por $D(x)$ significa obter os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, tais que:

$$Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x) \text{ e } \partial R < \partial D \text{ ou } R(x) \equiv 0(x).$$

- Demonstra-se que cada um dos polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ existe e é único.
- Os polinômios $E(x)$, $D(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são chamados, respectivamente, de **dividendo**, **divisor**, **quociente** e **resto da divisão**.

Exemplos

a) Observando na sentença:

$$\underbrace{(2x + 1)}_{Q(x)} \cdot \underbrace{(x^3 + 2x)}_{D(x)} + \underbrace{x^2}_{R(x)} \equiv \underbrace{2x^4 + x^3 + 5x^2 + 2x}_{E(x)}$$

que $\partial R < \partial D$, temos que $Q(x)$ e $R(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $E(x)$ por $D(x)$.

b) O quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão do polinômio $E(x) \equiv 2x + 1$ por $D(x) \equiv x^2 + 5$ são $Q(x) \equiv 0$ e $R(x) \equiv 2x + 1$, pois:

$$\underbrace{0}_{Q(x)} \cdot \underbrace{(x^2 + 5)}_{D(x)} + \underbrace{2x + 1}_{R(x)} \equiv \underbrace{2x + 1}_{E(x)}.$$

De modo geral, se dois polinômios $E(x)$ e $D(x)$ são tais que $\partial E < \partial D$, então o quociente de $E(x)$ por $D(x)$ é o polinômio identicamente nulo, $Q(x) \equiv 0$, e o resto da divisão é o próprio $E(x)$, $R(x) \equiv E(x)$.

Exercícios resolvidos

R.11 São dados os monômios $E(x) = a_m x^m$ e $D(x) \equiv b_n \cdot x^n$, com $b_n \neq 0$ e $m \geq n$. Mostrar que os monômios $Q(x) = \frac{a_m}{b_n} \cdot x^{m-n}$ e $R(x) = 0$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $E(x)$ por $D(x)$.

Resolução

Temos que:

$$Q(x) \cdot D(x) + R(x) = \frac{a_m}{b_n} \cdot x^{m-n} \cdot b_n \cdot x^n + 0 = \frac{a_m}{b_n} \cdot b_n \cdot x^{m-n+n} \equiv a_m \cdot x^m = E(x).$$

Logo, $Q(x)$ e $R(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $E(x)$ por $D(x)$.

(c.q.d.)

Nota: como $R(x) \equiv 0$, dizemos que a divisão de $E(x)$ por $D(x)$ é exata ou ainda que $E(x)$ é divisível por $D(x)$.

R.12 De acordo com o exercício anterior, obter cada um dos seguintes quocientes:

a) $12x^5 : 6x^2$; b) $8x^{10} : 3x^3$.

Resolução

a) $12x^5 : 6x^2 = 2x^3$.

b) $8x^{10} : 3x^3 = \frac{8}{3} x^7$.

9.1. Grau do polinômio quociente

Teorema

Sejam os polinômios $E(x)$ e $D(x)$, com $\partial E \geq \partial D$.
Se $Q(x)$ é o quociente da divisão de $E(x)$ por $D(x)$, então $\partial Q = \partial E - \partial D$.

Demonstração

Sejam, respectivamente, $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $E(x)$ por $D(x)$. Por definição, temos que:

$$Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x), \text{ com } \partial R < \partial D \text{ ou } R(x) = 0.$$

Logo, $\partial(QD + R) = \partial E$.
Como $\partial R < \partial D$ ou $R(x) \equiv 0$, podemos afirmar que:

$$\partial(QD) = \partial E \therefore \partial Q + \partial D = \partial E \therefore \partial Q = \partial E - \partial D.$$

(c.q.d.)

Exercício resolvido

R.13 Sejam $E(x) = 6x^8 - 5x^4 + 3x - 1$ e $D(x) = 4x^5 + 2x^3 + x$. Calcular o grau do quociente $Q(x)$ de $E(x)$ por $D(x)$.

Resolução

Pelo teorema anterior, temos que $\partial Q = \partial E - \partial D$.
Logo, $\partial Q = 8 - 5 \Rightarrow \partial Q = 3$.

9.2. Método de Descartes para a divisão de polinômios

Descartes estabeleceu um método para a obtenção do quociente e do resto de uma divisão de polinômios, fundamentado na definição de polinômios idênticos.

Para dividir um polinômio $E(x)$ por um polinômio $D(x)$, com $\partial E \geq \partial D$, executam-se os seguintes passos:

1º) determinam-se ∂Q e o maior valor possível de ∂R;

2º) formam-se os polinômios Q e R, com os respectivos graus obtidos no primeiro passo e com coeficientes a se determinar;

3º) obtêm-se os coeficientes desconhecidos do segundo passo através da identidade $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$.

Nota: esse método de Descartes também é denominado **método dos coeficientes a determinar**.

Exercício resolvido

R.14 Obter o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $E(x) = 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1$ por $D(x) = x^2 + 2$, utilizando o método dos coeficientes a determinar.

Resolução

Primeiro passo: determinam-se ∂Q e o máximo valor possível de ∂R:

$$\partial Q = \partial E - \partial D \Rightarrow \partial Q = 5 - 2 \therefore \partial Q = 3; \partial R < \partial D \Rightarrow \partial R < 2 \therefore \partial R \leq 1.$$

Segundo passo: formam-se os polinômios Q e R, com os respectivos graus obtidos no primeiro passo e com coeficientes a se determinar: $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $R(x) = ex + f$.

Terceiro passo: obtêm-se os coeficientes desconhecidos do segundo passo através da identidade $Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x)$:

$$\underbrace{(ax^3 + bx^2 + cx + d)}_{Q(x)} \underbrace{(x^2 + 2)}_{D(x)} + \underbrace{ex + f}_{R(x)} \equiv \underbrace{2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1}_{E(x)}$$

$$\therefore ax^5 + 2ax^3 + bx^4 + 2bx^2 + cx^3 + 2cx + dx^2 + 2d + ex + f = 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1$$

$$\therefore ax^5 + bx^4 + (2a + c)x^3 + (2b + d)x^2 + (2c + e)x + 2d + f = 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1.$$

Pela definição de polinômios idênticos, temos
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ 2a + c = 4 \\ 2b + d = 9 \\ 2c + e = 3 \\ 2d + f = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 2$, $b = 4$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 3$, $f = -1$.

Temos, então, $Q(x) = 2x^3 + 4x^2 + 0x + 1$ e $R(x) = 3x - 1$.

9.3. Método da chave para divisão de polinômios

Sejam os polinômios $E(x)$ e $D(x)$, com $\partial E \geq \partial D$. Podemos obter o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $E(x)$ por $D(x)$ através de um algoritmo semelhante àquele utilizado na divisão de números reais.

1º) Dispomos $E(x)$ e $D(x)$ conforme o esquema:

$$E(x) \quad \big| \quad D(x)$$

2º) Dividimos o monômio $a_m x^m$ de maior grau de $E(x)$ pelo monômio $b_n x^n$ de maior grau de $D(x)$:

$$\begin{array}{l|l} E(x) & D(x) \\ \hline & \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \end{array}$$

3º) Subtraímos de $E(x)$ o polinômio $\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \cdot D(x)$, obtendo o polinômio $R_1(x)$:

$$\begin{array}{l|l} E(x) & D(x) \\ \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \cdot D(x) & \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \\ \hline \text{Primeiro resto parcial} \rightarrow R_1(x) & \end{array}$$

4º) Se $\partial R_1 < \partial D$ ou $R_1(x) \equiv 0$, então a divisão está completa, sendo $Q(x) \equiv \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$ e $R(x) = R_1(x)$.

Caso contrário, dividimos o monômio $C_k x^k$ de maior grau de $R_1(x)$ pelo monômio $b_n x^n$ de maior grau de $D(x)$:

$$\begin{array}{l|l} E(x) & D(x) \\ \vdots & \\ R_1(x) & \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} + \frac{C_k}{b_n} x^{k-n} \end{array}$$

5º) Subtraímos de $R_1(x)$ o polinômio $\frac{C_k}{b_n} x^{k-n} \cdot D(x)$, obtendo o polinômio $R_2(x)$:

$$\begin{array}{l|l} E(x) & D(x) \\ \vdots & \\ \overline{R_1(x)} & \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} + \frac{C_k}{b_n} x^{k-n} \\ \frac{C_k}{b_n} x^{k-n} \cdot D(x) & \\ \hline \text{Segundo resto parcial} \rightarrow R_2(x) & \end{array}$$

6º) Se $\partial R_2 < \partial D$ ou $R_2(x) \equiv 0$, então a divisão está completa, sendo $Q(x) \equiv \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} + \frac{C_k}{b_n} x^{k-n}$ e $R(x) \equiv R_2(x)$. Caso contrário, repetimos os procedimentos (4º) e (5º) para $R_2(x)$.

7º) Assim por diante até obtermos um resto $R_s(x)$ tal que $\partial R_s < \partial D$ ou $R_s(x) \equiv 0$.

Nota: no caso de obtermos $R_s(x) \equiv 0$, dizemos que a divisão é exata ou ainda que $E(x)$ é divisível por $D(x)$.

Exercício resolvido

R.15 Através do método da chave, obter o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $E(x) \equiv 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1$ por $D(x) = x^2 + 2$.

Resolução

1º) Dividimos o monômio de mais alto grau de $E(x)$ pelo monômio de mais alto grau de $D(x)$:

$$2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \quad \Big| \; x^2 + 2$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2x^3$$

2º) Subtraímos do dividendo o polinômio $2x^3(x^2 + 2) = 2x^5 + 4x^3$:

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ \underline{2x^5 \qquad + 4x^3} \\ \end{array} \quad \Big| \; \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ 2x^3 \end{array}$$

Primeiro resto parcial → $4x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 3x + 1$

3º) Dividimos o monômio de mais alto grau do primeiro resto parcial pelo monômio de mais alto grau de $D(x)$:

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ \underline{2x^5 \qquad + 4x^3} \\ 4x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \end{array} \quad \Big| \; \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ 2x^3 + 4x^2 \end{array}$$

4º) Subtraímos do primeiro resto parcial o polinômio $4x^2(x^2 + 2) = 4x^4 + 8x^2$:

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ \underline{2x^5 \qquad + 4x^3} \\ 4x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ \underline{4x^4 \qquad + 8x^2} \\ \end{array} \quad \Big| \; \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ 2x^3 + 4x^2 \end{array}$$

Segundo resto parcial → $x^2 + 3x + 1$

5º) Dividimos o monômio de mais alto grau do segundo resto parcial pelo monômio de mais alto grau de $D(x)$:

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ \underline{2x^5 \qquad + 4x^3} \\ 4x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ \underline{4x^4 \qquad + 8x^2} \\ x^2 + 3x + 1 \end{array} \quad \Big| \; \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ 2x^3 + 4x^2 + 1 \end{array}$$

6º) Subtraímos do segundo resto parcial o polinômio $1(x^2 + 2) = x^2 + 2$:

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ \underline{2x^5 \qquad + 4x^3} \\ 4x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ \underline{4x^4 \qquad + 8x^2} \\ x^2 + 3x + 1 \\ \underline{x^2 \qquad + 2} \\ \end{array} \quad \Big| \; \begin{array}{l} x^2 + 2 \\ 2x^3 + 4x^2 + 1 \end{array}$$

Resto final → $3x - 1$

Temos, então, $Q(x) = 2x^3 + 4x^2 + 1$ e $R(x) = 3x - 1$.

R.20 Provar que $P(1)$ é igual à soma dos coeficientes do polinômio $P(x)$.

Resolução

Seja $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$.

Temos que $P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \ldots + a_0 \therefore P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0$, ou seja, $P(1)$ é a soma dos coeficientes de $P(x)$.

(c.q.d.)

R.21 Calcular a soma dos coeficientes do polinômio $P(x) = (3x^2 - x - 3)^{47}$.

Resolução

Pelo exercício R.20, a soma dos coeficientes do polinômio $P(x)$ é igual a $P(1)$. Temos que:

$$P(1) = (3 \cdot 1^2 - 1 - 3)^{47} \quad \therefore \quad P(1) = (-1)^{47} \quad \therefore \quad P(1) = -1.$$

Assim, a soma dos coeficientes de $P(x)$ é -1.

R.22 Provar que $P(0)$ é igual ao termo independente do polinômio $P(x)$.

Resolução

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$. Temos que:

$$P(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + a_{n-2} \cdot 0^{n-2} + \ldots + a_0 \quad \therefore \quad P(0) = a_0.$$

Ou seja, $P(0)$ é igual ao termo independente de $P(x)$. (c.q.d.)

R.23 Calcular o termo independente de x do polinômio $P(x) \equiv (4x^3 - 2x^2 + x - 1)^{50}$.

Resolução

Pelo exercício R.22, o termo independente do polinômio $P(x)$ é igual a $P(0)$.

Temos que $P(0) = (4 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 - 1)^{50} \therefore P(0) = (-1)^{50} \therefore P(0) = 1$.

Assim, o termo independente do polinômio $P(x)$ é 1.

11. Raiz ou zero de um polinômio

Definição

> Uma constante complexa k é **raiz** ou **zero** de um polinômio $P(x)$ se, e somente se:
>
> $$P(k) = 0.$$

Exemplo

O número 2 é raiz do polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 6$, pois $P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 6 = 0$.

Exercícios resolvidos

R.24 Determinar as raízes do polinômio $P(x) = 2x^2 - x - 1$.

Resolução

Basta resolvermos a equação $P(x) = 0$, ou seja, $2x^2 - x - 1 = 0$.

Temos:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$\therefore x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \therefore \quad x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}.$$

Assim, as raízes de $P(x)$ são 1 e $-\frac{1}{2}$.

10. Valor numérico de um polinômio

Definição

O valor numérico do polinômio $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, para $x = k$, onde k é uma constante complexa, é o valor da expressão:

$$P(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} + \ldots + a_0.$$

Exercícios resolvidos

R.16 Calcular o valor numérico do polinômio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$ para $x = 5$.

Resolução

$$P(5) = 2 \cdot 5^3 + 5^2 - 3 \cdot 5 \;\therefore\; P(5) = 2 \cdot 125 + 25 - 15 \;\therefore\; P(5) = 260.$$

R.17 Sendo $P(x) = x^4 - x^3 + 2i$, calcular:

a) $P(0)$; b) $P(i)$.

Resolução

a) $P(0) = 0^4 - 0^3 + 2i \Rightarrow P(0) = 2i$.

b) $P(i) = i^4 - i^3 + 2i \;\therefore\; P(i) = 1 - (-i) + 2i \;\therefore\; P(i) = 1 + 3i$.

R.18 Os polinômios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ e $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0$ são **idênticos** e α é um número complexo qualquer. Provar que $P(\alpha) = Q(\alpha)$.

Resolução

Por definição de polinômios idênticos, temos que $P(x) \equiv Q(x) \Leftrightarrow a_j = b_j$, $\forall j, j \in \mathbb{N}, 0 \leqslant j \leqslant n$.

Logo, $a_j\alpha^j = b_j\alpha^j$, $\forall j, j \in \mathbb{N}, 0 \leqslant j \leqslant n$.

Temos, então, $\sum_{j=0}^{n} a_j\alpha^j = \sum_{j=0}^{n} b_j\alpha^j \Leftrightarrow P(\alpha) = Q(\alpha)$.

(c.q.d.)

Nota: podem-se definir polinômios idênticos do seguinte modo:

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são idênticos se, e somente se:
$P(\alpha) = Q(\alpha)$, $\forall \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$.

R.19 Sendo $P(x) = ax^2 + bx - 1$, determinar as constantes a e b, sabendo que $P(1) = 0$ e $P(2) = 5$.

Resolução

$$P(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 1 = 0 \;\therefore\; a + b = 1; \quad \text{(I)}$$
$$P(2) = 5 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 1 = 5 \;\therefore\; 4a + 2b = 6. \quad \text{(II)}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} a + b = 1 \xrightarrow{\times} (4) \\ 4a + 2b = 6 \xleftarrow{+} \end{cases} \;\therefore\; \begin{cases} a + b = 1 \\ 0a - 2b = 2 \Rightarrow b = -1. \end{cases}$$

Substituindo $b = -1$ em (I), obtemos $a + (-1) = 1 \Rightarrow a = 2$.

Logo, $a = 2$ e $b = -1$.

R.25 Provar que, se a soma dos coeficientes de um polinômio $P(x)$ é igual a zero, então o número 1 é raiz do polinômio.

Resolução

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_0$ tal que $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_0 = 0$.

Calculando $P(1)$, temos:

$$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + ... + a_0 \therefore P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_0.$$

Por hipótese, temos que a soma dos coeficientes de $P(x)$ é zero. Logo, $P(1) = 0$. (c.q.d.)

R.26 Provar que, se o termo independente de um polinômio $P(x)$ é igual a zero, então zero é raiz de $P(x)$.

Resolução

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + 0$.

Temos que:

$$P(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + a_{n-2} \cdot 0^{n-2} + ... + a_1 \cdot 0 + 0 \therefore P(0) = 0.$$

Ou seja, 0 é raiz de $P(x)$. (c.q.d.)

12. Fração polinomial

Definição

Chama-se **fração polinomial** toda expressão do tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios complexos de variável complexa, com $Q(x) \not\equiv 0$.

Exemplos

a) $\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

b) $\frac{4}{x^3 - 3x + 2}$

Nota: sejam $P(x)$ e $Q(x)$ polinômios reais de variável real e $A = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$; a função $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ é denominada **função racional**.

12.1. Frações polinomiais idênticas

Definição

Duas frações polinomiais $\frac{P(x)}{Q(x)}$ e $\frac{S(x)}{T(x)}$ são idênticas se, e somente se:

$$\frac{P(k)}{Q(k)} = \frac{S(k)}{T(k)}, \ \forall k, k \in \mathbb{C}, \text{ com } Q(k) \neq 0 \text{ e } T(k) \neq 0.$$

Indicamos que as frações $\frac{P(x)}{Q(x)}$ e $\frac{S(x)}{T(x)}$ são idênticas por $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{S(x)}{T(x)}$ e, caso contrário, por $\frac{P(x)}{Q(x)} \not\equiv \frac{S(x)}{T(x)}$.

Exemplos

a) $\frac{(x+1)^2}{x-3} \equiv \frac{x^2+2x+1}{x-3}$, com $x \neq 3$.

b) $\frac{0}{x^2-1} \overset{\cdot}{\equiv} \frac{0}{x-8}$, com $x \neq 1$, $x \neq -1$ e $x \neq 8$.

Propriedade

Sendo $Q(x)$ e $T(x)$ polinômios não-nulos, com $Q(x) \equiv T(x)$, tem-se que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{S(x)}{T(x)} \Leftrightarrow P(x) \equiv S(x).$$

Exemplo

$$\frac{ax+b}{x^2-2} \equiv \frac{3x+5}{x^2-2} \Leftrightarrow ax+b \equiv 3x+5 \therefore a = 3 \text{ e } b = 5.$$

Exercícios resolvidos

R.27 Determinar as constantes a e b de modo que $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \equiv \frac{5x+1}{x^2-1}$.

Resolução

$$\frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)} \equiv \frac{5x+1}{x^2-1} \therefore \frac{ax+a+bx-b}{x^2-1} \equiv \frac{5x+1}{x^2-1}$$

$$\therefore \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1} \equiv \frac{5x+1}{x^2-1} \therefore \begin{cases} a+b=5 & \text{(I)} \\ a-b=1. & \text{(II)} \end{cases}$$

Somando membro a membro (I) e (II), obtemos $2a = 6 \therefore a = 3$.
Substituindo $a = 3$ em (I), obtemos $3 + b = 5 \therefore b = 2$.

R.28 Determinar as constantes a e b de modo que $\frac{ax+1}{x-3} + \frac{x+b}{x-2} \equiv \frac{3x^2-4x-8}{x^2-5x+6}$.

Resolução

$$\frac{(ax+1)(x-2)+(x+b)(x-3)}{(x-3)(x-2)} \equiv \frac{3x^2-4x-8}{x^2-5x+6}$$

$$\therefore \frac{ax^2-2ax+x-2+x^2-3x+bx-3b}{x^2-5x+6} \equiv \frac{3x^2-4x-8}{x^2-5x+6}$$

$$\therefore \frac{(a+1)x^2+(-2a+b-2)x-2-3b}{x^2-5x+6} \equiv \frac{3x^2-4x-8}{x^2-5x+6}$$

$$\therefore \begin{cases} a+1=3 \Rightarrow a=2 \\ -2a+b-2=-4 \\ -2-3b=-8 \Rightarrow b=2. \end{cases}$$

Observando que a equação $-2a + b - 2 = -4$ também é verificada para $a = 2$ e $b = 2$, concluímos que o sistema é possível e determinado. Temos então, como resposta, $a = 2$ e $b = 2$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.3, B.5, B.7, B.9 (a até e), B.10, B.12, B.14, B.17, B.19 (a, b), B.20 (a, b), B.21 (a, b), B.22 (a, b, c), B.23, B.25, B.27 (a, b, c), B.28 (a, b, c), B.29, B.30 (a), B.31 (a), C.2, C.6, C.8, C.10.

Tarefa de casa: exercícios B.4, B.6, B.8, B.9 (f até i), B.11, B.13, B.15, B.16, B.18, B.19 (c, d), B.20 (c, d), B.21 (c, d), B.22 (d, e, f), B.24, B.26, B.27 (d, e), B.28 (d, e, f), B.30 (b), B.31 (b), C.1, C.3, C.4, C.5, C.7, C.9, C.11.

Exercícios básicos

B.1 Qual das expressões seguintes é polinômio na variável x?

a) $A(x) \equiv 3x^{-5} + 8x + 2$;

b) $B(x) \equiv \sqrt[3]{x} + 2x^2 - 1$;

c) $C(x) \equiv x + \frac{1}{x}$;

d) $D(x) \equiv x^{\sqrt{2}}$;

e) $E(x) \equiv 6x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{1}{3}$.

B.2 Determine o grau de cada um dos polinômios:

a) $A(x) \equiv 5x^3 + 8x^2 + x - 1$;

b) $B(x) \equiv 0x^5 + 3x^2 - 6$;

c) $C(x) \equiv 4$;

d) $D(x) \equiv 0$.

B.3 Para que valores complexos de k o polinômio $P(x) \equiv (2k^2 - 18)x^4 + 3x - 2$ possui grau 4?

B.4 Obtenha os valores de m, $m \in \mathbb{C}$, para que o polinômio $P(x) \equiv (m^2 - 4)x^6 + 3x^5 + 2x^2 - 4$ tenha grau 5.

B.5 Para que valor de k o polinômio $P(x) \equiv (k^2 - 1)x^2 + (k + 1)x + 2k + 2$ é identicamente nulo?

B.6 Obtenha k de modo que o polinômio $P(x) \equiv (k^2 - 5k)x^3 + (k^2 - 6k + 5)x^2 + k^2 - 25$ seja identicamente nulo.

B.7 Dados os polinômios $P(x) \equiv 3x^4 + 2x^3 - x$ e $Q(x) \equiv (m + n)x^4 + 2x^3 + (m - 2n)x^2 - x$, determine as constantes m e n, sabendo que $P(x) \equiv Q(x)$.

B.8 Para que valores de a e b os polinômios $P(x) \equiv 4x^6 + 6x^3 + abx^2 + 6$ e $Q(x) \equiv (a + b)x^6 + 6x^3 + 3x^2 + 2ab$ são idênticos?

B.9 Dados os polinômios $A(x) \equiv 6x^3 + 2x^2 - 3x$, $B(x) \equiv 4x^2 + 5x - 1$ e $C(x) \equiv 9x - 2$, calcule:

a) $A(x) + B(x)$;

b) $A(x) - B(x)$;

c) $4A(x)$;

d) $B(x) \cdot C(x)$;

e) $[C(x)]^2$;

f) $2A(x) - 3B(x)$

g) $A(x) \cdot B(x)$;

h) $A(x) \cdot C(x) + B(x)$;

i) $[A(x)]^2$.

B.10 Considere os polinômios $A(x) = 2x^2 + ax + b$, $B(x) \equiv 4x + 2$, $C(x) \equiv x + b$ e $D(x) \equiv 8x^3 + (17 + b)x^2 + 3x - a$. Determine as constantes a e b sabendo que $A(x) \cdot B(x) + C(x) \equiv D(x)$.

B.11 Os polinômios $A(x) \equiv ax + b$ e $B(x) \equiv 4x^2 + 14x + 12$ são tais que $[A(x)]^2 + A(x) \equiv B(x)$. Obtenha as constantes a e b.

B.12 São dados os polinômios $P(x) \equiv (m^2 - 4)x^3 + mx^2 - 3x + 5$ e $Q(x) \equiv -2x^2 + 5x + 6$.

a) Calcule $P(x) + Q(x)$.

b) Discuta em função de m o grau do polinômio $P(x) + Q(x)$.

B.13 Se dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ têm o mesmo grau n e $P(x) + Q(x)$ é não-nulo, então:

a) o polinômio $P(x) + Q(x)$ tem grau n.

b) o polinômio $P(x) + Q(x)$ tem grau menor que n.

c) o polinômio $P(x) + Q(x)$ tem grau menor ou igual a n.

d) o polinômio $P(x) - Q(x)$ é identicamente nulo.

e) o polinômio $P(x) - Q(x)$ tem grau 1.

B.14 Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são tais que $\partial P = 3$ e $\partial Q = 8$. Qual é o grau do polinômio $P(x) \cdot Q(x)$?

B.15 Determine o grau do polinômio $P(x) = (x^6 + 4x^5 + 6x - 2)(2x^7 + 4x^3 - x + 2)$.

B.16 Qual é o grau do polinômio $P(x) \equiv (x^3 + 2x^2 + x - 1)^4 + (3x^5 + 6x^3 + 2x + 6)^3$?

B.17 Sendo $H(x) = x^3 + 3x^2$ e $P(x) = 4x^5 + 11x^4 - 2x^3 + 3x^2$, determine o polinômio $G(x)$ tal que $H(x) \cdot G(x) = P(x)$.

B.18 Dados os polinômios $E(x) \equiv 3x^4 + 2$ e $F(x) = 6x^9 + 6x^8 + 10x^5 + 4x^4 + 4x$, obtenha o polinômio $G(x)$ tal que $E(x) \cdot G(x) = F(x)$.

B.19 Efetue as divisões dos monômios:

a) $18x^6 : 3x^4$; b) $5x^9 : 2x^8$; c) $-4x^5 : 2x$; d) $-8x^6 : 2x^6$.

B.20 Obtenha o grau do quociente $Q(x)$ da divisão de $E(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a) $E(x) \equiv 6x^5 + 3x^4 + 5x - 2$ e $D(x) \equiv 8x^2 + 5x + 4$;
b) $E(x) = 3x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 3x + 1$ e $D(x) = 6x^3 + 7x - 1$;
c) $E(x) = 10x^8 + 6x^7 + 4x - 2$ e $D(x) \equiv 4x^3 + 3x^2 - 2x$;
d) $E(x) = x^9 - 3x^5 + 2x$ e $D(x) \equiv 2x^9 + 4x^2$.

B.21 Através do método de Descartes (coeficientes a determinar), obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $E(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a) $E(x) = 5x^4 + 9x^2 + 3x + 11$; $D(x) = x^2 + 2$;
b) $E(x) = 4x^3 + x^2 + 6x + 1$; $D(x) = x - 1$;
c) $E(x) \equiv 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x$; $D(x) = x^2 + 2x$;
d) $E(x) \equiv 2x^3 + 3x^2 - 14x$; $D(x) = x - 2$.

B.22 Através do método da chave, obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $E(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a) $E(x) = 3x^6 - 13x^5 + 8x^4 + 13x^3 - 8x^2 + 23x - 12$; $D(x) \equiv x^2 - 5x + 6$;
b) $E(x) = 2x^5 + 6x^4 + x^2 - 4x + 2$; $D(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 2$;
c) $E(x) = x^4 - 1$; $D(x) = x - 1$;
d) $E(x) = 8x^5 + 26x^4 + 17x^3 + 10x^2 + 10x - 3$; $D(x) \equiv 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 1$;
e) $E(x) = 9x^6 - 4x^4 - x^2 + 6x + 12$; $D(x) \equiv 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2$;
f) $E(x) \equiv x^5 + 1$; $D(x) \equiv x + 1$.

B.23 Sendo $P(x) \equiv x^5 + x^3 + 2x^2 - x + 1$, calcule:

a) $P(2)$; b) $P(-1)$; c) $P(0)$; d) $P(i)$.

B.24 Dado o polinômio $P(x) \equiv 2x^2 - 3x + 1$, calcule:

a) $P(-2)$; b) $P(1)$; c) $P(i)$; d) $P(i + 1)$.

B.25 Sendo $P(x) = ax^2 + bx + 3$, obtenha as constantes a e b, sabendo que $P(1) = 8$ e $P(-1) = 0$.

B.26 Dado o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$, obtenha as constantes a, b e c, sabendo que $P(0) = 1$, $P(2) = 3$ e $P(3) = 10$.

B.27 Calcule a soma dos coeficientes de cada um dos seguintes polinômios:

a) $P(x) = 6x^3 + 3x^2 - 2x + 5$;
b) $P(x) = (x^2 - 3x + 4)^5$;
c) $P(x) = (x^3 + 2x^2 - x - 3)^{48}$;
d) $P(x) \equiv (x^7 + 3x^2 - 5x - 1)^{10}$;
e) $P(x) = (x^3 + 2x^2 - 4x)^{41}$.

B.28 Determine as raízes de cada um dos seguintes polinômios:

a) $P(x) \equiv 3x^2 - 2x - 1$;
b) $P(x) \equiv x^2 + 1$;
c) $P(x) = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$;
d) $P(x) \equiv x^3 - 5x^2 + 6x$;
e) $P(x) \equiv x^2 + 2x + 2$;
f) $P(x) \equiv (x^2 - 7x + 12)^{38}$.

B.29 Se a soma dos coeficientes de um polinômio é igual a zero, então podemos afirmar que:

a) o polinômio é identicamente nulo.
b) o polinômio tem grau par.
c) o polinômio tem grau ímpar.
d) uma das raízes do polinômio é 1.
e) o termo independente do polinômio é zero.

B.30 Determine as constantes a e b em cada um dos seguintes casos:

a) $\dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{x+3} = \dfrac{3x}{x^2-9}$;

b) $\dfrac{a}{x-1} - \dfrac{b}{x+3} = \dfrac{2x+10}{x^2+2x-3}$.

B.31 Obtenha as constantes a, b e c em cada um dos seguintes casos:

a) $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} \equiv \frac{8x^2 - x - 1}{x^3 - x}$; b) $\frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} - \frac{c}{x+2} \equiv \frac{7x^2 + 8x - 20}{x^3 - 4x}$.

Exercícios complementares

C.1 Para que valores complexos de m o polinômio $P(x) = (m^3 - 1)x^5 + x^4 - 3x^2 + x - 5$ possui grau 4?

C.2 Dados os polinômios $P(x) = a^2x^3 + ax^2$ e $Q(x) \equiv ix^3 - bx^2$, obtenha os valores de a e b, sabendo que $P(x) = Q(x)$.

C.3 Sendo $A(x) \equiv ax^3 + bx^2 + x$, $B(x) = 3bx - 1$, $C(x) = x + 2$ e $D(x) = 3ax^4 + x^3 + 2bx^2 + 2$, obtenha as constantes a e b de modo que $A(x) \cdot B(x) + C(x) = D(x)$.

C.4 Os polinômios $A(x) \equiv ax^2 + b$ e $B(x) = 3ax^4 + 6x^2$ são tais que $[A(x)]^2 - 2A(x) \equiv B(x)$. Determine as constantes a e b.

C.5 Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são tais que $\partial P = n$ e $\partial Q = n + 1$. Qual é o grau do polinômio $P(x) - Q(x)$?

C.6 Sendo m, n, a, b e c constantes, obtenha a relação entre a, b e c de modo que se tenha $ax^2 + bx + c = (mx + n)^2$.

C.7 Sendo m, n e p constantes reais, determine p de modo que se tenha $8x^3 + 36x^2 + 54x + p \equiv (mx + n)^3$.

C.8 A soma dos coeficientes do polinômio $P(x) \equiv (x^4 + x^2 - x + 1)^n$ é 512. Determine o número natural n.

C.9 Determine o número natural n de modo que a soma dos coeficientes do polinômio $P(x) \equiv (2x^2 + 3x - 2)^n (x^4 + 2x)^{n+1}$ seja 243.

C.10 Qual é o polinômio de coeficiente dominante 2 e de menor grau possível cujas raízes são 1, 3 e 4? **Lembrete:** sendo n o grau de um polinômio $P(x)$, o coeficiente dominante de $P(x)$ é o coeficiente de x^n.

C.11 Qual é o polinômio unitário de menor grau possível cujas raízes são 1, i e $-i$? **Lembrete:** polinômio unitário é todo aquele cujo coeficiente dominante é igual a 1.

Questões dos vestibulares

Nota: em exames vestibulares alguns examinadores, com o objetivo de simplificar a notação, indicam que dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são idênticos simplesmente por $P(x) = Q(x)$, em vez $P(x) \equiv Q(x)$.

V.1 (U.E. Londrina-PR) Sendo f, g e h polinômios de grau 4, 6 e 3, respectivamente, o grau de $(f + g) \cdot h$ será:

a) 9. b) 10. c) 12. d) 18. e) 30.

V.2 (Cescem) Se os polinômios $f = 2x^3 - (p - 1)x + 2$ e $g = qx^3 + 2x + 2$ são idênticos, então o valor da expressão $p^2 + q^2$ é:

a) 13. b) 5. c) 3. d) 2. e) 1.

V.3 (Mackenzie-SP) Seja o polinômio $P(x) = 2x^4 - x^3 + 1$. O valor de $P(i^5)$ é:

a) $i + 3$. b) $i - 3$. c) $i - 2$. d) i. e) $2i$.

V.4 (ITA-SP) Dividindo o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ pelo polinômio $Q(x)$, obtemos o quociente $S(x) = 1 + x$ e o resto $R(x) = x + 1$. O polinômio $Q(x)$ satisfaz:

a) $Q(2) = 0$. b) $Q(3) = 0$. c) $Q(0) \neq 0$. d) $Q(1) \neq 0$. e) n.d.a.

V.5 (PUC-SP) Os valores de A e B tais que $\frac{1 + x}{x - x^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{1 - x}$ são, respectivamente:

a) 2 e 1. b) 3 e 2. c) 1 e 2. d) 2 e 3. e) 1 e 3.

V.6 (Fuvest-SP) Um polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ satisfaz as seguintes condições: $P(1) = 0$; $P(-x) + P(x) = 0$, qualquer que seja x real. Qual o valor de $P(2)$?

a) 2. b) 3. c) 4. d) 5. e) 6.

Capítulo 20

Generalidades sobre a divisão de um polinômio por um binômio do 1º grau

1. Teorema do resto

Seja a uma constante qualquer.
O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.

Demonstração

Sejam $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x - a$, respectivamente, ou seja:

$$P(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x) + R(x), \quad (\text{I})$$

com $\partial R < 1$ ou $R(x) \equiv 0$.

Note, portanto, que $R(x)$ é um polinômio constante. Fazendo $R(x) \equiv R$, a sentença (I) pode ser escrita como $P(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x) + R$.

Calculando $P(a)$, obtemos $P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R \therefore P(a) = R$.

Logo, o resto R da divisão é igual a $P(a)$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular o resto da divisão do polinômio $P(x) \equiv 3x^4 + 5x^2 - 3$ por $x - 2$.

Resolução

O teorema do resto nos garante que o resto R da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ é igual a $P(2)$. Assim, temos:

$$R = P(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^2 - 3 \therefore R = 25.$$

R.2 Calcular o resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3x - 1$ por $x + 1$.

Resolução

Observando que $x + 1 = x - (-1)$, temos, pelo teorema do resto, que o resto R da divisão do polinômio $P(x)$ por $x + 1$ é $P(-1)$. Assim, temos:

$$R = P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1 \therefore R = 0.$$

Note que, como o resto é zero, $P(x)$ é divisível por $x + 1$.

R.3 O resto da divisão do polinômio $P(x) \equiv 3x^2 - (3a + 1)x + a$ por $x - 3$ é igual a 8. Calcular o valor de a.

Resolução

O resto 8 da divisão de $P(x)$ por $x - 3$ é igual a $P(3)$, ou seja:

$$8 = P(3) \therefore 8 = 3 \cdot 3^2 - (3a + 1) \cdot 3 + a.$$

Logo, $8 = 27 - 9a - 3 + a \therefore 8a = 16 \therefore a = 2$.

R.4 Determinar o polinômio $P(x)$ do 2º grau que dividido por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$ apresenta restos iguais a 4, 7 e 14, respectivamente.

Resolução

Sendo $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, pelo teorema do resto, temos:

$$P(1) = 4 \Rightarrow a + b + c = 4;$$
$$P(2) = 7 \Rightarrow 4a + 2b + c = 7;$$
$$P(3) = 14 \Rightarrow 9a + 3b + c = 14.$$

Escalonando o sistema $\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 14, \end{cases}$ temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 14 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 0a - 2b - 3c = -9 \\ 0a - 6b - 8c = -22 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c = 4 \text{ (I)} \\ 0a - 2b - 3c = -9 \text{ (II)} \\ 0a + 0b + c = 5. \text{ (III)} \end{cases}$$

Substituindo $c = 5$ em (II), temos $-2b - 3 \cdot 5 = -9 \Rightarrow b = -3$.

Substituindo $b = -3$ e $c = 5$ em (I), temos $a - 3 + 5 = 4 \Rightarrow a = 2$.

Logo, $P(x) \equiv 2x^2 - 3x + 5$.

2. Teorema de D'Alembert

Seja a uma constante qualquer.
Um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de $P(x)$.

Demonstração

Por definição de raiz de um polinômio, temos que a é raiz de $P(x)$ se, e somente se, $P(a) = 0$. Mas, pelo teorema do resto, $P(a)$ é o resto R da divisão de $P(x)$ por $x - a$. Concluímos assim que:

$$a \text{ é raiz de } P(x) \Leftrightarrow R = 0$$

$$\therefore\ a \text{ é raiz de } P(x) \Leftrightarrow P(x) \text{ é divisível por } x - a.$$

(c.q.d.)

SPL/STOCK PHOTOS

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), matemático francês. Cientista mais influente da França em sua época, D'Alembert foi um dos que abriram caminho para a Revolução Francesa.

Exercícios resolvidos

R.5 Mostrar que $P(x) \equiv x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ é divisível por $x - 2$.

Resolução

Basta mostrar que $P(2)$ é igual a zero. Temos:

$$P(2) = 2^5 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 \ \therefore\ P(2) = 32 - 24 + 12 - 8 - 12 \ \therefore\ P(2) = 0.$$

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 2$.

R.6 Determinar a de modo que o polinômio $P(x) = 3x^2 - 7x + 2$ seja divisível por $x - a$.

Resolução

Pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $P(a) = 0$. Assim, temos:

$$3a^2 - 7a + 2 = 0 \;\therefore\; \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 \;\therefore\; a = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} \;\therefore\; a = 2 \text{ ou } a = \frac{1}{3}.$$

R.7 Para que valores de n, $n \in \mathbb{N}$, o polinômio $P(x) = x^n + 1$ é divisível por $x + 1$?

Resolução

Pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x + 1$ se, e somente se, $P(-1) = 0$. Assim, devemos ter:

$$(-1)^n + 1 = 0 \;\therefore\; (-1)^n = -1.$$

Sendo $n \in \mathbb{N}$, temos que essa igualdade ocorre se, e somente se, n é ímpar.

Logo, $P(x) \equiv x^n + 1$ é divisível por $x + 1$ se, e somente se, n é ímpar.

3. Dispositivo de Briot-Ruffini para a divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$

Para a obtenção do quociente e do resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$, em que a é uma constante qualquer, podemos usar o método de Descartes ou o método da chave. Porém, com o objetivo de facilitar essa operação, vamos apresentar um dispositivo prático conhecido como "dispositivo de Briot-Ruffini".

O dispositivo que apresentaremos pode ser compreendido com o auxílio do método de Descartes. Sejam, respectivamente, $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $E(x) \equiv e_4x^4 + e_3x^3 + e_2x^2 + e_1x + e_0$ por $x - a$.

$Q(x)$ deve ser um polinômio do 3º grau; e $R(x)$ deve ser um polinômio constante. Ou seja:

$$Q(x) \equiv q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0 \text{ e } R(x) = R.$$

Devemos ter:

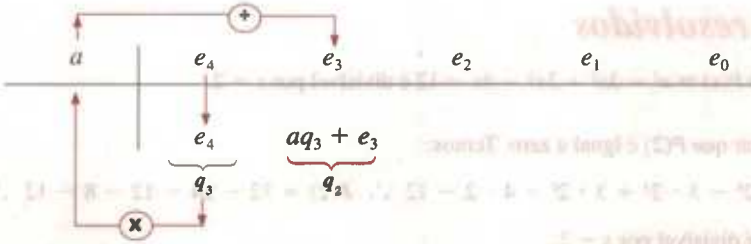
$$E(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x) + R$$
$$\therefore e_4x^4 + e_3x^3 + e_2x^2 + e_1x + e_0 = (x - a)(q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0) + R$$
$$\therefore e_4x^4 + e_3x^3 + e_2x^2 + e_1x + e_0 \equiv q_3x^4 + q_2x^3 + q_1x^2 + q_0x - aq_3x^3 - aq_2x^2 - aq_1x - aq_0 + R$$
$$\therefore e_4x^4 + e_3x^3 + e_2x^2 + e_1x + e_0 \equiv q_3x^4 + (q_2 - aq_3)x^3 + (q_1 - aq_2)x^2 + (q_0 - aq_1)x - aq_0 + R.$$

Logo, obtemos:

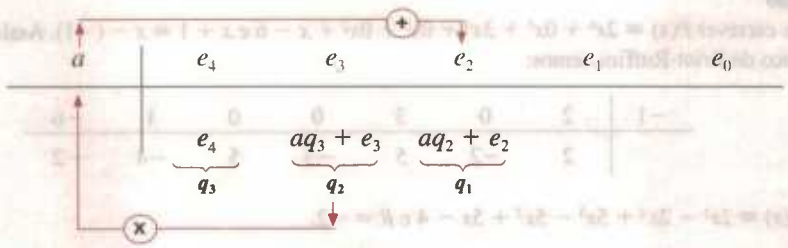
$$q_3 = e_4;$$
$$q_2 - aq_3 = e_3 \Rightarrow q_2 = e_3 + aq_3;$$
$$q_1 - aq_2 = e_2 \Rightarrow q_1 = e_2 + aq_2;$$
$$q_0 - aq_1 = e_1 \Rightarrow q_0 = e_1 + aq_1;$$
$$-aq_0 + R = e_0 \Rightarrow R = e_0 + aq_0.$$

Os valores q_3, q_2, q_1, q_0 e R podem ser calculados rapidamente, executando-se os passos descritos a seguir.

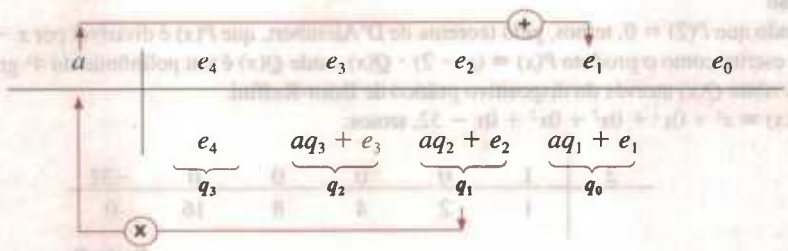
Primeiro passo



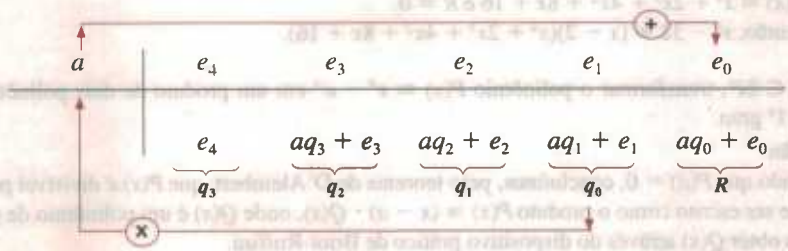
Segundo passo



Terceiro passo



Quarto passo



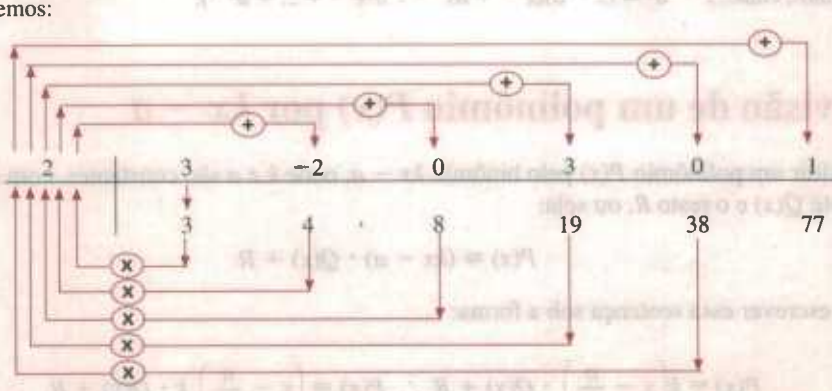
Pode-se generalizar esse método para qualquer polinômio $E(x)$ com grau maior ou igual a 1.

Exercícios resolvidos

R.8 Através do dispositivo prático de Briot-Ruffini, obter o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 1$ por $x - 2$.

Resolução

Podemos escrever $E(x) = 3x^5 - 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 1$. Assim, pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:



Logo, $Q(x) = 3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 19x + 38$ e $R = 77$.

R.9 Obter o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $P(x) \equiv 2x^6 + 3x^4 + x - 6$ por $x + 1$.

Resolução

Podemos escrever $P(x) = 2x^6 + 0x^5 + 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x - 6$ e $x + 1 \equiv x - (-1)$. Assim, pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

-1	2	0	3	0	0	1	-6
	2	-2	5	-5	5	-4	-2

Logo, $Q(x) \equiv 2x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 4$ e $R = -2$.

R.10 Transformar o polinômio $P(x) \equiv x^5 - 32$ em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 1º grau.

Resolução

Observando que $P(2) = 0$, temos, pelo teorema de D'Alembert, que $P(x)$ é divisível por $x - 2$. Assim, $P(x)$ pode ser escrito como o produto $P(x) \equiv (x - 2) \cdot Q(x)$, onde $Q(x)$ é um polinômio do 4º grau.

Podemos obter $Q(x)$ através do dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Como $P(x) \equiv x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 32$, temos:

2	1	0	0	0	0	-32
	1	2	4	8	16	0

Resto *R*

Logo, $Q(x) \equiv x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$ e $R = 0$.

Temos, então, $x^5 - 32 \equiv (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$.

R.11 Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, transformar o polinômio $P(x) \equiv x^n - a^n$ em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 1º grau.

Resolução

Observando que $P(a) = 0$, concluímos, pelo teorema de D'Alembert, que $P(x)$ é divisível por $x - a$. Logo, $P(x)$ pode ser escrito como o produto $P(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x)$, onde $Q(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Podemos obter $Q(x)$ através do dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Como $P(x) \equiv x^n + 0x^{n-1} + 0x^{n-2} + \ldots + 0x - a^n$, temos:

a	1	0	0	0	...	0	$-a^n$
	1	a	a^2	a^3	...	a^{n-1}	0

Resto *R*

Assim, $Q(x) \equiv x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$ e $R = 0$.

Temos, então, $x^n - a^n \equiv (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1})$.

4. Divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$

Ao dividir um polinômio $P(x)$ pelo binômio $kx - a$, onde k e a são constantes, com $k \neq 0$, obtemos o quociente $Q(x)$ e o resto R, ou seja:

$$P(x) \equiv (kx - a) \cdot Q(x) + R.$$

Podemos escrever essa sentença sob a forma:

$$P(x) \equiv k\left(x - \frac{a}{k}\right) \cdot Q(x) + R \;\therefore\; P(x) \equiv \left(x - \frac{a}{k}\right) k \cdot Q(x) + R.$$

Assim, observamos que o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x - \frac{a}{k}$ são, respectivamente, $k \cdot Q(x)$ e R. Assim, podemos estabelecer o seguinte:

Para a obtenção do quociente $Q(x)$ e do resto R da divisão de $P(x)$ por $kx - a$, podemos:

1º) dividir $P(x)$ por $x - \frac{a}{k}$, obtendo o quociente $Q_1(x) = k \cdot Q(x)$ e o resto R;

2º) dividir $Q_1(x)$ por k, obtendo assim $\frac{Q_1(x)}{k} = Q(x)$.

Exercícios resolvidos

R.12 Dividir o polinômio $P(x) \equiv 16x^4 - 8x^2 - 10x + 1$ por $2x - 3$.

Resolução

Temos que $2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Inicialmente, dividimos $P(x)$ por $x - \frac{3}{2}$, e o quociente obtido dividimos por 2.

Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x - \frac{3}{2}$, temos:

$\frac{3}{2}$	16	0	−8	−10	1
	16	24	28	32	49

Assim, o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $P(x)$ por $x - \frac{3}{2}$ são:

$$Q_1(x) = 16x^3 + 24x^2 + 28x + 32 \text{ e } R_1 = 49.$$

Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $P(x)$ por $2x - 3$ são:

$$Q(x) \equiv \frac{Q_1(x)}{2} = 8x^3 + 12x^2 + 14x + 16 \text{ e } R = R_1 = 49.$$

R.13 Dividir o polinômio $P(x) = 25x^3 + 5x^2 + 2x - 6$ por $5x + 2$.

Resolução

Temos que $5x + 2 = 5\left(x + \frac{2}{5}\right)$.

Inicialmente dividimos $P(x)$ por $x + \frac{2}{5}$, e o quociente obtido dividimos por 5.

Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x + \frac{2}{5}$, temos:

$-\frac{2}{5}$	25	5	2	−6
	25	−5	4	$-\frac{38}{5}$

Assim, o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $P(x)$ por $x + \frac{2}{5}$ são:

$$Q_1(x) \equiv 25x^2 - 5x + 4 \text{ e } R_1 = -\frac{38}{5}.$$

Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $P(x)$ por $5x + 2$ são:

$$Q(x) \equiv \frac{Q_1(x)}{5} = 5x^2 - x + \frac{4}{5} \text{ e } R = R_1 = -\frac{38}{5}.$$

R.14 Dividir o polinômio $P(x) \equiv x^5 - 2x^4 + x^3 - 6x - 2$ por $2 - x$.

Resolução

Temos que $2 - x \equiv -(x - 2)$.

Inicialmente, dividimos $P(x)$ por $x - 2$, e o quociente obtido dividimos por -1.

Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x - 2$, temos:

2	1	−2	1	0	−6	−2
	1	0	1	2	−2	−6

Assim, o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ são:

$$Q_1(x) \equiv x^4 + x^2 + 2x - 2 \text{ e } R_1 = -6.$$

Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $P(x)$ por $2 - x$ são:

$$Q(x) \equiv \frac{Q_1(x)}{-1} \equiv -x^4 - x^2 - 2x + 2 \text{ e } R = R_1 = -6.$$

4.1. Extensão do teorema do resto

Teorema

Sejam k e a constantes quaisquer, com $k \neq 0$.
O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$ é igual a $P\left(\frac{a}{k}\right)$.

Demonstração

Sejam $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $kx - a$, respectivamente, ou seja:

$$P(x) \equiv (kx - a) \cdot Q(x) + R(x), \quad \text{(I)}$$

com $\partial R < 1$ ou $R(x) \equiv 0$.

Note, portanto, que $R(x)$ é um polinômio constante. Fazendo $R(x) = R$, a sentença (I) pode ser escrita como:

$$P(x) \equiv (kx - a) \cdot Q(x) + R.$$

Calculando $P\left(\frac{a}{k}\right)$, obtemos:

$$P\left(\frac{a}{k}\right) = \left(k\frac{a}{k} - a\right) \cdot Q(a) + R \therefore P\left(\frac{a}{k}\right) = R.$$

Logo, o resto da divisão é igual a $P\left(\frac{a}{k}\right)$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.15 Calcular o resto da divisão do polinômio $P(x) \equiv 2x^4 - 3x + 1$ por $2x - 1$.

Resolução

A raiz do binômio $2x - 1$ é $\frac{1}{2}$.

Pela extensão do teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $2x - 1$ é $P\left(\frac{1}{2}\right)$, ou seja:

$$R = P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \therefore R = P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}.$$

R.16 Obter o resto da divisão do polinômio $P(x) = 6x^7 + 8x^5 + 3x^4 - 2x + 9$ por $5x$.

Resolução

A raiz do polinômio $5x$ é 0.

Pela extensão do teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $5x$ é $P(0)$, ou seja:

$$R = P(0) = 6 \cdot 0^7 + 8 \cdot 0^5 + 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0 + 9 \therefore R = P(0) = 9.$$

R.17 Determinar o polinômio do 2º grau que dividido por $3x$, $2x + 1$ e $3x - 2$ apresenta restos iguais a 3, $\frac{19}{4}$ e 3, respectivamente.

Resolução

Sendo $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, temos, pela ampliação do teorema do resto, que:

$$P(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3;$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{4} \Rightarrow a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) + c = \frac{19}{4}; \quad P\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \Rightarrow a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + b\left(\frac{2}{3}\right) + c = 3.$$

Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} c = 3 \\ \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = \frac{19}{4} \\ \frac{4a}{9} + \frac{2b}{3} + c = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} c = 3 \quad \text{(I)} \\ a - 2b + 4c = 19 \quad \text{(II)} \\ 4a + 6b + 9c = 27. \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II) e em (III), obtemos:

$$\begin{cases} c = 3 \\ a - 2b + 12 = 19 \\ 4a + 6b + 27 = 27 \end{cases} \sim \begin{cases} c = 3 \\ a - 2b = 7 \quad \xrightarrow{\times\,(-4)} \\ 4a + 6b = 0 \quad \xrightarrow{+} \end{cases} \sim \begin{cases} c = 3 \\ a - 2b = 7 \\ 0a + 14b = -28 \Rightarrow b = -2. \end{cases}$$

Substituindo $b = -2$ em $a - 2b = 7$, obtemos $a - 2(-2) = 7 \Rightarrow a = 3$.

Logo, $P(x) = 3x^2 - 2x + 3$.

4.2. Extensão do teorema de D'Alembert

Teorema

Sejam k e a constantes quaisquer, com $k \neq 0$.
Um polinômio $P(x)$ é divisível por $kx - a$, se, e somente se, $P\left(\frac{a}{k}\right) = 0$.

Deixamos como exercício a demonstração desse teorema.

Exercícios resolvidos

R.18 Mostrar que $P(x) \equiv 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ é divisível por $3x - 1$.

Resolução

A raiz do binômio $3x - 1$ é $\frac{1}{3}$.

Para mostrar que $P(x)$ é divisível por $3x - 1$, basta verificarmos que $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.
Temos:

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right) - 1 \therefore P\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{27} - 4 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{3} - 1$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - 1 \therefore P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} + \frac{12}{9} - \frac{9}{9} \therefore P\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

Logo, $P(x)$ é divisível por $3x - 1$.

R.19 Determinar a de modo que o polinômio $P(x) \equiv x^3 - ax^2 + (a + 1)x + 2$ seja divisível por $2x + 1$.

Resolução

A raiz do binômio $2x + 1$ é $-\frac{1}{2}$.

$P(x)$ é divisível por $2x + 1$ se, e somente se, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.
Assim, temos:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (a + 1)\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 0 \therefore -\frac{1}{8} - \frac{a}{4} - \frac{a}{2} - \frac{1}{2} + 2 = 0.$$

Multiplicando por 8 ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$-1 - 2a - 4a - 4 + 16 = 0 \therefore -6a = -11 \therefore a = \frac{11}{6}.$$

5. Divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x - a)(x - b)$

Teorema

Sejam a e b constantes quaisquer, com $a \neq b$. Um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$ se, e somente se, $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

Demonstração

Primeira parte: demonstraremos que, se $P(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$, com $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$.

Sendo $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - a)(x - b)$, respectivamente, temos que $\partial R < 2$ ou $R(x) \equiv 0$. Assim, podemos escrever: $P(x) \equiv (x - a)(x - b) \cdot Q(x) + \underbrace{cx + d}_{R(x)}$.

Por hipótese, $P(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$; logo, temos:

$$P(a) = 0 \Rightarrow (a - a)(a - b) \cdot Q(a) + ca + d = 0 \text{ e } P(b) = 0 \Rightarrow (b - a)(b - b) \cdot Q(b) + cb + d = 0$$

$$\therefore \begin{cases} ca + d = 0 & \text{(I)} \\ cb + d = 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraímos membro a membro (I) e (II): $ca - cb = 0 \Rightarrow c(a - b) = 0$.
Como $a \neq b$, concluímos que $c = 0$.
Substituímos $c = 0$ em (I): $0 \cdot a + d = 0 \Rightarrow d = 0$.
Assim, obtemos $R(x) \equiv 0x + 0 \Rightarrow R(x) \equiv 0$.
Logo, $P(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$.

Segunda parte: demonstraremos que, se $P(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$, então $P(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$.

Sendo $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - a)(x - b)$, temos que $R(x) \equiv 0$, pois, por hipótese, $P(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$. Assim, podemos escrever:

$$P(x) \equiv (x - a)(x - b) \cdot Q(x).$$

Observando que $P(a) = (a - a)(a - b) \cdot Q(a) = 0$ e $P(b) = (b - a)(b - b) \cdot Q(b) = 0$, concluímos, pelo teorema de D'Alembert, que $P(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$.

(c.q.d.)

Nota: observe que para a demonstração da segunda parte desse teorema não é necessária a condição $a \neq b$.

Exercícios resolvidos

R.20 Para que valores de m e n o polinômio $P(x) = x^5 - mx^4 + nx^3 - 2x^2 + 10x - 12$ é divisível por $(x - 2)(x - 3)$?

Resolução

Pelo teorema anterior, temos que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)(x - 3)$ se, e somente se, $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e por $x - 3$. Assim, pelo teorema de D'Alembert, devemos ter:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 2^5 - m \cdot 2^4 + n \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 12 = 0 \text{ e}$$
$$P(3) = 0 \Rightarrow 3^5 - m \cdot 3^4 + n \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 - 12 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} 32 - 16m + 8n - 8 + 20 - 12 = 0 \\ 243 - 81m + 27n - 18 + 30 - 12 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 16m - 8n = 32 \\ 81m - 27n = 243 \end{cases} \therefore \begin{cases} 2m - n = 4 \text{ (I)} \\ 3m - n = 9. \text{ (II)} \end{cases}$$

Subtraímos membro a membro (I) e (II): $-m = -5 \Rightarrow m = 5$.
Substituindo $m = 5$ em (I), temos $2 \cdot 5 - n = 4 \Rightarrow n = 6$.
Logo, $m = 5$ e $n = 6$.

R.21 Obter os valores de a e b, sabendo que o polinômio $P(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx - 18$ é divisível por $D(x) \equiv x^2 - 9$.

Resolução

O polinômio $D(x)$ pode ser escrito sob a forma $D(x) \equiv (x - 3)(x + 3)$.
Pelo teorema anterior, temos que $P(x)$ é divisível por $(x - 3)(x + 3)$ se, e somente se, $P(x)$ é divisível por $x - 3$ e por $x + 3$.
Assim, pelo teorema de D'Alembert, podemos afirmar que:

$$P(3) = 0 \Rightarrow 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 18 = 0 \text{ e}$$
$$P(-3) = 0 \Rightarrow (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) - 18 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} 27 + 9a + 3b - 18 = 0 \\ -27 + 9a - 3b - 18 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 9a + 3b = -9 \text{ (I)} \\ 9a - 3b = 45. \text{ (II)} \end{cases}$$

Somamos membro a membro (I) e (II): $18a = 36 \Rightarrow a = 2$.
Substituindo $a = 2$ em (I), obtemos $9 \cdot 2 + 3b = -9 \Rightarrow b = -9$.
Logo, $a = 2$ e $b = -9$.

R.22 Determinar os valores de a e b, sabendo que o polinômio $P(x) \equiv x^4 - ax^3 + bx^2 + ax - 8$ é divisível por $D(x) \equiv x^2 - 6x + 8$.

Resolução

O polinômio $D(x)$ pode ser escrito na forma fatorada, ou seja, $D(x) \equiv (x - 2)(x - 4)$.

Pelo teorema anterior, $P(x)$ é divisível por $(x - 2)(x - 4)$ se, e somente se, $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e por $x - 4$.

Assim, pelo teorema de D'Alembert, podemos afirmar que:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 2^4 - a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + a \cdot 2 - 8 = 0 \text{ e}$$
$$P(4) = 0 \Rightarrow 4^4 - a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + a \cdot 4 - 8 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} 16 - 8a + 4b + 2a - 8 = 0 \\ 256 - 64a + 16b + 4a - 8 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 6a - 4b = 8 \\ 60a - 16b = 248 \end{cases} \therefore \begin{cases} 6a - 4b = 8 \text{ (I)} \\ 15a - 4b = 62. \text{ (II)} \end{cases}$$

Subtraímos membro a membro (I) e (II): $-9a = -54 \Rightarrow a = 6$.

Substituindo $a = 6$ em (I), obtemos $6 \cdot 6 - 4b = 8 \Rightarrow b = 7$.

Logo, $a = 6$ e $b = 7$.

R.23 Encontrar as constantes a e b de modo que o polinômio $P(x) \equiv x^3 - ax^2 + bx - 3$ seja divisível por $D(x) \equiv x^2 + 1$.

Resolução

Observando que $D(x) \equiv x^2 - i^2$, podemos escrever $D(x) \equiv (x - i)(x + i)$.

O polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - i)(x + i)$ se, e somente se, $P(x)$ é divisível por $x - i$ e por $x + i$.

Pelo teorema de D'Alembert, devemos ter:

$$P(i) = 0 \Rightarrow i^3 - ai^2 + bi - 3 = 0 \text{ e}$$
$$P(-i) = 0 \Rightarrow (-i)^3 - a(-i)^2 + b(-i) - 3 = 0$$

$$\therefore \begin{cases} -i + a + bi - 3 = 0 \text{ (I)} \\ i + a - bi - 3 = 0. \text{ (II)} \end{cases}$$

Somamos membro a membro (I) e (II): $2a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3$.

Substituindo $a = 3$ em (I), obtemos $-i + 3 + bi - 3 = 0 \Rightarrow bi = i \therefore b = 1$.

Logo, $a = 3$ e $b = 1$.

R.24 Determinar as constantes a e b sabendo que o polinômio $P(x) \equiv x^4 - ax^3 + bx^2 + 4x - 4$ é divisível por $D(x) \equiv x^2 - 4x + 4$.

Resolução

O polinômio $D(x)$ pode ser escrito sob a forma $D(x) = (x - 2)^2$, ou, ainda, $D(x) = (x - 2)(x - 2)$.

Concluímos, então, que $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e, portanto:

$$P(2) = 0 \Rightarrow 2^4 - a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 4 = 0 \therefore 8a - 4b = 20 \therefore 2a - b = 5. \text{ (I)}$$

Note, porém, que essa condição nos garante apenas que $P(x)$ tem um fator igual a $x - 2$, isto é:

$$P(x) \equiv (x - 2) \cdot Q(x). \text{ (II)}$$

Para garantir que existe um outro fator $x - 2$ na fatoração de $P(x)$, isto é, $P(x) \equiv (x - 2)^2 \cdot Q_1(x)$, basta impormos que, em (II), $Q(x)$ seja divisível por $x - 2$, ou seja, $Q(2) = 0$.

Para obter $Q(x)$, dividimos $P(x)$ por $x - 2$:

2	1	$-a$	b	4	-4
	1	$2 - a$	$4 - 2a + b$	$12 - 4a + 2b$	$\underbrace{20 - 8a + 4b}_{\text{Resto } R}$

Temos $Q(x) \equiv x^3 + (2 - a)x^2 + (4 - 2a + b)x + 12 - 4a + 2b$ e o resto $R = 20 - 8a + 4b$.

Logo, obtemos:

$Q(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + (2 - a) \cdot 2^2 + (4 - 2a + b) \cdot 2 + 12 - 4a + 2b = 0$

$\therefore 8 + (2 - a) \cdot 4 + (4 - 2a + b) \cdot 2 + 12 - 4a + 2b = 0 \therefore -12a + 4b + 36 = 0 \therefore 3a - b = 9$. **(III)**

Com as equações (I) e (III), formamos o sistema $\begin{cases} 2a - b = 5 \\ 3a - b = 9, \end{cases}$ cuja solução é $a = 4$ e $b = 3$.

Nota: ganharíamos tempo se, de início, dividíssemos $P(x)$ por $x - 2$, fazendo $Q(2) = 0$ e $R = 20 - 8a + 4b = 0$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2, B.4, B.6, B.9 (a, b), B.10, B.12, B.13, B.14 (a, b, c), B.15 (a, b), B.16, B.18, B.20, B.22, B.24, B.26, B.27, C.5, C.6.

Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d, e), B.3, B.5, B.7, B.8, B.9 (c, d, e), B.11, B.14 (d, e, f), B.15 (c, d, e), B.17, B.19, B.21, B.23, B.25, B.28, C.1, C.2, C.3, C.4, C.7, C.8, C.9.

Exercícios básicos

B.1 Calcule o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$; $D(x) = x - 2$;

b) $P(x) = x^3 + 6x^2 - 5x - 10$; $D(x) = x + 1$;

c) $P(x) = 32x^4 - 8x^3 + x^2 - 1$; $D(x) = x - \frac{1}{2}$;

d) $P(x) = 5x^8 - 3x^7 + 6x - 4$; $D(x) = x + 1$;

e) $P(x) = 7x^5 + 6x^3 + 9x - 2$; $D(x) = x$.

B.2 O resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 + (m + 1)x^2 + 2mx + 5$ por $x - 2$ é igual a 3. Determine a constante m.

B.3 Sabendo que o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 7$ por $x - a$ é igual a 1, obtenha o valor da constante a.

B.4 Qual é o polinômio do 2º grau que dividido por $x - 2$, $x - 3$ e $x - 4$ apresenta restos 3, 10 e 21, respectivamente?

B.5 Determine o polinômio do 2º grau que dividido por x, $x - 1$ e $x + 1$ apresenta restos iguais a -1, 0 e 4, respectivamente.

B.6 O polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ é divisível por $x - 1$ e por $x - 2$. Obtenha os valores das constantes a e b.

B.7 Um polinômio unitário $P(x)$, do 2º grau, é divisível por $x - 1$ e por $x - \frac{1}{2}$. Qual é esse polinômio?

B.8 Para que valores de n, $n \in \mathbb{N}$, o polinômio $P(x) = x^n - 1$ é divisível por $x - 1$?

B.9 Através do dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $D(x)$, nos seguintes casos:

a) $E(x) = 6x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 2$; $D(x) = x - 2$;

b) $E(x) = 2x^5 + x^3 - 3x + 1$; $D(x) = x + 1$;

c) $E(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 3$; $D(x) = x - 3$;

d) $E(x) = x^4 + x - 1$; $D(x) = x + \frac{1}{2}$;

e) $E(x) = x^6 - 1$; $D(x) = x - 1$.

B.10 Transforme o polinômio $P(x) = x^5 - 1$ em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 1º grau.

B.11 Dado o polinômio $P(x) = x^7 + 1$, transforme-o em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 6º grau.

B.12 Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, transforme o polinômio $P(x) \equiv x^n - 1$ em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 1º grau.

B.13 Dividindo um polinômio $P(x)$ por $x - 3$, obtêm-se o quociente $Q(x) \equiv 6x^2 + 8x - 1$ e o resto $R = 5$. Obtenha o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $P(x)$ por $2x - 6$.

B.14 Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a) $E(x) \equiv x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$; $D(x) \equiv 3x - 3$;
b) $E(x) \equiv 6x^3 + 2x + 2$; $D(x) \equiv 2x - 1$;
c) $E(x) \equiv x^6 - 1$; $D(x) \equiv 2 - x$;
d) $E(x) \equiv 2x^4 + 3x^2 - x + 2$; $D(x) \equiv 2x - 4$;
e) $E(x) \equiv 32x^5 + 2x^2 - x - 1$; $D(x) \equiv 2x + 1$;
f) $E(x) \equiv 4x^3 - 2x^2 + x - 5$; $D(x) \equiv 1 - 2x$.

B.15 Calcule o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a) $P(x) \equiv 9x^3 - 3x^2 + 1$; $D(x) \equiv 3x - 1$;
b) $P(x) \equiv 16x^4 - 2x - 3$; $D(x) \equiv 2x + 1$;
c) $P(x) \equiv 4x^3 - x^2 - x + 1$; $D(x) \equiv 2x - 3$;
d) $P(x) \equiv 16x^5 - x^3 + x$; $D(x) \equiv 1 - 2x$;
e) $P(x) \equiv x^6 + 3x^4 + x^3 - 3$; $D(x) \equiv 6x$.

B.16 Obtenha o polinômio do 2º grau que, dividido por $5x$, $3x - 1$ e $2 - x$, apresenta restos iguais a 1, 3 e 43, respectivamente.

B.17 Dividindo um polinômio $P(x)$ do 2º grau por $6x$, $x - 1$ e $2x - 1$, obtêm-se restos iguais a R_1, R_2 e R_3, respectivamente, tal que $R_2 = 6R_1$, $R_3 = 3R_1$ e $R_2 = 3 + R_3$. Determine $P(x)$.

B.18 Determine a constante a de modo que o polinômio $P(x) = 9x^3 + (a + 1)x^2 - ax + 1$ seja divisível por $3x - 1$.

B.19 Para que valor de m o polinômio $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - (m^2 - 1)x - m$ é divisível por $4x - 8$?

B.20 Obtenha os valores de m e n para que o polinômio $P(x) \equiv x^4 - mx^3 + nx^2 - mx + 12$ seja divisível por $(x - 1)(x - 2)$.

B.21 Sabendo que o polinômio $P(x) \equiv x^3 + (a + 2)x^2 - bx - 15$ é divisível por $(x + 1)(x - 3)$, obtenha os valores das constantes a e b.

B.22 Determine os valores das constantes a e b, sabendo que o polinômio $P(x) \equiv x^5 + ax^3 + x^2 + bx + b$ é divisível por $x^2 - 4$.

B.23 O polinômio $P(x) \equiv x^4 + ax^3 - 7x^2 + ax + b$ é divisível por $x^2 - 1$. Obtenha os valores das constantes a e b.

B.24 O polinômio $P(x) \equiv x^4 + x^3 + (a + 2)x^2 + bx + 6$ é divisível por $x^2 + x - 6$. Encontre os valores das constantes a e b.

B.25 Para que valores das constantes m e n o polinômio $P(x) \equiv x^3 - (m + n)x^2 + 3x + 2m + n$ é divisível por $x^2 - 7x + 10$?

B.26 Sabendo que o polinômio $P(x) \equiv x^4 - ax^3 + bx^2 - 3x + 1$ é divisível por $x^2 + 1$, obtenha os valores das constantes a e b.

B.27 O polinômio $P(x) \equiv x^3 - (a + b)x^2 + ax + 9$ é divisível por $x^2 - 6x + 9$. Determine os valores de a e b.

B.28 Obtenha os valores das constantes a e b para que o polinômio $P(x) \equiv x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1$ seja divisível por $x^2 + 2x + 1$.

Exercícios complementares

C.1 Dividindo um polinômio $P(x)$ por $x - 2$, obtém-se resto 7; dividindo $P(x)$ por $x + 2$, obtém-se resto -33. Qual é o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 4$?

Sugestão: $P(2) = 7$, $P(-2) = -33$ e $P(x) \equiv (x^2 - 4) \cdot Q(x) + \underbrace{ax + b}_{\text{Resto}}$.

C.2 Dividindo um polinômio $P(x)$ por $2x - 1$ e por $x - 1$, obtêm-se restos 5 e 17, respectivamente. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(2x - 1)(x - 1)$.

C.3 Um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - 3$. O quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 + 1$ são $x - 3$ e $R(x)$, respectivamente. Determine $P(x)$ sabendo que $R(2) = -4$.

C.4 Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são tais que $P(x - 3) = Q(x)$ e $Q(4) = 0$. Nessas condições, pode-se afirmar que:

a) $P(x)$ é divisível por $x - 4$.
b) $P(x)$ é divisível por $x - 3$.
c) $P(x)$ é divisível por x.
d) $P(x)$ é divisível por $x - 1$.
e) $P(x)$ é divisível por $x - 2$.

C.5 Demonstre que, se um polinômio $P(x)$ é divisível pelo produto de n polinômios do 1º grau: $(k_1x + a_1)(k_2x + a_2)(k_3x + a_3) + \ldots + (k_nx + a_n)$, então $P(x)$ é divisível por qualquer um dos fatores $k_jx + a_j$, $1 \leq j \leq n$.

C.6 O polinômio $P(x) = 6x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 2$ é divisível por $(2x - 1)(x + 1)(x - 1)$. Determine as constantes a, b e c.

C.7 Sabendo que o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 - x^2 + c$ é divisível por $(x - 1)^3$, obtenha as constantes a, b e c.

C.8 Dividindo um polinômio $P(x)$ por $x - 3$, obtêm-se o quociente $Q_1(x)$ e o resto $R_1 = 5$. Dividindo $Q_1(x)$ por $2x - 4$, obtém-se resto 8. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 3)(2x - 4)$.

C.9 Dividindo um polinômio $P(x)$ por $(x - 3)(x - 2)$, obtém-se resto $2x + 9$. Qual é o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 3$?

Questões dos vestibulares

V.1 (Mackenzie-SP) O resto da divisão de $kx^2 + x - 1$ por $x + 2k$, onde k é uma constante não-nula, é:

a) $-2k - 1$.
b) $k - 1$.
c) $4k^2 - 2k - 1$.
d) $k^3 - k - 1$.
e) $4k^3 - 2k - 1$.

V.2 (F. M. Santa Casa-SP) Dividindo um polinômio f por $g = (x - 1)(x + 2)$, obtém-se resto $2x - 1$. O resto da divisão de f por $x + 2$ é:

a) 3. b) 1. c) -3. d) -5. e) $x - 1$.

V.3 (ITA-SP) Os valores reais de a e b, tais que os polinômios $x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$ e $x^3 - (a + 2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $x + 1$, são:

a) dois números inteiros positivos.
b) dois números inteiros negativos.
c) números inteiros, sendo que um deles é positivo e o outro é negativo.
d) dois números reais, sendo um racional e o outro irracional.
e) nenhuma das respostas anteriores.

V.4 (U. F. Uberlândia-MG) O resto da divisão de $x + 5x^5 + 9x^9 + 13x^{13} + \ldots + 797x^{797}$ por $x - 1$ é:

a) 39500. b) 79800. c) 95200. d) 102300. e) 108200.

V.5 (UFMG) Considere o polinômio $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$, em que a e b são números reais. Se $f(x) + 1$ é divisível por $x + 1$ e $f(x) - 1$ é divisível por $x - 1$, pode-se afirmar que os valores de a e b são, respectivamente:

a) 0 e 3. b) -2 e -3. c) -1 e -4. d) -1 e -2. e) 0 e -3.

Capítulo 21
Equações polinomiais

1. Definição

Equação polinomial é toda equação que pode ser apresentada sob a forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0,$$

em que $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$ é um polinômio de grau n, $n \geq 1$.

- Uma equação polinomial pode ser também denominada **equação algébrica**.
- O grau do polinômio $P(x)$ é também o **grau da equação polinomial** $P(x) = 0$.
- As raízes do polinômio $P(x)$ são também as **raízes da equação polinomial** $P(x) = 0$.
- O conjunto formado pelas raízes da equação polinomial $P(x) = 0$ é o **conjunto solução** (S) ou **conjunto verdade** (V) da equação.

Exemplos

a) $2x - 6 = 0$ é uma equação polinomial do 1º grau na variável x, cuja raiz é 3. O conjunto solução dessa equação é $S = \{3\}$.

b) A equação $x^2 - 3x + 8 = 2x + 2$ pode ser apresentada sob a forma $x^2 - 5x + 6 = 0$ e, portanto, é uma equação polinomial do 2º grau na variável x. Suas raízes são 2 e 3 e, por isso, seu conjunto solução é $S = \{2, 3\}$.

c) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ é uma equação polinomial do 3º grau na variável x. Para determinarmos suas raízes podemos fatorar o primeiro membro, ou seja, $x^2(x - 2) + (x - 2) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 + 1) = 0$.

Pela propriedade do **produto nulo**, concluímos que:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \therefore x = i \text{ ou } x = -i.$$

Assim, as raízes da equação são 2, i e $-i$. Temos, então, como conjunto solução $S = \{2, i, -i\}$.

Exercícios resolvidos

R.1 Uma das raízes da equação polinomial $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ é o número 1. Obter as outras raízes em $\mathbb{C}$.

Resolução

Temos que 1 é raiz do polinômio $P(x) \equiv x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, ou seja, $P(1) = 0$.

Pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x - 1$. Portanto $P(x)$ pode ser escrito como:

$$P(x) \equiv (x - 1) \cdot Q(x).$$

Para obter $Q(x)$, basta dividirmos $P(x)$ por $x - 1$. Por Briot-Ruffini, temos:

1	1	−6	11	−6
	1	−5	6	0

Logo, $Q(x) \equiv x^2 - 5x + 6$ e, portanto, $P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.
Assim, a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ é equivalente a $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$.
Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \therefore x = 3 \text{ ou } x = 2.$$

Concluímos assim que, além da raiz 1, a equação tem como raízes os números 3 e 2.

R.2 Obter, em $\mathbb{C}$, o conjunto solução da equação $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são 2 e 3.

Resolução

Temos que 2 e 3 são raízes do polinômio $P(x) \equiv x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$, ou seja, $P(2) = 0$ e $P(3) = 0$.
Pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e por $x - 3$. Portanto $P(x)$ é divisível por $(x - 2)(x - 3)$.
Assim, $P(x)$ pode ser escrito sob a forma $P(x) = (x - 2)\underbrace{(x - 3) \cdot Q_2(x)}_{Q_1(x)}$.

Para obtermos $Q_1(x)$, dividimos $P(x)$ por $x - 2$:

2	1	−4	−1	16	−12
	1	−2	−5	6	0

Logo, $Q_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
Para obter $Q_2(x)$, dividimos $Q_1(x)$ por $x - 3$:

3	1	−2	−5	6
	1	1	−2	0

Logo, $Q_2(x) \equiv x^2 + x - 2$.
Concluímos, então, que o polinômio $P(x)$ pode ser escrito como $P(x) \equiv (x - 2)(x - 3)(x^2 + x - 2)$.
Portanto a equação $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$ é equivalente a $(x - 2)(x - 3)(x^2 + x - 2) = 0$.
Pela propriedade do produto nulo, temos que:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1(-2) = 9 \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \therefore x = 1 \text{ ou } x = -2.$$

O conjunto solução da equação é $S = \{1, 3, -2, 2\}$.

2. Teorema fundamental da álgebra

O estudo das equações polinomiais é alicerçado no **teorema fundamental da álgebra**, cujo enunciado é:

Toda equação polinomial de grau n, $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração desse teorema foi a tese de doutoramento de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) no ano de 1798. Embora outros matemáticos já tivessem tentado essa demonstração, Gauss foi o primeiro a realizá-la com perfeição.

Admitiremos o teorema fundamental da álgebra sem demonstração.

Cálculo diferencial.

SPL/STOCK PHOTOS

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemão. Poucos estudiosos se destacaram em tantos ramos da matemática como ele. Gauss produziu sua primeira grande obra matemática aos 16 anos de idade.

3. Teorema da decomposição

Uma conseqüência imediata do teorema fundamental da álgebra é o **teorema da decomposição**, que nos garante:

Todo polinômio de grau n, $n \geq 1$:
$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, pode ser fatorado sob a forma:

$$P(x) \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n),$$

em que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

Demonstração

Seja $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ um polinômio de grau n, $n \geq 1$.
Pelo teorema fundamental da álgebra, $P(x)$ admite uma raiz complexa r_1. Logo, podemos escrever:

$$P(x) \equiv (x - r_1) \cdot Q_1(x), \quad \text{(I)}$$

onde $Q_1(x)$ tem grau $n - 1$.

Se $n - 1 \geq 1$, então, pelo teorema fundamental da álgebra, $Q_1(x)$ admite uma raiz complexa r_2 e podemos escrever: $Q_1(x) \equiv (x - r_2) \cdot Q_2(x)$. **(II)**
Substituindo (II) em (I), tem-se $P(x) \equiv (x - r_1)(x - r_2) \cdot Q_2(x)$.
Repetindo esse procedimento n vezes, obtém-se $P(x) \equiv (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) \cdot Q_n(x)$.
Por definição de identidade de polinômios, temos que o coeficiente dominante a_n de $P(x)$ deve ser igual a $Q_n(x)$. Logo $P(x) \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$.

(c.q.d.)

Nota: a decomposição de um polinômio como o produto de uma constante por polinômios unitários do 1º grau é única, exceto quanto à ordem dos fatores.

Exercícios resolvidos

R.3 Fatorar o polinômio $P(x) \equiv 2x^2 - 7x + 3$ como o produto de uma constante por polinômios do 1º grau.

Resolução

As raízes de $P(x)$ são dadas por $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Temos:

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 \therefore x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \therefore x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

Pelo teorema da decomposição, obtemos $P(x) \equiv 2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

R.4 Uma das raízes do polinômio $P(x) \equiv 3x^3 - 22x^2 + 37x - 10$ é o número 5. Fatorar o polinômio $P(x)$ como o produto de uma constante por polinômios do 1º grau.

Resolução

Como 5 é raiz de $P(x)$, temos que $P(x)$ é divisível por $x - 5$, ou seja, $P(x) = (x - 5) \cdot Q(x)$.
Obtém-se $Q(x)$ dividindo-se $P(x)$ por $x - 5$. Por Briot-Ruffini, obtemos:

5	3	−22	37	−10
	3	−7	2	0

Logo, $Q(x) \equiv 3x^2 - 7x + 2$ e, portanto, $P(x) = (x - 5)(3x^2 - 7x + 2)$.
As raízes de $Q(x)$ são dadas por $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Portanto temos:

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 \therefore x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} \therefore x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{3}.$$

Assim, pelo teorema da decomposição, podemos escrever:

$$Q(x) \equiv 3(x - 2)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Finalmente, concluímos que $P(x) = (x - 5)3(x - 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) \therefore P(x) \equiv 3(x - 5)(x - 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

3.1. Conseqüência do teorema da decomposição

Consideremos a equação polinomial na variável x:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0,$$

de grau n, $n \geq 1$. Pelo teorema da decomposição, essa equação pode ser apresentada sob a forma:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) = 0.$$

Temos, então, que r_1, r_2, r_3, ..., r_n são todas as raízes dessa equação.

Assim sendo, podemos concluir o seguinte:

> Uma equação polinomial de grau n admite exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas entre si.

3.2. Multiplicidade de uma raiz

Seja a equação polinomial de grau n, variável x e raízes r_1, r_2, r_3, ..., r_n:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) = 0.$$

• Se uma raiz r_j comparece uma única vez dentre os fatores do primeiro membro, então r_j é chamada de "**raiz simples** da equação".

• Se uma raiz r_j comparece k vezes, $k > 1$, dentre os fatores do primeiro membro, então r_j é chamada de "**raiz de multiplicidade k** da equação".

Exemplo

A equação $(x - 2)^3(x - 5)(x - 4)^2 = 0$ pode ser escrita como:

$$(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 5)(x - 4)(x - 4) = 0.$$

Assim, temos que:

- a raiz 2 tem multiplicidade 3, ou podemos dizer ainda que 2 é **raiz tripla** da equação;
- o número 5 é **raiz simples** da equação;
- a raiz 4 tem multiplicidade 2, ou podemos dizer ainda que 4 é **raiz dupla** da equação.

Exercícios resolvidos

R.5 Qual é o grau de uma equação polinomial $P(x) = 0$ cujo conjunto solução é $S = \{2, 5, 9\}$ tal que 2 é raiz simples, 5 é raiz tripla e 9 é raiz dupla da equação?

Resolução

Pelo teorema da decomposição, toda equação polinomial de grau n, $n \geq 1$, pode ser apresentada sob a forma $a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) = 0$, em que a_n é o coeficiente dominante de $P(x)$ e $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

Nesse problema, temos que:

- $S = \{2, 5, 9\}$ é o conjunto solução de $P(x) = 0$;
- 2 é raiz simples da equação, isto é, 2 deve comparecer uma única vez na decomposição de $P(x)$;
- 5 é raiz tripla da equação, isto é, 5 deve comparecer exatamente três vezes na decomposição de $P(x)$;
- 9 é raiz dupla da equação, isto é, 9 deve comparecer exatamente duas vezes na decomposição de $P(x)$.

Nessas condições, temos que:

$$P(x) = 0 \Rightarrow k(x - 2)(x - 5)(x - 5)(x - 5)(x - 9)(x - 9) = 0$$
$$\therefore k(x - 2)(x - 5)^3(x - 9)^2 = 0, \text{ onde } k \text{ é o coeficiente dominante de } P(x).$$

Logo, o grau da equação é $1 + 3 + 2 = 6$.

R.6 Construir a equação polinomial $P(x) = 0$, cujo conjunto solução é $S = \{1, 3, 5\}$, com todas as raízes simples e com coeficiente dominante de $P(x)$ igual a 2.

Resolução

Vimos que toda equação polinomial $P(x) = 0$ de grau n, $n \geq 1$, pode ser escrita sob a forma:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) = 0,$$

em que a_n é o coeficiente dominante de $P(x)$ e $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

O problema exige que o coeficiente dominante de $P(x)$ seja 2 e que os números 1, 3 e 5 sejam raízes simples. Isto é, cada raiz deve comparecer uma única vez na decomposição de $P(x)$. Portanto, temos:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)(x - 3)(x - 5) = 0.$$

R.7 Construir a equação polinomial $P(x) = 0$ com conjunto solução $S = \{-1, 6, 7\}$ tal que -1 é raiz simples, 6 é raiz dupla, 7 é raiz tripla e o coeficiente dominante de $P(x)$ é 9.

Resolução

Toda equação polinomial $P(x) = 0$ de grau n, $n \geq 1$, pode ser escrita sob a forma:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) = 0,$$

em que a_n é o coeficiente dominante de $P(x)$ e $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

Esse problema exige que:

- o coeficiente dominante de $P(x)$ seja 9;
- -1 seja raiz simples, ou seja, -1 deve comparecer uma única vez na decomposição de $P(x)$;
- 6 seja raiz dupla, ou seja, 6 deve comparecer exatamente duas vezes na decomposição de $P(x)$;
- 7 seja raiz tripla, ou seja, 7 deve comparecer exatamente três vezes na decomposição de $P(x)$.

Nessas condições, temos que $P(x) \equiv 9(x + 1)(x - 6)(x - 6)(x - 7)(x - 7)(x - 7)$.

Logo, a equação polinomial pedida é $9(x + 1)(x - 6)^2(x - 7)^3 = 0$.

R.8 Sabendo que 3 é uma raiz dupla da equação $x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 102x + 72 = 0$, obter as outras raízes em $\mathbb{C}$.

Resolução

Pelo teorema da decomposição, a equação proposta pode ser escrita como:

$$\underbrace{(x - 3)\,(x - 3)}_{Q_1(x)}\,\overbrace{(x - r_1)\,(x - r_2)}^{Q_2(x)} = 0,$$ em que r_1 e r_2 são as outras raízes, além da raiz 3.

Dividindo $P(x) \equiv x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 102x + 72$ por $x - 3$, obtemos $Q_1(x)$. E, dividindo $Q_1(x)$ por $x - 3$, obtemos $Q_2(x)$.

Por Briot-Ruffini, temos:

3	1	−12	53	−102	72
	1	−9	26	−24	0

$\therefore Q_1(x) \equiv x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ e

3	1	−9	26	−24
	1	−6	8	0

$\therefore Q_2(x) \equiv x^2 - 6x + 8$.

Assim, a equação proposta pode ser escrita como $(x - 3)(x - 3)(x^2 - 6x + 8) = 0$.

Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$$

$$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \quad \therefore x = 4 \text{ ou } x = 2.$$

Logo, além da raiz dupla 3, a equação admite as raízes simples 4 e 2.

R.9 Mostrar que o número 1 é raiz tripla da equação $x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 9x - 3 = 0$.

Resolução

Para que 1 seja raiz tripla da equação proposta, temos, pelo teorema da decomposição, que essa equação deve ser equivalente a:

$$\underbrace{(x - 1)\,(x - 1)\,\overbrace{(x - 1)\,(x - r_1)\,(x - r_2)}^{Q_2(x)}}_{Q_1(x)} = 0,$$

em que r_1 e r_2 são raízes da equação, distintas de 1.

Assim, devemos ter que:

I. o polinômio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 9x - 3$ é divisível por $x - 1$;

II. o quociente $Q_1(x)$, de $P(x)$ por $x - 1$, também é divisível por $x - 1$;

III. o quociente $Q_2(x)$, de $Q_1(x)$ por $x - 1$, também é divisível por $x - 1$;

IV. o quociente $Q_3(x)$, de $Q_2(x)$ por $x - 1$, **não** é divisível por $x - 1$.

Vamos às constatações:

I. Aplicando Briot-Ruffini:

1	1	−3	6	−10	9	−3
	1	−2	4	−6	3	0

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 1$; portanto temos:

$$P(x) \equiv (x - 1)\underbrace{(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3)}_{Q_1(x)}.$$

II. Aplicando Briot-Ruffini:

1	1	−2	4	−6	3
	1	−1	3	−3	0

Logo, $Q_1(x)$ é divisível por $x - 1$; portanto temos:

$$Q_1(x) \equiv (x - 1)\underbrace{(x^3 - x^2 + 3x - 3)}_{Q_2(x)}.$$

III. Aplicando Briot-Ruffini:

1	1	−1	3	−3
	1	0	3	0

Logo, $Q_2(x)$ é divisível por $x - 1$; portanto temos:

$$Q_2(x) \equiv (x - 1)\underbrace{(x^2 + 3)}_{Q_3(x)}.$$

IV. Pelo teorema de D'Alembert, temos que $Q_3(x) \equiv x^2 + 3$ não é divisível por $x - 1$, pois $Q_3(1) \neq 0$.

Assim, o polinômio $P(x)$ é tal que:

$$P(x) \equiv (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + 3) \therefore P(x) \equiv (x - 1)^3(x^2 + 3),$$

com $x^2 + 3$ **não divisível** por $x - 1$.

Logo, 1 é raiz tripla de $P(x)$. (c.q.d.)

4. Raízes imaginárias

Vamos estudar agora um teorema que diz respeito às raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais. Lembre-se de que **número imaginário** é todo número complexo z não real, isto é, $z = a + bi$ com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$.

Teorema

Se o número imaginário $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, é raiz de uma equação polinomial $P(x) = 0$ com coeficientes reais, então o conjugado de z, $\overline{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação.

Demonstração

Seja $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ um polinômio com coeficientes reais tal que o número imaginário $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, seja raiz da equação $P(x) = 0$.

Temos que $P(z) = 0$, ou seja: $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$. (I)

Se dois complexos são iguais, então seus conjugados são iguais. Por isso, podemos concluir da sentença (I) que $\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_0} = \overline{0}$

Pelas propriedades do conjugado de um complexo, podemos escrever:

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \overline{a_{n-2} z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_0} = \overline{0}$$

$$\therefore \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\,\overline{z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_0} = \overline{0} \therefore a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + a_{n-2} \overline{z^{n-2}} + \ldots + a_0 = 0$$

$$\therefore a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + a_{n-2} \overline{z}^{n-2} + \ldots + a_0 = 0 \therefore P(\overline{z}) = 0,$$

ou seja, $\overline{z}$ é raiz da equação $P(x) = 0$. (c.q.d.)

Conseqüências

- Se um número imaginário z é raiz de multiplicidade k de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o conjugado de z também é raiz de multiplicidade k dessa equação.
- O número de raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais é necessariamente par.
- Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação admite pelo menos uma raiz real.

Exercícios resolvidos

R.10 Qual é o menor grau possível de uma equação polinomial $P(x) = 0$ de coeficientes reais que possui como raízes simples os números 8, $2 + i$ e $-3i$?

Resolução

Pelo teorema anterior, se $P(x) = 0$ é uma equação polinomial de coeficientes reais e os números imaginários $2 + i$ e $-3i$ são raízes simples dessa equação, então os conjugados $2 - i$ e $3i$ também são raízes simples dessa equação. Assim, a equação $P(x) = 0$ tem pelo menos cinco raízes e, portanto, o menor grau possível dessa equação é 5.

R.11 Uma equação polinomial $P(x) = 0$ de coeficientes reais tem a raiz $2 + 6i$ com multiplicidade 4 e a raiz simples $5 - i$. Qual é o menor grau possível dessa equação?

Resolução

Se uma equação polinomial $P(x) = 0$ admite uma raiz imaginária z com multiplicidade k, então o conjugado de z também é raiz de multiplicidade k dessa equação.

Temos que:

- $2 + 6i$ é raiz de multiplicidade 4 da equação $P(x) = 0$; logo, $2 - 6i$ também é raiz de multiplicidade 4 dessa equação;
- $5 - i$ é raiz simples da equação $P(x) = 0$; logo, $5 + i$ também é raiz simples dessa equação.

Assim, a equação $P(x) = 0$ pode ser escrita como:

$$(x - 2 - 6i)^4 (x - 2 + 6i)^4 (x - 5 + i)(x - 5 - i) \cdot Q(x) = 0,$$

onde $Q(x)$ é um polinômio com grau maior ou igual a zero. Logo, o grau mínimo da equação é $4 + 4 + 1 + 1 = 10$, o que ocorre no caso em que $Q(x)$ tem grau zero.

R.12 Construir a equação polinomial $P(x) = 0$ com coeficientes reais, de menor grau possível, que admita como raízes os números 1 e $2 + i$ e tenha como coeficiente dominante de $P(x)$ o número 5.

Resolução

Pelo teorema anterior, se uma equação polinomial de coeficientes reais admite o número imaginário $2 + i$ como raiz, então admite também como raiz o número $2 - i$.

Como o enunciado exige que a equação tenha o menor grau possível, devemos ter 1, $2 + i$ e $2 - i$ como raízes simples. Logo, a equação pedida é $5(x - 1)(x - 2 - i)(x - 2 + i) = 0$.

R.13 Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação polinomial $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ sabendo que $2i$ é uma de suas raízes.

Resolução

A equação polinomial $P(x) = 0$ possui coeficientes reais. Portanto temos que, se $2i$ é raiz da equação, então $-2i$ também o é. Assim, $P(x)$ é divisível por $(x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$. Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x^2 + 4$ temos:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} -x^4 \quad\quad -4x^2 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{1-1} -2x^3 - 3x^2 - 8x - 12 & \\ \quad +2x^3 \quad\quad +8x & \\ \cline{1-1} \quad -3x^2 + 0x - 12 & \\ \quad +3x^2 \quad\quad +12 & \\ \cline{1-1} \quad\quad 0 & \end{array}$$

Assim, a equação $P(x) = 0$ é equivalente a $(x^2 + 4)(x^2 - 2x - 3) = 0$.

Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \therefore x = \pm 2i$ ou

$x^2 - 2x - 3 = 0 \therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 \therefore x = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \therefore x = 3$ ou $x = -1$.

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{2i, -2i, 3, -1\}$.

5. Raízes racionais

Teorema

Seja $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$.

Se $\frac{p}{q}$ é raiz da equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$, na variável x e com **coeficientes inteiros**, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração

Sendo $\frac{p}{q}$ uma raiz da equação, devemos ter:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$$

$$\therefore a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2} \cdot \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_0 = 0.$$

Multiplicando por q^n ambos os membros, obtemos:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\therefore a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1 pq^{n-1} = -a_0 q^n$$

$$\therefore p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

Como o produto de inteiros é inteiro e a soma de inteiros também é inteiro, concluímos que o primeiro membro da igualdade anterior é um número inteiro. Portanto o segundo membro, $-a_0q^n$, é inteiro e múltiplo de p, pois é igual ao produto de p por um inteiro, ou seja, $pk_1 = -a_0q^n$, $k_1 \in \mathbb{Z}$.
Como p e q são primos entre si, temos que p e q^n também o são. Logo, p é **divisor** de a_0.
Temos, ainda, que a igualdade (I) é equivalente a:

$$a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_0q^n = -a_np^n$$
$$\therefore q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_0q^{n-1}) = -a_np^n.$$

Como a expressão entre parênteses é um número inteiro k_2, podemos escrever:

$$qk_2 = -a_np^n,\ k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Como q e p são primos entre si temos que q e p^n também o são.
Logo, q é **divisor** de a_n.

(c.q.d.)

Notas

1. Nem toda equação polinomial de coeficientes inteiros admite raiz racional. Por exemplo, a equação $x^2 - 2 = 0$ não admite raiz racional.

2. Se a equação polinomial de coeficientes inteiros $P(x) = 0$ tem o polinômio $P(x)$ **unitário**, isto é, com coeficiente dominante igual a 1, e admite raízes racionais, então essas raízes são inteiras. Por exemplo, se $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, é raiz da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, então p é divisor de 6, $p \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$, e q é divisor de 1, $q \in \{\pm1\}$. Logo, $\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$.

Exercícios resolvidos

R.14 Determinar, se existirem, todas as raízes racionais da equação $3x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$.

Resolução

Se essa equação admite raiz do tipo $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, então p é divisor de 2 e q é divisor de 3, ou seja, $p \in \{\pm1, \pm2\}$ e $q \in \{\pm1, \pm3\}$.

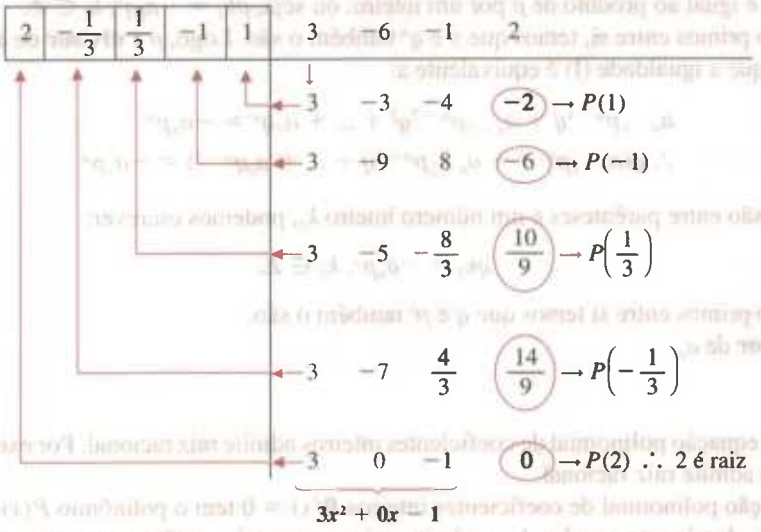
Logo, $\frac{p}{q} \in \left\{\pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm2, \pm\frac{2}{3}\right\}$.

Testando cada uma das "candidatas" a raiz racional da equação $P(x) = 0$, temos:

$$P(1) = 3 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 1 + 2 = -2;$$
$$P(-1) = 3(-1)^3 - 6(-1)^2 - (-1) + 2 = -6;$$
$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{10}{9};$$
$$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{14}{9};$$
$$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow 2 \text{ é raiz};$$
$$P(-2) = 3(-2)^3 - 6(-2)^2 - (-2) + 2 = -44;$$
$$P\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} + 2 = -\frac{4}{9};$$
$$P\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 6\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = -\frac{8}{9}.$$

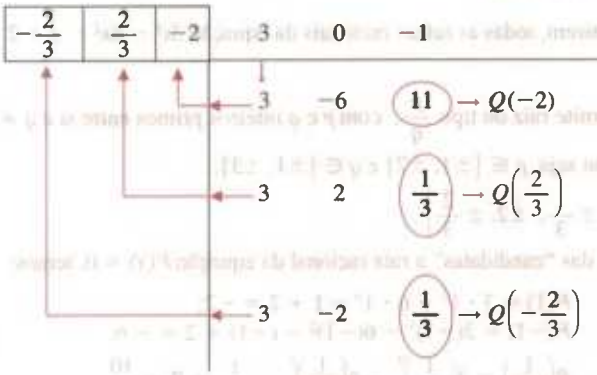
Logo, a equação admite apenas uma raiz racional, o número 2.

Nota: o teorema do resto nos garante que o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$. Assim, nesse exercício, podemos abreviar os cálculos através do dispositivo prático de Briot-Ruffini:



Como $P(x)$ é divisível por $x - 2$, temos $P(x) = (x - 2)\underbrace{(3x^2 + 0x - 1)}_{Q(x)}$.

Logo, se existem outras raízes racionais, estas devem ser raízes de $Q(x)$, e por isso os testes das demais "candidatas" a raiz racional **podem** ser feitos em $Q(x)$:



Percebemos, então, que 2 é a única raiz racional da equação.

R.15 Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^4 - 5x^3 + x^2 + 5x - 2 = 0$.

Resolução

A equação possui todos os coeficientes inteiros. Logo, se $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, é raiz da equação, então $p \in \{\pm 1, \pm 2\}$ e $q \in \{\pm 1\}$.

Assim, temos que $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Testando essas "candidatas" a raiz da equação $P(x) = 0$, obtemos:

	1	−5	1	5	−2	
1	1	−4	−3	2	0	$\rightarrow P(1) \therefore$ 1 é raiz

$x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

Como $P(x)$ é divisível por $x - 1$, temos $P(x) = (x - 1)\underbrace{(x^3 - 4x^2 - 3x + 2)}_{Q_1(x)}$.

Logo, se existem outras raízes racionais, estas devem ser raízes de $Q_1(x)$. Testando as demais "candidatas" em $Q_1(x)$, obtemos:

	1	−4	−3	2	
−1	1	−5	2	0	$\rightarrow Q_1(-1) \therefore -1$ é raiz

$x^2 - 5x + 2$

Assim, podemos escrever: $P(x) = (x - 1)(x + 1)\underbrace{(x^2 - 5x + 2)}_{Q_2(x)}$. (I)

Logo, se a equação admite outras raízes racionais, estas são raízes de $Q_2(x)$.
Testando 2 e −2 em $Q_2(x)$, temos:

		1	−5	2	
2	1	−3	−4		$\rightarrow Q_2(2)$
−2	1	−7	16		$\rightarrow Q_2(-2)$

Concluímos então que as únicas raízes racionais de $P(x) = 0$ são 1 e −1.
De (I), temos que a equação $P(x) = 0$ pode ser escrita como: $(x - 1)(x + 1)(x^2 - 5x + 2) = 0$.
Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\therefore \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 17 \therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

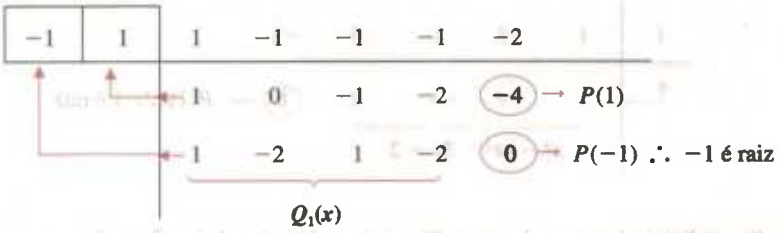
Temos, então, como conjunto solução $S = \left\{1, -1, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right\}$.

R.16 Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x = 0$.

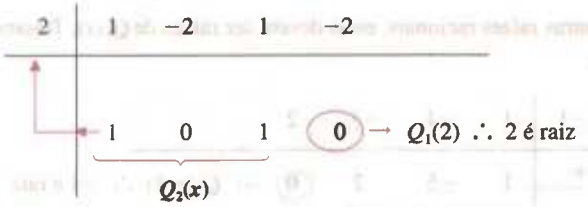
Resolução

Essa equação pode ser escrita sob a forma $x(x^4 - x^3 - x^2 - x - 2) = 0$.
Logo, $x = 0$ ou $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.
Para tentar resolver essa equação do 4º grau, $P(x) = 0$, façamos o teste com suas "candidatas" a raiz racional, que são 1, −1, 2 e −2.

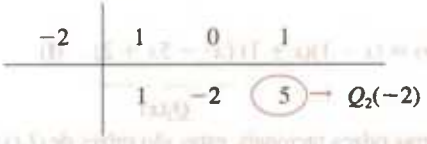
Por Briot-Ruffini, temos:



Testemos as demais "candidatas" em $Q_1(x)$:



Testando a última "candidata" em $Q_2(x)$:



Assim, a equação $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ é equivalente a:

$$(x + 1)(x - 2) \cdot Q_2(x) = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1) = 0.$$

Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i.$$

Logo, o conjunto solução da equação proposta é $S = \{0, -1, 2, i, -i\}$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a, b), B.3 (a, b, c), B.4, B.6, B.8, B.10 (a), B.11 (a, b), B.12 (a, b), B.13, B.15 (a, b), B.16 (a, b), C.1, C.3, C.5, C.8, C.9.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2 (c, d), B.3 (d, e, f), B.5, B.7, B.9, B.10 (b), B.11 (c, d), B.12 (c, d), B.14, B.15 (c, d, e), B.16 (c, d, e), C.2, C.4, C.6, C.7, C.10, C.11.

Exercícios básicos

B.1 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $P(x) = 0$, dada uma de sua raízes r, em cada um dos seguintes casos:

a) $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$ e $r = 5$;

b) $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ e $r = \frac{1}{2}$;

c) $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$ e $r = -3$;

d) $3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$ e $r = \frac{1}{3}$.

B.2 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $P(x) = 0$, dadas duas de suas raízes r_1 e r_2, em cada um dos seguintes casos:

a) $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 15x - 18 = 0$, com $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$;

b) $3x^5 - 16x^4 + 11x^3 + 22x^2 - 8x = 0$, com $r_1 = -1$ e $r_2 = 4$;

c) $2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + x + 6 = 0$, com $r_1 = -2$ e $r_2 = 3$;

d) $x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$, com $r_1 = r_2 = 2$.

B.3 Fatore o polinômio $P(x)$ como o produto de uma constante por polinômios do 1º grau, em cada um dos seguintes casos:

a) $P(x) \equiv 3x^2 - 5x + 2$;
b) $P(x) \equiv x^3 - 4x^2 + 3x$;
c) $P(x) \equiv x^3 - 4x^2 - x + 4$, sabendo que $P(1) = 0$;
d) $P(x) \equiv 4x^2 - x - 3$;
e) $P(x) \equiv x^3 - 8x^2 + 12x$;
f) $P(x) \equiv 3x^3 - 6x^2 + 3x - 6$, sabendo que $P(2) = 0$.

B.4 O conjunto solução da equação polinomial $P(x) = 0$ é $S = \{1, 2, -5\}$ tal que 1 é raiz tripla, 2 é raiz simples e -5 é raiz dupla. Qual é o grau dessa equação?

B.5 O conjunto solução de uma equação é formado por dez raízes simples. Qual é o grau dessa equação?

B.6 Qual é a equação polinomial $P(x) = 0$ cujo conjunto solução é $S = \{3, 7, 2\}$, sendo 3 uma raiz dupla, 7 uma raiz simples, 2 uma raiz de multiplicidade 5 e sendo $P(x)$ um polinômio unitário?

B.7 Construa a equação polinomial $P(x) = 0$ cujo conjunto solução é $S = \{-1, 1, 2, -2\}$, sendo -1 e 1 raízes simples, 2 uma raiz dupla, -2 uma raiz tripla e sendo $P(x)$ um polinômio de coeficiente dominante igual a 7.

B.8 Sabendo que -1 é raiz dupla da equação $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$, obtenha as outras raízes em $\mathbb{C}$.

B.9 O número 3 é raiz tripla da equação $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27 = 0$. Resolva essa equação no conjunto universo $U = \mathbb{C}$.

B.10 Mostre que:

a) 5 é raiz dupla da equação $x^6 - 10x^5 + 25x^4 + x^2 - 10x + 25 = 0$;
b) 2 é raiz tripla da equação $x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$.

B.11 Determine o menor grau possível de uma equação polinomial $P(x) = 0$ de coeficientes reais que possui:

a) 6, $4 - 3i$ e $-2i$ como raízes simples;
b) 3 como raiz simples e $3 - 4i$ como raiz tripla;
c) $5 - i$ como raiz tripla e $2 + i$ como raiz dupla;
d) 2 como raiz tripla, $6i$ como raiz de multiplicidade 4 e $1 + i$ como raiz simples.

B.12 Construa a equação polinomial $P(x) = 0$ com coeficientes reais, de menor grau possível, que admita como raízes os números:

a) 3, $2 + i$ e $-2i$, e que $P(x)$ tenha coeficiente dominante igual a 4;
b) $-6i$, $3i$ e $1 + i$, e que $P(x)$ seja unitário;
c) 4, -2, i e $1 - i$, e que $P(x)$ tenha coeficiente dominante igual a 6;
d) 4, 3, i e $-i$, e que $P(x)$ seja unitário.

B.13 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação polinomial $x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9 = 0$, sabendo que $3i$ é uma de suas raízes.

B.14 Uma das raízes da equação $x^4 - 2x^3 + 22x^2 - 50x - 75 = 0$ é $-5i$. Resolva, em $\mathbb{C}$, essa equação.

B.15 Determine, se existirem, as raízes racionais de cada uma das seguintes equações:

a) $2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0$;
b) $x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 7x - 2 = 0$;
c) $3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 2 = 0$;
d) $x^6 + x^5 + 2x^4 - x^2 - 1 = 0$;
e) $3x^4 - 9x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

B.16 Resolva, em $\mathbb{C}$, cada uma das seguintes equações:

a) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$;
b) $6x^4 - x^3 + 11x^2 - 2x - 2 = 0$;
c) $4x^3 + x^2 + 3 = 0$;
d) $x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 4x - 12 = 0$;
e) $2x^4 - 4x^3 + x^2 + x = 0$.

Exercícios complementares

C.1 Sabendo que o número 1 é raiz tripla da equação $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$, determine o seu conjunto solução no universo $U = \mathbb{C}$.

C.2 Obtenha os valores a e b, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, sabendo que $1 + i$ é raiz da equação $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$.

C.3 Podemos afirmar que a equação $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, $\{a, b, c, d, e\} \subset \mathbb{R}$:

a) não possui raiz real.
b) possui apenas uma raiz real.
c) possui exatamente quatro raízes reais.
d) possui um número ímpar de raízes reais.
e) admite uma raiz igual a zero.

C.4 Se uma equação polinomial de coeficientes reais e de grau n admite exatamente duas raízes reais, então necessariamente:

a) n é ímpar. b) n é múltiplo de 3. c) n é par. d) n é igual a 2. e) n é igual a 4.

C.5 Dada a equação $x^2 + bx + c = 0$ com $\{b, c\} \subset \mathbb{C}$, podemos afirmar que:

a) se o número $\alpha + \beta i$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}^*$, é raiz dessa equação, então $\alpha - \beta i$ também o é.
b) a equação não pode admitir duas raízes reais.
c) a equação não pode admitir uma raiz real e outra imaginária.
d) a equação pode admitir duas raízes imaginárias não conjugadas entre si.
e) a equação não pode admitir duas raízes imaginárias conjugadas entre si.

C.6 Uma equação polinomial do 3º grau, com coeficientes reais, admite uma raiz igual a $1 + ki$, $k \in \mathbb{R}^*$, e a soma das outras raízes é $4 - 3i$. Determine o conjunto solução dessa equação no universo $U = \mathbb{C}$.

C.7 Resolva, em $\mathbb{C}$, cada uma das seguintes equações:

a) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 2 = 0$; b) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$.

C.8 Sabendo que a equação $x^3 + bx^2 - cx + 1 = 0$, $\{b, c\} \subset \mathbb{Z}$, admite duas raízes inteiras distintas entre si, obtenha as constantes b e c.

C.9 Dada a equação $x^5 + mx^2 + nx + 1 = 0$, com $\{m, n\} \subset \mathbb{R}$, podemos afirmar que:

a) se a equação admite raiz inteira, então essa só pode ser 1 ou -1.
b) se o número $a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, é raiz da equação, então $a - bi$ também o é.
c) a equação pode admitir quatro raízes reais e uma imaginária.
d) existem reais m e n de modo que a equação não admita raiz real.
e) a equação pode admitir uma raiz imaginária com multiplicidade maior que 2.

C.10 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^4 - ax^3 - bx^2 - ax + 2 = 0$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}$, sabendo que duas de suas raízes são números inteiros positivos e consecutivos.

C.11 Qual é o grau mínimo da equação polinomial $x^n - 1 = 0$, sabendo que ela admite uma raiz $a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$?

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) O número 2 é raiz dupla da equação $ax^3 + bx + 16 = 0$. Determine a e b.

V.2 (E.E. Mauá-SP) Resolver a equação $x^3 - 2x^2 + 2x + a = 0$, na variável x, sabendo que o número 1 é uma de suas raízes.

V.3 (ITA-SP) A equação $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$ admite uma raiz igual a i (unidade imaginária). Deduzimos então que:

a) tal equação não admite raiz real menor que 2.
b) tal equação admite como raiz um número racional.
c) tal equação não admite como raiz um número positivo.
d) tal equação não possui raiz da forma bi, com $b < 1$.
e) Nenhuma das respostas anteriores.

V.4 (UFRN) A equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, em que m e n são números reais, admite $1 + i$ como raiz. Então, m e n valem respectivamente:

a) 2 e -2. b) 2 e 0. c) 0 e 2. d) -2 e 0. e) 2 e 2.

V.5 (ITA-SP) A equação $3x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ possui:

a) três raízes imaginárias e duas raízes reais positivas.
b) pelo menos uma raiz real positiva.
c) todas as raízes inteiras.
d) uma única raiz imaginária.
e) Nenhuma das respostas anteriores.

Capítulo 22

Relações de Girard e o teorema de Bolzano

1. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial

Albert Girard (1590-1633), flamengo, em sua obra *Invention nouvelle en l'algèbre*, apresentou um importante teorema que relaciona as raízes com os coeficientes de uma equação polinomial. Antes de estudar esse terorema em sua forma geral, vamos abordá-lo particularmente para equações do 2º (I) e do 3º grau (II).

I. Consideremos o polinômio do 2º grau $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, cujas raízes são r_1 e r_2. Pelo teorema da decomposição de um polinômio, podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - r_1)(x - r_2) \therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - r_1)(x - r_2)$$

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2 \therefore \begin{cases} -(r_1 + r_2) = \frac{b}{a} \\ r_1r_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Temos, então, o seguinte:

As raízes r_1 e r_2 da equação polinomial do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, são tais que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Exercício resolvido

R.1 Sendo r_1 e r_2 as raízes da equação do 2º grau $3x^2 + \sqrt{5}\,x + \sqrt{2} = 0$, calcular:

a) $r_1 + r_2$;

b) r_1r_2;

c) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$;

d) $r_1^2 + r_2^2$;

e) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$.

Resolução

Os coeficientes da equação $3x^2 + \sqrt{5}\,x + \sqrt{2} = 0$ são $a = 3$, $b = \sqrt{5}$ e $c = \sqrt{2}$.

a) $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow r_1 + r_2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

b) $r_1 r_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow r_1 r_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

c) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{2}$.

d) Observando a identidade $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2$, podemos escrever:

$$r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2$$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \therefore r_1^2 + r_2^2 = \frac{5}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{5 - 6\sqrt{2}}{9}.$$

e) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{(r_1 r_2)^2} = \frac{\frac{5 - 6\sqrt{2}}{9}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{5 - 6\sqrt{2}}{2}$.

II. Consideremos, agora, o polinômio do 3º grau $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, cujas raízes são r_1, r_2 e r_3. Pelo teorema da decomposição de um polinômio, podemos escrever:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

$$\therefore x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

$$\therefore x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3$$

$$\therefore \begin{cases} -(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \\ -r_1r_2r_3 = \frac{d}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$$

Temos, então, o seguinte:

As raízes r_1, r_2 e r_3 da equação polinomial do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, são tais que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$$

Exercício resolvido

R.2 Sendo r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação $2x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$, calcular:

a) $r_1 + r_2 + r_3$;

b) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$;

c) $r_1r_2r_3$;

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$;

e) $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$;

f) $(r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2$;

g) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$.

Resolução

Os coeficientes da equação $2x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$ são $a = 2$, $b = -4$, $c = 3$ e $d = 1$.

Assim, temos:

a) $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{(-4)}{2} = 2$.

b) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \Rightarrow r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{3}{2}$.

c) $r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow r_1r_2r_3 = -\frac{1}{2}$.

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_2r_3 + r_1r_3 + r_1r_2}{r_1r_2r_3} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$.

e) Observando a identidade $(r_1 + r_2 + r_3)^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_1r_2 + 2r_1r_3 + 2r_2r_3$, podemos escrever:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)$$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 2^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 1.$$

f) Observando a identidade $(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)^2 = (r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2 + 2r_1^2r_2r_3 + 2r_1r_2^2r_3 + 2r_1r_2r_3^2$, podemos escrever:

$$(r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2 = (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)^2 - 2r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)$$

$$\therefore (r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(2) = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}.$$

g) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{r_2^2r_3^2 + r_1^2r_3^2 + r_1^2r_2^2}{r_1^2r_2^2r_3^2}$

$$\therefore \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{(r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2}{(r_1r_2r_3)^2} = \frac{\frac{17}{4}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 17.$$

Finalmente, vamos apresentar as relações de Girard em sua forma geral:

Teorema

Em toda equação polinomial de grau n, $n > 1$, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, cujas raízes são r_1, r_2, r_3, ..., r_n, tem-se que:

- a soma das raízes é igual a $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, ou seja, $r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$;
- a soma dos produtos das raízes, tomadas duas a duas, é igual a $\frac{a_{n-2}}{a_n}$, ou seja:

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + ... + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n};$$

- a soma dos produtos das raízes, tomadas três a três, é igual a $-\frac{a_{n-3}}{a_n}$, ou seja:

$$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + ... + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n};$$

⋮

- o produto de todas as raízes é igual a $\frac{(-1)^n(a_0)}{a_n}$, ou seja:

$$r_1r_2r_3 \ldots r_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}.$$

Demonstração

Pelo teorema da decomposição de um polinômio, podemos escrever:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n).$$

Dividindo por a_n ambos os membros dessa identidade, obtemos:

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n). \quad \text{(I)}$$

Observe que, para efetuar o produto no segundo membro dessa identidade, multiplicamos:

- todos os fatores iguais a x, obtendo x^n;
- os fatores x tomados $n - 1$ a $n - 1$ pelas raízes tomadas uma a uma, obtendo:

$$-x^{n-1}r_1 - x^{n-1}r_2 - x^{n-1}r_3 - \ldots - x^{n-1}r_n, \text{ ou seja, } -(r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n)x^{n-1};$$

- os fatores iguais a x tomados $n - 2$ a $n - 2$ pelas raízes tomadas duas a duas, obtendo:

$$x^{n-2}r_1r_2 + x^{n-2}r_1r_3 + x^{n-2}r_1r_4 + \ldots + x^{n-2}r_{n-1}r_n, \text{ ou seja, } (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \ldots + r_{n-1}r_n)x^{n-2};$$

- os fatores iguais a x tomados $n - 3$ a $n - 3$ pelas raízes tomadas três a três, obtendo:

$$-x^{n-3}r_1r_2r_3 - x^{n-3}r_1r_2r_4 - x^{n-3}r_1r_2r_5 - \ldots - x^{n-3}r_{n-2}r_{n-1}r_n, \text{ ou seja:}$$

$$-(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n)x^{n-3};$$

⋮

- todos os fatores iguais a r_1, r_2, r_3, ..., r_n, obtendo $(-1)^n r_1r_2r_3 \cdot \ldots \cdot r_n$.

Logo, da identidade (I), temos:

$$-(r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n) = \frac{a_{n-1}}{a_n};$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \ldots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n};$$

$$-(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n) = \frac{a_{n-3}}{a_n};$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n r_1r_2r_3 \cdot \ldots \cdot r_n = \frac{a_0}{a_n};$$

ou, ainda:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \ldots + r_{n-1}r_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \vdots \\ r_1r_2r_3 \cdot \ldots \cdot r_n = \dfrac{(-1)^n a_0}{a_n} \end{cases}$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.3 Sendo r_1, r_2, r_3 e r_4 as raízes da equação $2x^4 - 8x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$, calcular:

a) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$;

b) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4$;

c) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4$;

d) $r_1r_2r_3r_4$.

Resolução

Os coeficientes da equação $2x^4 - 8x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ são $a = 2$, $b = -8$, $c = -3$, $d = -2$ e $e = 1$.

Pelo teorema de Girard, temos:

a) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{(-8)}{2} = 4$;

b) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{3}{2}$;

c) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{(-2)}{2} = 1$;

d) $r_1r_2r_3r_4 = \dfrac{e}{a} = \dfrac{1}{2}$.

R.4 Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3 - \sqrt{2}\,x^2 - 3x + 3\sqrt{2} = 0$, sabendo que duas de suas raízes são simétricas entre si.

Resolução

Indicando por r e $-r$ as raízes simétricas e por s a terceira raiz da equação, temos, pelas relações de Girard, que:

$$\begin{cases} r + (-r) + s = \sqrt{2} & \text{(I)} \\ r(-r) + rs + (-rs) = -3 & \text{(II)} \\ r(-r)s = -3\sqrt{2}. & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I), temos que $s = \sqrt{2}$.

De (II), temos que $r = \pm\sqrt{3}$.

Para verificar se esses valores formam uma solução do sistema, basta substituí-los na equação (III).

- Substituindo $r = \sqrt{3}$ e $s = \sqrt{2}$ na equação (III), obtemos:

$$\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} = -3\sqrt{2} \quad \textbf{(verdadeira!)}$$

- Substituindo $r = -\sqrt{3}$ e $s = \sqrt{2}$ na equação (III), obtemos:

$$-\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = -3\sqrt{2} \quad \textbf{(verdadeira!)}$$

Como $r = \pm\sqrt{3}$ e $s = \sqrt{2}$ satisfazem (I), (II) e (III), concluímos que o conjunto solução da equação proposta é $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{2}\}$.

R.5 Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3 - 28x^2 + 140x + 400 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o dobro da outra.

Resolução

Indicando as raízes por r, $2r$ e s, temos, pelas relações de Girard, que:

$$\begin{cases} r + 2r + s = 28 \\ r \cdot 2r + rs + 2rs = 140 \\ r \cdot 2rs = -400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3r + s = 28 & \text{(I)} \\ 2r^2 + 3rs = 140 & \text{(II)} \\ r^2 s = -200. & \text{(III)} \end{cases}$$

Isolando s em (I), temos $s = 28 - 3r$.

Substituímos $s = 28 - 3r$ em (II):

$$2r^2 + 3r(28 - 3r) = 140 \Rightarrow 2r^2 + 84r - 9r^2 = 140 \therefore 7r^2 - 84r + 140 = 0 \therefore r^2 - 12r + 20 = 0$$

$$\therefore \Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 64 \therefore r = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow r = 10 \text{ ou } r = 2.$$

- Para $r = 10$, obtemos, de (I), $s = -2$.
  Substituímos $r = 10$ e $s = -2$ em (III), para verificar se esses valores formam uma solução do sistema:
  $$10^2 \cdot (-2) = -200.$$
  Como essa sentença é verdadeira, concluímos que $r = 10$ e $s = -2$ formam uma solução do sistema.
- Para $r = 2$, obtemos, de (I), $s = 22$.
  Substituindo $r = 2$ e $s = 22$ em (III), obtemos $2^2 \cdot 22 = -200$. **(falsa!)**
  Logo, $r = 2$ e $s = 22$ **não** formam uma solução do sistema.

Assim, as raízes r, $2r$ e s da equação compõem o conjunto solução $S = \{10, 20, -2\}$.

R.6 Determinar o valor da constante k, $k \in \mathbb{R}$, sabendo que as raízes da equação $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ formam uma progressão aritmética.

Resolução

Indicando as raízes da equação por $p - r$, p, $p + r$, temos, pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} p - r + p + p + r = 3 \Rightarrow p = 1 & \text{(I)} \\ (p - r)p + (p - r)(p + r) + p(p + r) = -6 & \text{(II)} \\ (p - r)p(p + r) = -k. & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II):

$$(1 - r) \cdot 1 + (1 - r)(1 + r) + 1 \cdot (1 + r) = -6$$
$$\therefore 1 - \cancel{r} + 1 - r^2 + 1 + \cancel{r} = -6 \therefore r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ ou } r = -3.$$

- Para $p = 1$ e $r = 3$, temos, da equação (III): $(1 - 3) \cdot 1 \cdot (1 + 3) = -k \Rightarrow k = 8$.
- Para $p = 1$ e $r = -3$, temos, da equação (III): $(1 + 3) \cdot 1 \cdot (1 - 3) = -k \Rightarrow k = 8$.

Assim, obtemos como resposta $k = 8$.

R.7 Calcular a soma dos inversos das raízes da equação $5x^4 + 3x^2 - x + 4 = 0$.

Resolução

A equação pode ser escrita sob a forma $5x^4 + 0x^3 + 3x^2 - x + 4 = 0$.
Assim, seus coeficientes são $a = 5$, $b = 0$, $c = 3$, $d = -1$ e $e = 4$.
Indicando as raízes por r_1, r_2, r_3 e r_4, temos que:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{r_2r_3r_4 + r_1r_3r_4 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_3}{r_1r_2r_3r_4} = \frac{-\frac{d}{a}}{\frac{e}{a}} = \frac{-\frac{(-1)}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$$

R.8 Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $2x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 44x - 40 = 0$, sabendo que uma de suas raízes tem multiplicidade 3.

Resolução

Indicando as raízes por r, r, r e s, temos, pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} r + r + r + s = \frac{7}{2} \\ r^2 + r^2 + rs + r^2 + rs + rs = -3 \\ r^3 + r^2s + r^2s + r^2s = -22 \\ r^3s = -20. \end{cases} \therefore \begin{cases} 3r + s = \frac{7}{2} \Rightarrow s = \frac{7}{2} - 3r \text{ (I)} \\ r^2 + rs = -1 \text{ (II)} \\ r^3 + 3r^2s = -22 \text{ (III)} \\ r^3s = -20. \text{ (IV)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II):

$$r^2 + r\left(\frac{7}{2} - 3r\right) = -1 \therefore r^2 + \frac{7r}{2} - 3r^2 = -1 \therefore 2r^2 + 7r - 6r^2 = -2$$
$$\therefore 4r^2 - 7r - 2 = 0 \therefore \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 4(-2) = 81$$
$$\therefore r = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{8} \Rightarrow r = 2 \text{ ou } r = -\frac{1}{4}.$$

- Para $r = 2$, temos, da equação (I): $s = \frac{7}{2} - 3 \cdot 2 \Rightarrow s = -\frac{5}{2}$.

  Substituímos $r = 2$ e $s = -\frac{5}{2}$ em (III) e (IV), para verificar se esses valores constituem uma solução do sistema.

  Substituindo em (III): $2^3 + 3 \cdot 2^2\left(-\frac{5}{2}\right) = -22$. **(verdadeira!)**

  Substituindo em (IV): $2^3\left(-\frac{5}{2}\right) = -20$. **(verdadeira!)**

  Como essas sentenças são verdadeiras, concluímos que $r = 2$ e $s = -\frac{5}{2}$ formam uma solução do sistema.

- Para $r = -\frac{1}{4}$, temos, da equação (I): $s = \frac{7}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{17}{4}$.

  Substituímos então $r = -\frac{1}{4}$ e $s = \frac{17}{4}$ em (III) e (IV).

Substituindo em (III): $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{17}{4}\right) = -22 \Rightarrow \frac{50}{64} = -22$. **(falsa!)**

Como essa sentença é falsa, nem é preciso substituir esses valores em (IV), pois já podemos concluir que esses valores não constituem uma solução do sistema.

Logo, a raiz tripla $r = 2$ e a raiz simples $s = -\frac{5}{2}$ formam o conjunto solução $S = \left\{2, -\frac{5}{2}\right\}$.

2. Raízes reais de uma equação polinomial

Faremos agora um estudo das equações polinomiais de coeficientes reais com o objetivo de pesquisar a quantidade de raízes reais dessa equação em um intervalo aberto.

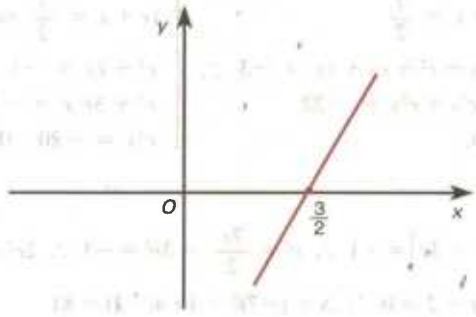
Consideremos uma função polinomial f, real de variável real, isto é, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0, \text{ em que } \{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0\} \subset \mathbb{R}.$$

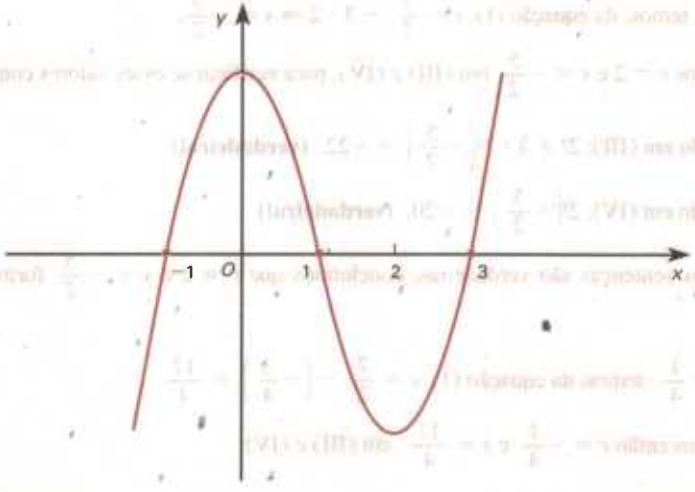
O domínio de f é o conjunto $\mathbb{R}$, ou seja, a variável x assume todos os valores reais. Assim, o gráfico de f, em relação ao eixo Ox, varia de $-\infty$ a $+\infty$. Demonstra-se que esse gráfico é uma linha "contínua", isto é, uma linha sem interrupções (a continuidade dessa função será demonstrada na teoria dos limites).

Exemplos

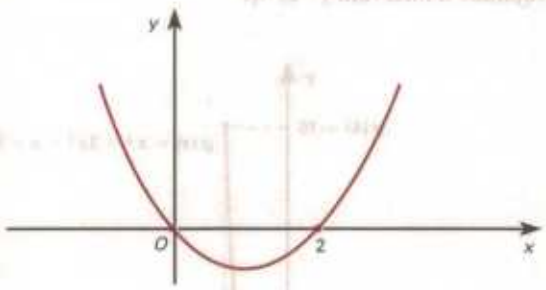
a) O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 3$ é:



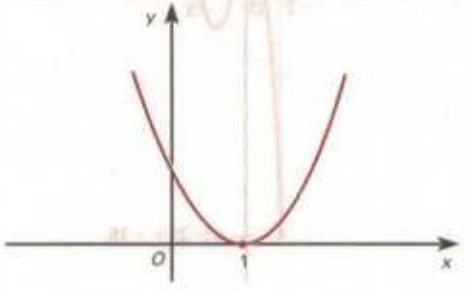
b) O gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ é:



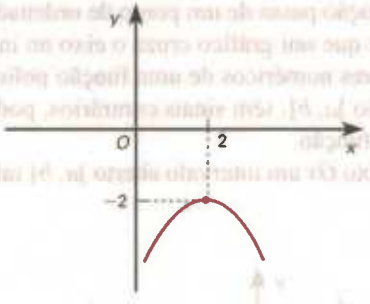
c) O gráfico da função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2 - 2x$ é:



d) o gráfico da função q: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = x^2 - 2x + 1$ é:



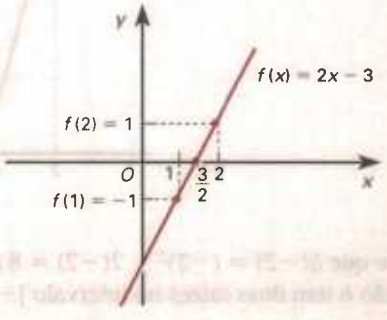
e) o gráfico da função t: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = -x^2 + 4x - 6$ é:



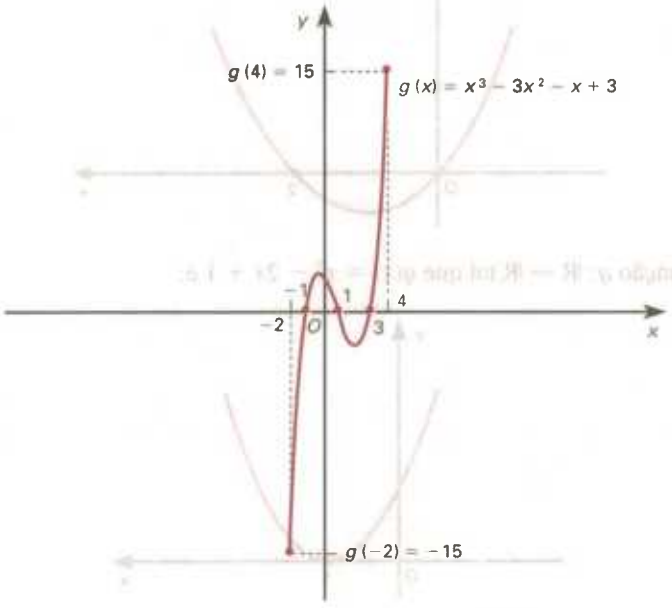
Observando funções como essas, o padre e matemático austríaco Bernhard Bolzano (1781-1848) descobriu algumas condições que nos informam sobre a quantidade de raízes reais de uma equação polinomial de coeficientes reais em um dado intervalo $]a, b[$.

Antes de apresentarmos o teorema de Bolzano, observemos os gráficos dos exemplos anteriores.

No exemplo (a), tomemos no eixo Ox um intervalo aberto $]a, b[$, tal que $\frac{3}{2} \in]a, b[$; por exemplo, vejamos o intervalo $]1, 2[$, no gráfico ao lado. Note que $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$ e $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. Temos então $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$. Ora, se o gráfico de f **não tem interrupções** e passa de um ponto de ordenada negativa para outro de ordenada positiva, então se conclui que esse gráfico cruza o eixo Ox no intervalo $]1, 2[$.



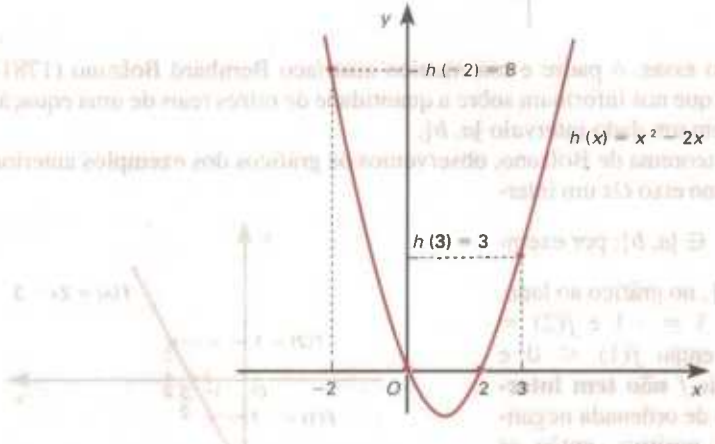
O mesmo ocorre com o exemplo (b). Consideremos no eixo Ox um intervalo aberto que contém $\{-1, 1, 2\}$; por exemplo, vejamos o intervalo $]-2, 4[$:



Note que $g(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - (-2) + 3 = -15$ e $g(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 4 + 3 = 15$, ou seja, $g(-2) < 0$ e $g(4) > 0$. Como a função passa de um ponto de ordenada negativa para outro de ordenada positiva e é "contínua", conclui-se que seu gráfico cruza o eixo no intervalo $]-2, 4[$.

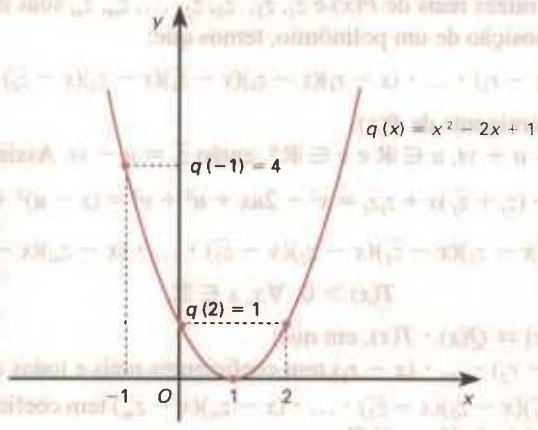
Generalizando: quando os valores numéricos de uma função polinomial real de variável real, calculados nos extremos de um intervalo $]a, b[$, têm sinais contrários, pode-se concluir que existe em $]a, b[$ um número ímpar de raízes dessa função.

No exemplo (c), tomemos no eixo Ox um intervalo aberto $]a, b[$ tal que $\{0, 2\} \subset]a, b[$; por exemplo, vejamos o intervalo $]-2, 3[$:



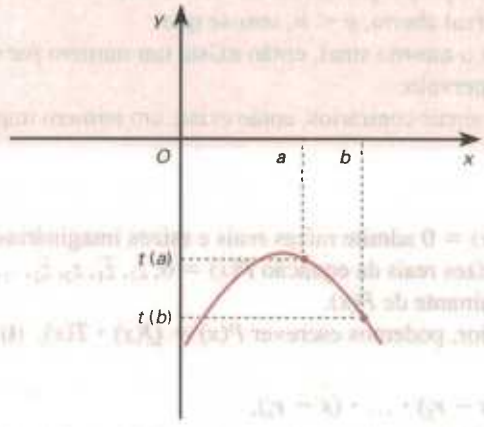
Note que $h(-2) = (-2)^2 - 2(-2) = 8$ e que $h(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3$, ou seja, $h(-2) > 0$ e $h(3) > 0$. A função h tem duas raízes no intervalo $]-2, 3[$; logo, $h(-2)$ e $h(3)$ têm o mesmo sinal.

Algo análogo ocorre no exemplo (d). Consideremos no eixo Ox o intervalo $]-1, 2[$:



Temos $q(-1) = (-1)^2 - 2(-1) + 1 = 4$ e $q(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$, ou seja, $q(-1) > 0$ e $q(2) > 0$. A função q tem duas raízes iguais a 1 no intervalo $]-1, 2[$; logo, $q(-1)$ e $q(2)$ têm o mesmo sinal.

Analisemos, finalmente, o exemplo (e):



Para qualquer intervalo aberto $]a, b[$ do eixo Ox, tem-se $t(a) < 0$ e $t(b) < 0$. O fato de o gráfico de t ser "contínuo" e não possuir ponto em comum com o eixo Ox garante que para todo intervalo aberto $]a, b[$ os valores $t(a)$ e $t(b)$ têm o mesmo sinal.

Generalizando: quando os valores numéricos de uma função polinomial real de variável real, calculados nos extremos de um intervalo $]a, b[$, $a < b$, têm o mesmo sinal, pode-se concluir que a função possui um número par de raízes em $]a, b[$ ou não possui nenhuma raiz em $]a, b[$.

Após a análise desses exemplos, já estamos quase prontos para apresentar o teorema de Bolzano. Antes, porém, vamos estudar um lema que nos auxiliará na demonstração daquele teorema.

Lema

Se $P(x)$ é um polinômio de coeficientes reais com raízes reais e raízes imaginárias, então $P(x)$ pode ser fatorado como o produto $Q(x) \cdot T(x)$ de polinômios de coeficientes reais, em que todas as raízes de $Q(x)$ são reais, todas as raízes de $T(x)$ são imaginárias e $T(x) > 0$, $\forall x, x \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Sejam $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ as raízes reais de $P(x)$ e $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \ldots, z_m, \overline{z_m}$ suas raízes imaginárias.

Pelo teorema da decomposição de um polinômio, temos que:

$$P(x) \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_k)(x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2}) \cdot \ldots \cdot (x - z_m)(x - \overline{z_m}),$$

em que a_n é o coeficiente dominante de $P(x)$.

Observemos que, se $z_j = u + vi$, $u \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^*$, então $\overline{z_j} = u - vi$. Assim, temos:

$$(x - z_j)(x - \overline{z_j}) = x^2 - (z_j + \overline{z_j})x + z_j\overline{z_j} = x^2 - 2ux + u^2 + v^2 = (x - u)^2 + v^2 > 0, \ \forall x, x \in \mathbb{R}.$$

Logo, o polinômio $T(x) \equiv (x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2}) \cdot \ldots \cdot (x - z_m)(x - \overline{z_m})$ é tal que:

$$T(x) > 0, \ \forall x, x \in \mathbb{R}.$$

Concluímos, então, que $P(x) \equiv Q(x) \cdot T(x)$, em que:

- $Q(x) \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_k)$ tem coeficientes reais e todas as suas raízes são reais;
- $T(x) \equiv (x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2}) \cdot \ldots \cdot (x - z_m)(x - \overline{z_m})$ tem coeficientes reais, todas as suas raízes são imaginárias e $T(x) > 0, \ \forall x, x \in \mathbb{R}$. (c.q.d.)

2.1. Teorema de Bolzano

Sendo $P(x) = 0$ uma equação polinomial de coeficientes reais no universo $U = \mathbb{C}$ e sendo $]a, b[$ um intervalo real aberto, $a < b$, tem-se que:

- se $P(a)$ e $P(b)$ têm o mesmo sinal, então existe um número par de raízes em $]a, b[$ ou não existe raiz nesse intervalo;
- se $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes em $]a, b[$.

Demonstração

Primeiro caso: a equação $P(x) = 0$ admite raízes reais e raízes imaginárias.

Sejam $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ as raízes reais da equacão $P(x) = 0$; $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \ldots, z_m, \overline{z_m}$ as suas raízes imaginárias; e a_n o coeficiente dominante de $P(x)$.

Pelo lema da página anterior, podemos escrever $P(x) = Q(x) \cdot T(x)$, (I)

onde:

$$Q(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_k),$$

$$T(x) = (x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2}) \cdot \ldots \cdot (x - z_m)(x - \overline{z_m}) \text{ e } T(x) > 0, \ \forall x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Sendo r_j, $1 \leq j \leq k$, uma raiz real da equação $P(x) = 0$, temos duas possibilidades:

1ª) $r_j \in]a, b[$

Temos:

$$a < r_j < b \Rightarrow \begin{cases} a - r_j < 0 \\ b - r_j > 0 \end{cases} \therefore \ (a - r_j)(b - r_j) < 0.$$

2ª) $r_j \notin]a, b[$

Temos:

$$r_j < a < b \Rightarrow \begin{cases} a - r_j > 0 \\ b - r_j > 0 \end{cases} \therefore \ (a - r_j)(b - r_j) > 0 \text{ ou}$$

$$a < b < r_j \Rightarrow \begin{cases} a - r_j < 0 \\ b - r_j < 0 \end{cases} \therefore \ (a - r_j)(b - r_j) > 0.$$

Por essas duas análises, percebemos que $(a - r_j)(b - r_j)$ é negativo se, e somente se, r_j está entre a e b.

Por (I), podemos escrever:

$$P(a) = Q(a) \cdot T(a) \text{ e } P(b) = Q(b) \cdot T(b) \therefore P(a) \cdot P(b) = Q(a) \cdot Q(b) \cdot T(a) \cdot T(b).$$

Como $T(x) > 0$, $\forall x, x \in \mathbb{R}$, temos que $T(a) \cdot T(b) > 0$. Logo, o sinal do produto $P(a) \cdot P(b)$ é o mesmo sinal do produto $Q(a) \cdot Q(b)$:

$$Q(a) \cdot Q(b) = a_n(a - r_1)(a - r_2) \cdot \ldots \cdot (a - r_n)a_n(b - r_1)(b - r_2) \cdot \ldots \cdot (b - r_n)$$
$$\therefore Q(a) \cdot Q(b) = a_n^2[(a - r_1)(b - r_1)][(a - r_2)(b - r_2)][(a - r_3)(b - r_3)] \cdot \ldots \cdot [(a - r_n)(b - r_n)]. \text{ (II)}$$

Nesse produto, os fatores do tipo $[(a - r_j)(b - r_j)]$ serão negativos se, e somente se, r_j for uma raiz interna ao intervalo $]a, b[$. Assim, concluímos:

- se $P(a) \cdot P(b)$ é positivo, então $Q(a) \cdot Q(b)$ é positivo e, portanto, existe um número par de fatores $[(a - r_j)(b - r_j)]$ negativos no produto (II) ou não existe fator negativo nesse produto; assim, se $P(a)$ e $P(b)$ têm o mesmo sinal, então a equação $P(x) = 0$ tem um número par de raízes em $]a, b[$ ou não tem raiz nesse intervalo;
- se $P(a) \cdot P(b)$ é negativo, então $Q(a) \cdot Q(b)$ é negativo e, portanto, existe um número ímpar de fatores $[(a - r_j)(b - r_j)]$ negativos no produto (II); assim, se $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, então a equação $P(x) = 0$ tem um número ímpar de raízes em $]a, b[$.

Segundo caso: a equação $P(x) = 0$ admite apenas raízes reais $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$.

Temos que $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_k)$, em que a_n é o coeficiente dominante de $P(x)$.

Calculando $P(a) \cdot P(b)$, obtemos:

$$P(a) \cdot P(b) = a_n(a - r_1)(a - r_2)(a - r_3) \cdot \ldots \cdot (a - r_k)a_n(b - r_1)(b - r_2)(b - r_3) \cdot \ldots \cdot (b - r_k)$$
$$\therefore P(a) \cdot P(b) = a_n^2[(a - r_1)(b - r_1)][(a - r_2)(b - r_2)][(a - r_3)(b - r_3)] \cdot \ldots \cdot [(a - r_n)(b - r_n)].$$

Vimos, no primeiro caso, que $(a - r_j)(b - r_j)$ é negativo se, e somente se, r_j está entre a e b. Logo, os eventuais fatores negativos $[(a - r_j)(b - r_j)]$ do produto $P(a) \cdot P(b)$ são somente aqueles correspondentes às raízes internas ao intervalo $]a, b[$.

Assim, repetem-se as conclusões do primeiro caso.

Terceiro caso: a equação $P(x) = 0$ admite apenas raízes imaginárias $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \ldots, z_m, \overline{z_m}$.

Temos que $P(x) = a_n(x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2}) \cdot \ldots \cdot (x - z_m)(x - \overline{z_m})$.

Pelo lema da página 371, temos que o produto $(x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)(x - \overline{z_2}) \cdot \ldots \cdot (x - z_m)(x - \overline{z_m})$ é positivo para todo x real. Assim sendo, o sinal de $P(x)$ é o mesmo de a_n para todo x real. Logo, $P(a)$ e $P(b)$ têm o mesmo sinal.

Note, portanto, que o teorema continua válido também para esse caso, pois a equação $P(x) = 0$ não possui raízes em $]a, b[$.

(c.q.d.)

Nota: para a resolução de equações polinomiais, existem métodos por aproximações sucessivas que obtêm as eventuais raízes irracionais da equação, com qualquer aproximação desejada. Para a aplicação desses métodos, o teorema de Bolzano é de fundamental importância, pois mostra os intervalos onde estão essas raízes.

Exercícios resolvidos

R.9 Qual é o possível número de raízes da equação $2x^4 - 3x^3 - 1 = 0$ no intervalo $]1, 2[$?

Resolução

Sendo $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 1$, temos que:

$$P(1) = 2 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 1 \Rightarrow P(1) = -2;\ P(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 1 \Rightarrow P(2) = 7.$$

Como o grau da equação polinomial de **coeficientes reais** é 4, e $P(1)$ e $P(2)$ têm sinais contrários, concluímos que essa equação pode ter uma ou três raízes em $]1, 2[$.

R.10 Qual é o possível número de raízes da equação $x^6 - 6x - 3 = 0$ no intervalo $]-1, 2[$?

Resolução

Sendo $P(x) = x^6 - 6x - 3$, temos que:

$$P(-1) = (-1)^6 - 6(-1) - 3 \Rightarrow P(-1) = 4;\ P(2) = 2^6 - 6 \cdot 2 - 3 \Rightarrow P(2) = 49.$$

Como o grau da equação polinomial de **coeficientes reais** é 6, e $P(-1)$ e $P(2)$ têm o mesmo sinal, concluímos que essa equação pode não possuir raízes no intervalo $]-1, 2[$ ou possuir duas, quatro ou seis raízes nesse intervalo.

R.11 Para que valores reais de k a equação $2x^3 + x^2 + 2x + k = 0$ possui um número ímpar de raízes no intervalo $]-1, 1[$?

Resolução

Sendo $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + k$, temos que a equação admite um número ímpar de raízes no intervalo $]-1, 1[$ se, e somente se, $P(-1)$ e $P(1)$ têm sinais contrários, ou seja, $P(-1) \cdot P(1) < 0$.

Temos:

$$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 + 2(-1) + k \Rightarrow P(-1) = -3 + k;$$
$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 + 2 \cdot 1 + k \Rightarrow P(1) = 5 + k.$$

Assim, $P(-1) \cdot P(1) < 0 \Leftrightarrow (-3 + k)(5 + k) < 0$.

Estudando o sinal do produto:

		-5		3
$-3 + k$	$-$	$-$	0	$+$
$5 + k$	$-$	0	$+$	$+$
$(-3 + k)(5 + k)$	$+$	0	$-$	$+$

Logo, $-5 < k < 3$.

R.12 Seja a equação $ix^2 - 3x - 4i = 0$.

a) Sendo $P(x) = ix^2 - 3x - 4i$, mostrar que $P(-2)$ e $P(2)$ têm sinais contrários.

b) Através da fórmula de Bhaskara, mostrar que a equação $P(x) = 0$ não possui raízes reais.

c) Por (a) e (b), conclui-se que $P(-2)$ e $P(2)$ têm sinais contrários e que a equação **não** possui raízes reais no intervalo $]-2, 2[$. Esse exemplo contraria o teorema de Bolzano? Por quê?

Resolução

a) $P(-2) = i(-2)^2 - 3(-2) - 4i \Rightarrow P(-2) = 6;\ P(2) = i \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 4i \Rightarrow P(2) = -6$.

Logo, $P(-2)$ e $P(2)$ têm sinais contrários.

b) Os coeficientes da equação $ix^2 - 3x - 4i = 0$ são $a = i$, $b = -3$, $c = -4i$.

Assim: temos $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot i(-4i) \therefore \Delta = 9 + 16i^2 \therefore \Delta = 9 - 16 = -7$.

As raízes quadradas de Δ são $\sqrt{7}\,i$ e $-\sqrt{7}\,i$.

Pela fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{3 + \sqrt{7}\,i}{2i} \text{ ou } x = \frac{3 - \sqrt{7}\,i}{2i} \therefore x = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{3i}{2} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{3i}{2}.$$

Logo, a equação não possui raízes reais.

c) Esse exemplo não contraria o teorema de Bolzano, pois a hipótese do teorema exige que a equação polinomial tenha todos os **coeficientes reais** e a equação proposta apresenta o coeficiente a e o termo independente c imaginários.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7, B.8, B.10, B.13, B.16, B.18 (a, b), B.19, B.21, C.3, C.4, C.7.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.9, B.11, B.12, B.14, B.15, B.17, B.18 (c, d), B.20, B.22, C.1, C.2, C.5, C.6, C.8, C.9, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Sendo r_1 e r_2 as raízes da equação $2x^2 - \sqrt{3}\,x + \sqrt{6} = 0$, calcule:

a) $r_1 + r_2$;

b) $r_1 r_2$;

c) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$;

d) $r_1^2 + r_2^2$;

e) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$.

B.2 O conjunto solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$, é $S = \{r_1, r_2\}$. Calcule em função de a, b e c os seguintes valores:

a) $r_1 + r_2$;

b) $r_1 r_2$;

c) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$;

d) $r_1^2 + r_2^2$;

e) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$.

B.3 Sendo r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação $3x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$, calcule:

a) $r_1 + r_2 + r_3$;

b) $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$;

c) $r_1 r_2 r_3$;

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$;

e) $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$;

f) $(r_1 r_2)^2 + (r_1 r_3)^2 + (r_2 r_3)^2$;

g) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$.

B.4 O conjunto solução da equação $x^3 + x - 1 = 0$ é $S = \{r_1, r_2, r_3\}$. Calcule:

a) $r_1 + r_2 + r_3$;

b) $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$;

c) $r_1 r_2 r_3$;

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$;

e) $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$;

f) $(r_1 r_2)^2 + (r_1 r_3)^2 + (r_2 r_3)^2$;

g) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$.

B.5 Sendo $\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ o conjunto solução de $3x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 4x - 5 = 0$, escreva todas as relações de Girard para essa equação.

B.6 As raízes da equação $x^4 + 3x^2 - x = 0$ são r_1, r_2, r_3 e r_4. Escreva todas as relações de Girard para essa equação.

B.7 Calcule a soma dos inversos das raízes da equação $2x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1 = 0$.

B.8 Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - \sqrt{3}\,x^2 - 2x + 2\sqrt{3} = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a zero.

B.9 Duas raízes da equação $x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$ são opostas (simétricas). Resolva em $\mathbb{C}$ essa equação.

B.10 Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - 14x^2 - 288 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o dobro de outra.

B.11 Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - 208x - 768 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o triplo de outra.

B.12 Obtenha o valor real de k de modo que, dentre as raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x + k = 0$, uma das raízes seja o quádruplo de outra.

B.13 Determine k, $k \in \mathbb{R}$, sabendo que as raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x + k + 2 = 0$ formam uma progressão aritmética.

B.14 Obtenha k, $k \in \mathbb{R}$, sabendo que as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 11x + k - 8 = 0$ são números inteiros consecutivos.

B.15 Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - 60x^2 + 1100x - 6000 = 0$, sabendo que suas raízes estão em progressão aritmética.

B.16 Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $3x^4 - 19x^3 + 42x^2 - 36x + 8 = 0$, sabendo que uma de suas raízes tem multiplicidade 3.

B.17 Uma das raízes da equação $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24 = 0$ tem multiplicidade 3. Resolva em $\mathbb{C}$ essa equação.

B.18 Obtenha o possível número de raízes da equação $P(x) = 0$ no intervalo aberto I, em cada um dos seguintes casos:

a) $2x^4 - 3x^3 - 1 = 0$, $I =]1, 2[$;

b) $x^5 + 2x^4 - x + 1 = 0$, $I =]0, 1[$;

c) $2x^3 + 3x^2 - 6x - 10 = 0$, $I =]-1, 2[$;

d) $x^4 - x + 1 = 0$, $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

B.19 Para que valores reais de k a equação $3x^3 - 2x^2 + x + k = 0$ admite um número ímpar de raízes no intervalo $]0, 1[$?

B.20 Obtenha os valores reais de k de modo que a equação $2x^4 - 3x^2 - x + k^2 + 2 = 0$ admita um número ímpar de raízes no intervalo $]-1, 1[$.

B.21 Sabendo que a equação $3x^4 - 2x^3 + x + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$, não possui nenhuma raiz no intervalo $]1, 2[$, pode-se afirmar que:

a) $k < -34$.

b) $k > -2$.

c) $-34 < k < -2$.

d) $k \leq -34$ ou $k \geq -2$.

e) $k < -34$ ou $k > -2$.

B.22 A equação $5x^3 - 3x^2 + 2x + k = 0$ possui exatamente duas raízes no intervalo $]-1, 1[$. Assim, deve-se ter:

a) $k < -4$.

b) $k < -4$ ou $k > 10$.

c) $k \leq -4$ ou $k \geq 10$.

d) $-4 < k < 10$.

e) $-4 \leq k \leq 10$.

Exercícios complementares

C.1 Sendo r_1 e r_2 as raízes da equação $2x^2 - \sqrt{5}\,x + 4\sqrt{2} = 0$, calcule $r_1^3 + r_2^3$.

C.2 Sabendo que as raízes da equação $x^2 - 3x + k = 0$ são números inteiros e positivos, determine o valor de k.

C.3 As raízes r_1, r_2 e r_3 da equação $ax^3 + bx^2 + 1 = 0$, $a \neq 0$, são tais que $\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3} = 5$.

Determine o valor de b.

C.4 Obtenha o valor de k, sabendo que as raízes da equação $2x^3 - 7x^2 + kx - 2 = 0$ são reais e formam uma progressão geométrica.

C.5 Sendo α, β e γ as raízes da equação $x^3 - \sqrt{2}\,x^2 + 2x - 2\sqrt{2} = 0$, calcule $\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2$.

C.6 Determine o valor de m, sabendo que as raízes da equação $x^4 + x^3 + kx^2 + 2x + m = 0$ estão em progressão geométrica.

C.7 Considere a equação $x^3 - 6x^2 + kx - 6 = 0$, na variável x, cujas raízes são r_1, r_2 e r_3.

a) Obtenha o valor de k, sabendo que um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões, em centímetros, r_1, r_2 e r_3 tem área total igual a 22 cm².

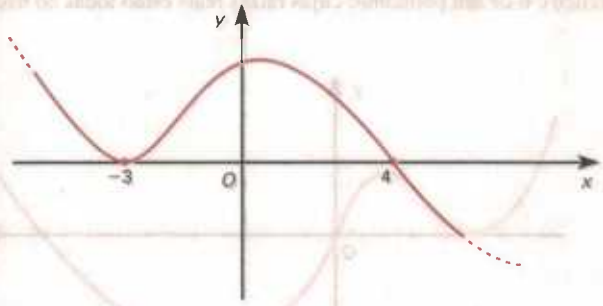
b) Resolva a equação, substituindo k pelo valor obtido no item (a).

C.8 Considere a equação $2x^3 - kx^2 + 7x - 2 = 0$, na variável x.

a) Obtenha k, sabendo que duas das raízes dessa equação são inversas entre si.

b) Resolva a equação, substituindo k pelo valor obtido no item (a).

C.9 O gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0\} \subset \mathbb{R}$, é:



Assinale a afirmação verdadeira:

a) -3 é raiz simples.

b) -3 é raiz de multiplicidade par.

c) 4 pode ser raiz dupla.

d) Se não houver mais raízes reais além de -3 e 4, então o menor valor possível de n é 5.

e) Se não houver mais raízes reais e $\alpha > 4$, então se pode ter $f(\alpha) > 0$.

C.10 Mostre que a equação $2x^4 - \sqrt{2}x^3 + x^2 - 5 = 0$ admite uma raiz positiva menor do que $\sqrt{2}$.

C.11 Todas as raízes do polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, com $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0\} \subset \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$, são imaginárias. Pode-se afirmar que, para qualquer intervalo $]a, b[$, $a < b$, tem-se:

a) $P(a) > 0$ e $P(b) > 0$.

b) $P(a) < 0$ e $P(b) > 0$.

c) $\frac{P(a)}{P(b)} > 0$.

d) $P(a) + P(b) = 0$.

e) $P(a) - P(b) = 0$.

C.12 Para que valores reais de a a equação $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ admite um número ímpar de raízes no intervalo $]-1, a[$?

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) As equações $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e $x^2 + x - 2 = 0$ têm o mesmo conjunto solução. Quais os possíveis valores de b, c e d?

V.2 (Fuvest-SP) Uma das raízes da equação $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$ é -1. Determinar m para que as outras raízes sejam reais.

V.3 (ITA-SP) Se a, b e c são raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, então o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ é:

a) $\frac{1}{4}$.

b) $-\frac{1}{4}$.

c) $\frac{3}{4}$.

d) $\frac{3}{2}$.

e) Nenhuma das respostas anteriores.

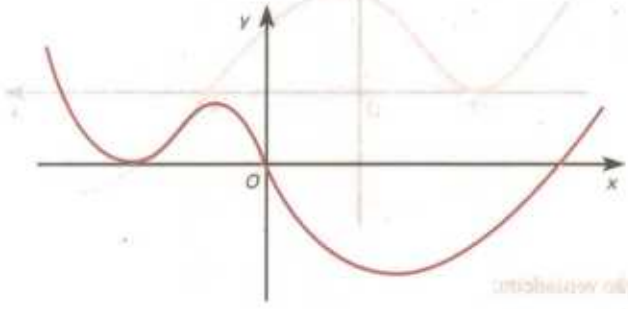
V.4 (Cesgranrio) O produto de duas raízes da equação $2x^3 - 19x^2 + 37x - 14 = 0$ é 1. A soma das duas maiores raízes da equação é:

a) 7. b) 8. c) 9. d) $\frac{19}{2}$. e) 19.

V.5 (Unicamp-SP) O valor de k, $k \in \mathbb{R}$, tal que a função $y = x^3 - 2x^2 + 3x - k$ tenha uma única raiz entre 2 e 3 é:

a) $k < 6$ ou $k > 18$.
b) $k > 0$.
c) $k < 0$.
d) $k < 6$.
e) $6 < k < 18$.

V.6 (Cescem) O gráfico é o de um polinômio cujas raízes reais estão todas no trecho desenhado.



Esse polinômio:

a) pode ser do 3º grau.
b) pode ser do 5º grau.
c) pode ser do 6º grau.
d) pode ser quadrado perfeito.
e) Nenhuma das respostas anteriores.

Capítulo 23
Limite de uma função

1. Revisão de alguns pré-requisitos para a teoria dos limites

1.1. Módulo de um número real

Definição

Para todo real x, tem-se que:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Exemplos

a) $|5| = 5$. b) $|0| = 0$. c) $|-5| = 5$.

Propriedades do módulo

M.1 $|x| \geqslant 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$.

M.2 $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

M.3 $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d, \forall d, d \in \mathbb{R}_+$.

M.4 $|x||y| = |xy|, \forall \{x, y\}, \{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

M.5 $|x|^n = x^n \Leftrightarrow n$ é par, $\forall x, x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

M.6 $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|, \forall \{x, y\}, \{x, y\} \subset \mathbb{R}$ e $y \neq 0$.

M.7 $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a, \forall \{x, a\}, \{x, a\} \subset \mathbb{R}$.

M.8 $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a,\ \forall a,\ a \in \mathbb{R}_+$.

M.9 $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a,\ \forall a,\ a \in \mathbb{R}_+^*$.

OBS.: Quando > ou ≥, são disjuntos.

M.10 $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a,\ \forall a,\ a \in \mathbb{R}_+$.

M.11 $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a,\ \forall a,\ a \in \mathbb{R}_+$.

M.12 $-|x| \leq x \leq |x|,\ \forall x,\ x \in \mathbb{R}$.

M.13 Desigualdade triangular. Para quaisquer reais x e y, tem-se que:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Vamos demonstrar as propriedades M.12 e M.13, deixando as demais para você revisar no volume 1 desta obra.

Demonstração de M.12

Primeiro caso: $x \geq 0$

Para $x \geq 0$, temos que $\begin{cases} |x| = x & \text{(I)} \\ -x \leq x \leq x. & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos $-|x| \leq x \leq |x|$.

Segundo caso: $x \leq 0$

Para $x \leq 0$, temos que $\begin{cases} |x| = -x & \text{(III)} \\ x \leq x \leq -x. & \text{(IV)} \end{cases}$

Substituindo (III) em (IV), obtemos $-|x| \leq x \leq |x|$.
Pelo primeiro e segundo caso, temos $-|x| \leq x \leq |x|,\ \forall x,\ x \in \mathbb{R}$.

(c.q.d.)

Demonstração de M.13

Pela propriedade M.12 temos $-|x| \leq x \leq |x|,\ \forall x,\ x \in \mathbb{R}$ e $-|y| \leq y \leq |y|,\ \forall y,\ y \in \mathbb{R}$.
Somando membro a membro essas desigualdades, obtemos $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$.
Finalmente, pela propriedade M.8, concluímos que: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Sendo x e y números reais quaisquer, provar que:
a) $|x - y| \leq |x| + |y|$; b) $|x| - |y| \leq |x - y|$.

Resolução
a) Temos que: $|x - y| = |x + (-y)|$. (I)

Pela desigualdade triangular (M.13), temos ainda que:

$$|x + (-y)| \leq |x| + |-y|, \text{ ou seja, } |x + (-y)| \leq |x| + |y|. \quad \text{(II)}$$

Por (I) e (II), concluímos: $|x - y| \leq |x| + |y|$.

(c.q.d.)

b) Temos que: $|x| = |(x - y) + y|$. **(I)**

Pela desigualdade triangular (M.13), temos ainda que: $|(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$. **(II)**

Por (I) e (II), podemos escrever:

$$|x| \leq |x - y| + |y|, \text{ ou seja, } |x| - |y| \leq |x - y|.$$

(c.q.d.)

R.2 Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, provar que $|x| < \frac{a}{2}$ e $|y| < \frac{a}{2} \Rightarrow |x + y| < a$.

Resolução

Pela desigualdade triangular (M.13), temos que: $|x + y| \leq |x| + |y|$. **(I)**

Por hipótese, temos:

$$|x| < \frac{a}{2} \quad \text{(II)} \quad \text{e} \quad |y| < \frac{a}{2}. \quad \text{(III)}$$

Assim, podemos escrever: $|x + y| \leq |x| + |y| < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a \therefore |x + y| < a$.

(c.q.d.)

1.2. Operações com funções

Sendo as funções reais de variável real $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: B \to \mathbb{R}$, definem-se:

$$(f + g): A \cap B \to \mathbb{R} \text{ tal que } (f + g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$(f - g): A \cap B \to \mathbb{R} \text{ tal que } (f - g)(x) = f(x) - g(x);$$

$$(f \cdot g): A \cap B \to \mathbb{R} \text{ tal que } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);$$

$$\frac{f}{g}: (A \cap B) - \{x \in B | g(x) = 0\} \to \mathbb{R} \text{ tal que } \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exemplo

Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x + 3$, temos:

- $(f + g)(2) = f(2) + g(2) = 2^2 + (2 + 3) = 9$;
- $(f - g)(5) = f(5) - g(5) = 5^2 - (5 + 3) = 17$;
- $(f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3) = 3^2 (3 + 3) = 54$;
- $\frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1^2}{1 + 3} = \frac{1}{4}$.

Exercício resolvido

R.3 Sendo $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$ e $g(x) = \log_4 x$, determinar:

a) o domínio de f;
b) o domínio de g;
c) o domínio de $f + g$;
d) $(f + g)(4)$;
e) $(f + g)(x)$, $\forall x, x \in D(f + g)$.

Resolução

a) O domínio de f é o conjunto dos reais x tais que $8 - 2x \geqslant 0$, ou seja, $-2x \geqslant -8 \Rightarrow x \leqslant 4$.
Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$.

b) O domínio de g é o conjunto dos reais x tais que $x > 0$, ou seja, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

c) $D(f + g) = D(f) \cap D(g) \therefore D(f + g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 4\}$.

d) $(f + g)(4) = f(4) + g(4) = \sqrt{8 - 2 \cdot 4} + \log_4^4 = 0 + 1 = 1$.

e) $(f + g)(x) = \sqrt{8 - 2x} + \log_4 x$.

1.3. Máximo e mínimo de um conjunto

Definição

Sendo A um conjunto de números reais, um número a é chamado de "**máximo** do conjunto A" se, e somente se, $a \in A$ e $a \geqslant x$, $\forall x, x \in A$.

Indicamos o máximo do conjunto A por **máx**(A).

Exemplos

a) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos que máx$(A) = 5$.
b) Sendo $A = [3, 8]$, temos que máx$(A) = 8$.
c) Sendo $A = [3, 8[$, temos que não existe máx(A).

Definição

Sendo A um conjunto de números reais, um número a é chamado de "**mínimo** do conjunto A" se, e somente se, $a \in A$ e $a \leqslant x$, $\forall x, x \in A$.

Indicamos o mínimo de um conjunto A por **mín**(A).

Exemplos

a) Sendo $A = \{9, 10, 11, 12\}$, temos que mín$(A) = 9$.
b) Sendo $A = [3, 10]$, temos que mín$(A) = 3$.
c) Sendo $A =]3, 10]$, temos que não existe mín(A).

Exercício resolvido

R.4 Sendo $A = \{x, x^2\}$, para que valores reais de x tem-se que mín$(A) = x$?

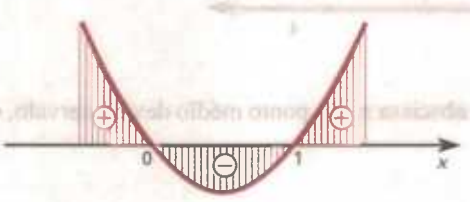
Resolução

$$\text{mín}(A) = x \Leftrightarrow x \leqslant x^2 \therefore \text{mín}(A) = x \Leftrightarrow x^2 - x \geqslant 0$$

- Raízes de $f(x) = x^2 - x$

$$x^2 - x = 0 \therefore x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

- Variação de sinal de $f(x) = x^2 - x$



Observando esse gráfico, temos que $x^2 - x \geqslant 0$ se, e somente se, $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$.

Logo, mín$(A) = x$ para todo real x, tal que $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$.

2. Vizinhanças em $\mathbb{R}$

2.1. Vizinhança completa de um número real

Definição

No conjunto dos números reais, chama-se **vizinhança completa** de um número a, que indicamos por $V(a)$, qualquer **intervalo aberto** $]p, q[$ tal que $a \in]p, q[$.

Exemplos

a) $]3, 8[$ é uma vizinhança completa do número 7, pois $7 \in]3, 8[$.

b) $]3, 8[$ é uma vizinhança completa do número 6, pois $6 \in]3, 8[$.

c) $]3, 8[$ é vizinhança completa de qualquer número a, tal que $3 < a < 8$.

2.2. Vizinhança completa simétrica de um número real

Definição

No conjunto dos números reais, **vizinhança completa simétrica** com raio δ, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, de um número a, que indicamos por $V(a, \delta)$, é o **intervalo aberto** $]a - \delta, a + \delta[$.

Exemplos

a) $]-4, 4[$ é uma vizinhança completa simétrica com raio 4 do número 0 (zero), pois 0 é a abscissa do ponto médio do intervalo.

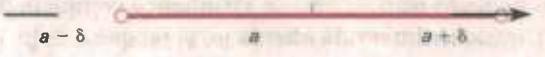
b) $]2, 8[$ é uma vizinhança completa simétrica da abscissa x_M do ponto médio deste intervalo, ou seja, $x_M = \frac{2+8}{2} = 5$.

Note que o raio dessa vizinhança é 3.

Propriedade

Em $\mathbb{R}$, um número x pertence a uma vizinhança $V(a, \delta)$ completa simétrica com raio δ, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, de um número a se, e somente se, $|x - a| < \delta$.

Demonstração



- $x \in V(a, \delta) \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$;
- $a - \delta < x < a + \delta \Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta$;
- $-\delta < x - a < \delta \Leftrightarrow |x - a| < \delta$.

Logo, $x \in V(a, \delta) \Leftrightarrow |x - a| < \delta$.

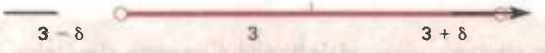
(c.q.d.)

Exemplos

a) Um número x pertence à vizinhança $V(a, 5)$ se, e somente se, $|x - a| < 5$. Observe por quê:

$$x \in V(a, 5) \Leftrightarrow a - 5 < x < a + 5 \therefore -5 < x - a < 5 \therefore |x - a| < 5.$$

b) Um número x pertence a $]3 - \delta, 3 + \delta[$, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, se, e somente se, $|x - 3| < \delta$. Observe por quê:



$$x \in]3 - \delta, 3 + \delta[\Leftrightarrow 3 - \delta < x < 3 + \delta \therefore -\delta < x - 3 < \delta \therefore |x - 3| < \delta.$$

2.3. Vizinhança reduzida de um número real

Definição

No conjunto dos números reais, chama-se "**vizinhança reduzida** de um número a", que indicamos por $\overline{V}(a)$, o complementar do conjunto $\{a\}$ em relação a qualquer vizinhança completa a $V(a)$, ou seja:

$$\overline{V}(a) = V(a) - \{a\}.$$

Exemplo

$]3, 8[- \{7\}$ é uma vizinhança reduzida do número 7.

2.4. Vizinhança reduzida simétrica de um número real

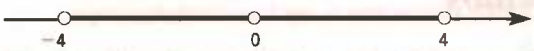
Definição

No conjunto dos números reais, chama-se **vizinhança reduzida simétrica** com raio δ, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, de um número real a, que indicamos por $\overline{V}(a, \delta)$, o complementar do conjunto $\{a\}$ em relação à vizinhança completa simétrica $V(a, \delta)$, ou seja:

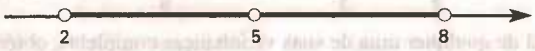
$$\overline{V}(a, \delta) = V(a, \delta) - \{a\}.$$

Exemplos

a) $]-4, 4[- \{0\}$ é uma vizinhança reduzida simétrica com raio 4 do número 0 (zero).



b) $]2, 8[- \{5\}$ é uma vizinhança reduzida simétrica com raio 3 do número 5.



Propriedade

Em $\mathbb{R}$, um número x pertence a uma vizinhança $\overline{V}(a, \delta)$ reduzida simétrica com raio δ, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, de um número a se, e somente se, $0 < |x - a| < \delta$.

Demonstração

- $x \in \overline{V}(a, \delta) \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$ e $x \neq a$;
- $a - \delta < x < a + \delta$ e $x \neq a \Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta$ e $x \neq a$;
- $-\delta < x - a < \delta$ e $x \neq a \Leftrightarrow |x - a| < \delta$ e $x \neq a$;
- $|x - a| < \delta$ e $x \neq a \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \delta$.

Logo, $x \in \overline{V}(a, \delta) \Leftrightarrow 0 < |x - a| < \delta$.

(c.q.d.)

Exemplos

a) O número x pertence à vizinhança $\overline{V}(a, 5)$ se, e somente se, $0 < |x - a| < 5$. Observe por quê:

$x \in \overline{V}(a, 5) \Leftrightarrow a - 5 < x < a + 5$ e $x \neq a \therefore -5 < x - a < 5$ e $x \neq a$
$\therefore |x - a| < 5$ e $x \neq a \therefore 0 < |x - a| < 5$.

b) Um número x pertence a $]3, -\delta, 3 + \delta[- \{3\}$, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, se, e somente se, $0 < |x - 3| < \delta$. Observe por quê:

$x \in]3 - \delta, 3 + \delta[- \{3\} \Leftrightarrow 3 - \delta < x < 3 + \delta$ e $x \neq 3$
$\therefore -\delta < x - 3 < \delta$ e $x \neq 3 \therefore |x - 3| < \delta$ e $x \neq 3 \therefore 0 < |x - 3| < \delta$.

Exercícios resolvidos

R.5 Determinar uma vizinhança completa e uma vizinhança reduzida do número 3.

Resolução

Qualquer intervalo aberto que possui o número 3 como elemento é uma vizinhança completa de 3. Assim, o intervalo $]2, 5[$,

, é uma vizinhança completa de 3.

Excluindo o número 3 de qualquer uma de suas vizinhanças completas, obtém-se uma vizinhança reduzida de 3. Assim, o conjunto $]2, 5[- \{3\}$,

, é uma vizinhança reduzida de 3.

R.6 Determinar uma vizinhança completa simétrica e uma vizinhança reduzida simétrica do número 3.

Resolução

Qualquer intervalo aberto do tipo $]3 - \delta, 3 + \delta[$, como $\delta > 0$, é vizinhança completa simétrica com raio δ do número 3. Assim, o intervalo $]1, 5[$,

, é uma vizinhança completa simétrica com raio 2 do número 3.

Excluindo o número 3 de qualquer uma de suas vizinhanças completas simétricas, obtém-se uma vizinhança reduzida simétrica do número 3. Assim, o conjunto $]1, 5[- \{3\}$,

, é uma vizinhança reduzida simétrica com raio 2 do número 3.

R.7 Representar no eixo real os números x tais que:

a) $|x| < 5$;
b) $|x - 4| < 2$;
c) $0 < |x + 4| < 3$.

Resolução

a) $|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$.

Logo, a representação no eixo real é:

b) $|x - 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 4 < 2 \therefore 2 < x < 6$.

Logo, a representação no eixo real é:

c) $0 < |x + 4| < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 4| < 3 \\ x \neq -4, \text{ pois, para } x = -4, \text{ tem-se } |-4 + 4| = 0. \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} -3 < x + 4 < 3 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 < x < -1 \\ x \neq -4. \end{cases}$$

Logo, a representação no eixo real é:

R.8 Obter uma inequação modular cuja representação gráfica no eixo real é:

a)

b)

c)

Resolução

a) Todo x desse intervalo satisfaz a desigualdade $-3 < x < 3$. Essa inequação pode ser escrita sob a forma $|x| < 3$.

b) Todo x desse intervalo é tal que $1 < x < 9$. Subtraindo de cada membro a abscissa x_M do ponto médio do intervalo $]1, 9[$, isto é, $x_M = \frac{1+9}{2} = 5$, temos $1 - 5 < x - 5 < 9 - 5 \Leftrightarrow -4 < x - 5 < 4$.

Essa última desigualdade pode ser escrita sob a forma $|x - 5| < 4$.

c) Todo x desse conjunto é tal que $\begin{cases} -4 < x < 8 \\ x \neq 2. \end{cases}$

Subtraindo de cada membro da 1ª desigualdade a abscissa x_M do ponto médio do intervalo $]-4, 8[$, isto é, $x_M = \frac{-4+8}{2} = 2$, temos:

$$\begin{cases} -4 - 2 < x - 2 < 8 - 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x - 2 < 6 \\ x \neq 2 \end{cases} \therefore \begin{cases} |x - 2| < 6 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < |x - 2| < 6.$$

3. O conceito de limite

3.1. Introdução

Usamos a palavra **limite** no nosso cotidiano para indicar, genericamente, um ponto que pode ser eventualmente atingido mas que jamais pode ser ultrapassado.

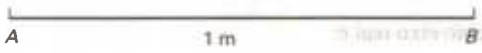
Exemplos

a) Injetando ininterruptamente ar em um balão de borracha, haverá um momento em que ele estoura. Isso porque existe o **limite** de elasticidade da borracha.

b) Um engenheiro ao construir um elevador estabelece o **limite** de carga que este suporta.

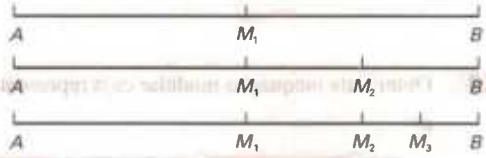
c) No lançamento de um foguete, os cientistas devem conhecer o **limite** mínimo de combustível necessário para que a aeronave entre em órbita.

É importante ter em mente que o limite pode ser um ponto que nunca é atingido mas do qual pode-se aproximar tanto quanto se desejar. Considere, por exemplo, um segmento de reta de medida 1 m:



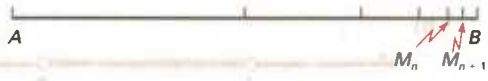
Sejam:

- M_1 o ponto médio de $\overline{AB}$;
- M_2 o ponto médio de $\overline{M_1B}$;
- M_3 o ponto médio de $\overline{M_2B}$;



⋮

- M_{n+1} o ponto médio de $\overline{M_nB}$.



⋮

Obtêm-se desse modo infinitos segmentos de reta:

$$\overline{AM_1}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_2M_3}, \overline{M_3M_4}, ..., \overline{M_nM_{n+1}}, ...$$

Somando os cinqüenta primeiros segmentos dessa seqüência, ou seja:

$$\overline{AM_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + ... + \overline{M_1M_{50}},$$

obtém-se o segmento $\overline{AB}$?

Claro que não, pois ainda há infinitos segmentos a serem somados para se obter o segmento $\overline{AB}$. Por mais que se somem segmentos daquela seqüência, jamais obteremos o segmento $\overline{AB}$; porém podemos nos aproximar de $\overline{AB}$ tanto quanto desejarmos.

Observe, portanto, que $\overline{AB}$ é o limite daquela soma, mas esse limite jamais é atingido.

O conceito intuitivo de limite pode ser formalizado matematicamente. Essa formalização foi feita por Isaac Newton e por Gottfried Wilhelm Leibniz. Iniciaremos neste capítulo o aprendizado do método de Newton e Leibniz para o cálculo de limites de funções.

J. BURGESS/SPL-STOCK PHOTOS

Isaac Newton (1642-1727), físico e matemático inglês. Dentre suas muitas contribuições à ciência, destaca-se o cálculo diferencial e integral.

SPL-STOCK PHOTOS

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filósofo e matemático alemão. Descobriu, quase ao mesmo tempo que Newton, o cálculo diferencial e integral.

3.2. Definição de limite

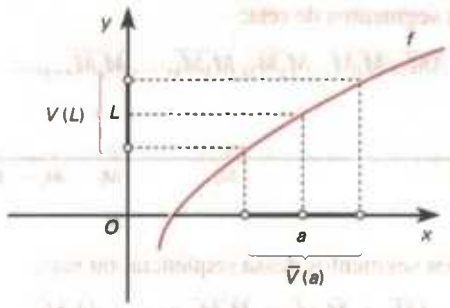
Inicialmente vamos conceituar limite de uma função $y = f(x)$, para x tendendo a um número real a, se existir uma vizinhança reduzida de a contida no domínio de f. No entanto, pode-se definir limite para outros tipos de função – função de variável racional ou, como veremos no capítulo 30, função de variável inteira.

Vamos apresentar a seguir a definição de limite sob duas formas equivalentes – a primeira tem como objetivo fixar o conceito e a segunda visa operar com o limite.

Definição 1

Seja f uma função real de variável real e seja a, $a \in \mathbb{R}$, tal que existe uma vizinhança reduzida de a contida no domínio de f.

O limite dos valores $f(x)$ para x tendendo a a é o número real L se, e somente se, para qualquer vizinhança completa de L, $V(L)$, existe alguma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, de modo que **todo** elemento x de $\overline{V}(a)$ possua imagem $f(x)$ em $V(L)$.

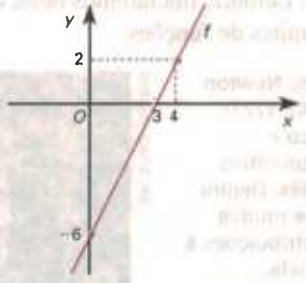


Indicamos que o limite de $f(x)$ para x tendendo a a é igual a L por:

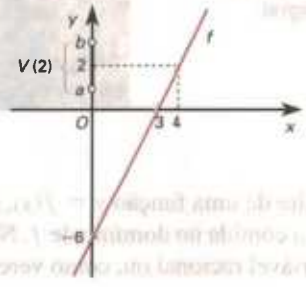
$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Exemplos

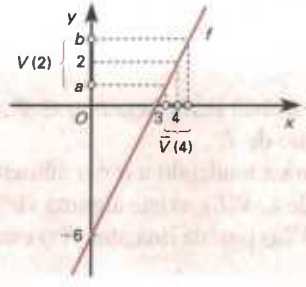
a) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é a reta:



Consideremos no eixo Oy uma vizinhança completa $]a, b[$ qualquer de 2:



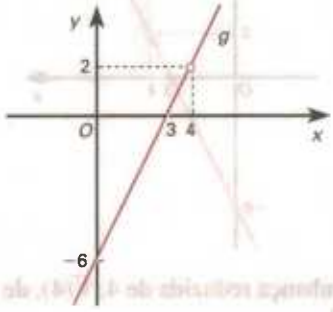
Note que, para quaisquer reais a e b tais que $a < 2 < b$, é possível determinar-se no eixo Ox uma vizinhança reduzida de 4, $\overline{V}(4)$, tal que os elementos dessa vizinhança tenham imagens em $]a, b[$:



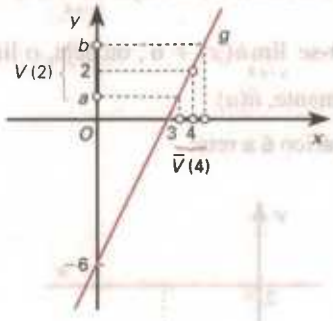
Por isso concluímos que $\lim_{x \to 4} f(x) = 2$.

Observe que, nesse caso, o limite é um valor assumido pela função, pois $f(4) = 2$. Você verá no próximo exemplo que o limite pode ser um valor que não é assumido pela função.

b) Sendo $E = \mathbb{R} - \{4\}$, consideremos a função $g: E \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é a mesma reta do exemplo (a) com exceção do ponto (4, 2).



Para qualquer vizinhança completa $]a, b[$ de 2, no eixo Oy, é possível determinar-se no eixo Ox uma vizinhança reduzida de 4, $\overline{V}(4)$, tal que os elementos dessa vizinhança tenham imagens em $]a, b[$:

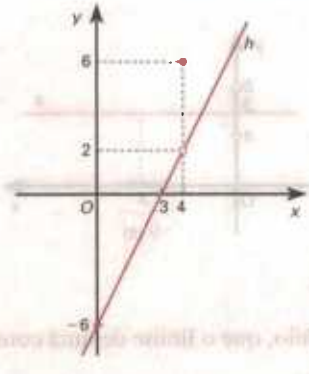


Por isso, podemos concluir que $\lim_{x \to 4} g(x) = 2$.

Note que:

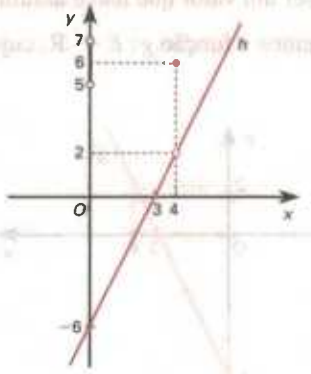
- apesar de 4 não pertencer ao domínio da função, pode-se calcular o limite de $g(x)$ para x tendendo a 4;
- apesar de 2 não pertencer ao conjunto imagem da função g, o limite de $g(x)$ para x tendendo a 4 é 2.

c) Considere a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é o do exemplo (b) reunido com o conjunto $\{(4, 6)\}$:



Qual é o limite de $h(x)$ para x tendendo a 4? É o número 6?

Vejamos. Seja a vizinhança completa $]5, 7[$ de 6:

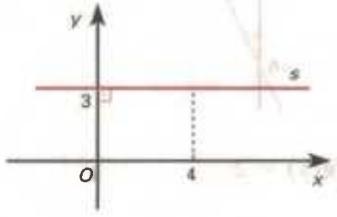


Será que existe no eixo Ox uma vizinhança reduzida de 4, $\overline{V}(4)$, de modo que qualquer elemento dessa vizinhança tenha imagem em $]5, 7[$?

A resposta é não, pois toda vizinhança reduzida de 4 possui algum elemento x com imagem $h(x)$ menor do que 5 e, portanto, $h(x)$ não pertence ao intervalo $]5, 7[$ do eixo Oy. Logo, o limite de $h(x)$ para x tendendo a 4 **não** é 6. Esse limite é o número 2, ou seja, $\lim_{x \to 4} h(x) = 2$, obtido repetindo-se o raciocínio do exemplo (b).

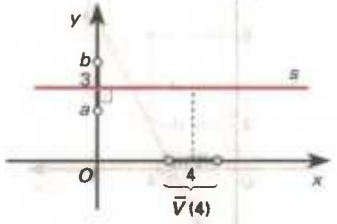
Note que, apesar de $h(4) = 6$, tem-se $\lim_{x \to 4} h(x) \neq 6$, ou seja, o limite de uma função qualquer $h(x)$ para x tendendo a a não é, necessariamente, $h(a)$.

d) Seja a função s: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é a reta:



Qual é o limite dos valores $s(x)$ quando x tende a 4?

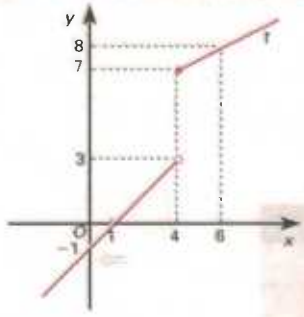
Dada uma vizinhança completa qualquer $]a, b[$ de 3, no eixo Oy, temos que existe no eixo Ox alguma vizinhança reduzida de 4, $\overline{V}(4)$, de modo que todos os elementos x dessa vizinhança tenham imagens $s(x) = 3$ e que, portanto, $s(x) \in]a, b[$. Observe:



Portanto $\lim_{x \to 4} s(x) = 3$.

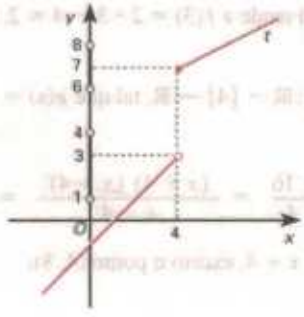
Podemos concluir, por esse raciocínio, que o limite de uma constante é ela mesma.

e) Observemos a função $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é constituído pelas semi-retas:



Qual é o limite de $t(x)$ para x tendendo a 4? É 3 ou 7?

Tomemos a vizinhança completa]6, 8[de 7, no eixo Oy:



Note que, no eixo Ox, qualquer vizinhança reduzida de 4, $\overline{V}(4)$, possui algum elemento x com imagem $t(x)$ menor do que 3 e, portanto, $t(x)$ não pertence a]6, 8[.

Concluímos assim que 7 não é o limite de $t(x)$ com x tendendo a 4.

Analogamente, tomando no eixo Oy a vizinhança completa]1, 4[de 3, percebe-se que no eixo Ox não existe vizinhança reduzida de 4 na qual todos os elementos têm imagens em]1, 4[.

Logo, 3 não é o limite de $t(x)$ para x tendendo a 4.

Na verdade, não existe $\lim\limits_{x \to 4} t(x)$. Para provar essa afirmação, suponhamos que esse limite exista e seja igual a L. Temos as alternativas:

I. $L > 7$; **IV.** $L = 3$;
II. $L = 7$; **V.** $L < 3$.
III. $3 < L < 7$;

As alternativas (II) e (IV) já vimos que não ocorrem.

Analisemos a alternativa (I), isto é, $L > 7$. Seja a vizinhança completa]7, b[de L. Qualquer vizinhança reduzida de 4, $\overline{V}(4)$, possui algum elemento x com imagem $t(x)$ menor que 3; logo, $t(x) \notin]7, b[$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to 4} t(x)$ não pode ser maior do que 7.

De modo análogo, prova-se que (III) e (V) também não ocorrem.

Portanto, não existe $\lim\limits_{x \to 4} t(x)$.

Exercícios resolvidos

R.9 A partir do gráfico da função f, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 4$, calcular $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

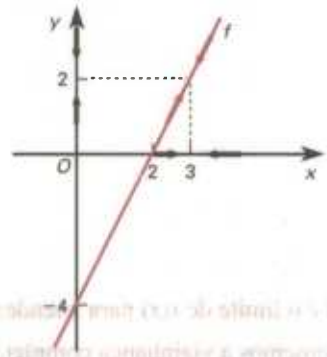
Resolução

O gráfico de f é uma reta e, portanto, para construí-lo basta determinarmos dois de seus pontos.

$f(x)$

x	$2x - 4$
0	-4
2	0

$\Rightarrow$



Note que, quando x tende a 3, $f(x)$ tende a $f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$. Logo, $\lim\limits_{x \to 3}(2x - 4) = 2$.

R.10 Construir o gráfico da função g, $g: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$, e calcular $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$.

Resolução

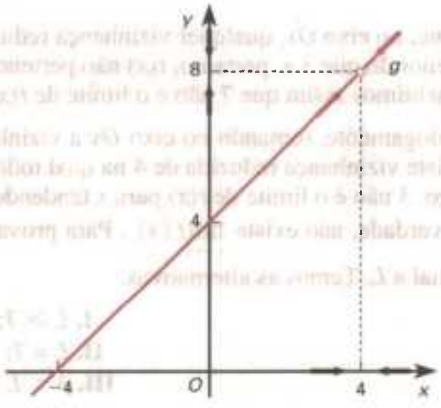
$$g(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x + 4)\,\cancel{(x - 4)}}{\cancel{x - 4}} = x + 4, \text{ para } x \neq 4.$$

Assim, o gráfico de g é a reta $y = x + 4$, exceto o ponto (4, 8):

$g(x)$

x	$x + 4$
0	4
-4	0

$\Rightarrow$



Note que, quando x tende a 4, $g(x)$ tende a 8. Assim temos: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$.

Observe ainda que, apesar de a função não estar definida para $x = 4$, existe $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$.

R.11 Através do gráfico da função h, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ se } x \neq 2 \\ 1, \text{ se } x = 2, \end{cases}$ obter $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$.

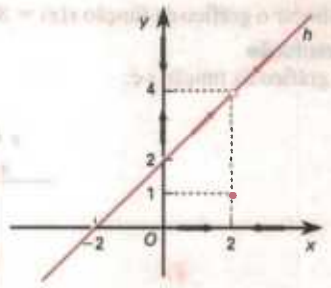
Resolução

Como $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x + 2)\,\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} = x + 2$, para $x \neq 2$, temos que $h(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ para } x \neq 2 \\ 1, \text{ para } x = 2. \end{cases}$

$h(x)$

x	$x + 2$
0	2
−2	0

$\Rightarrow$



Note que, quando x tende a 2, $h(x)$ tende a 4. Assim, temos: $\lim_{x \to 2} h(x) = 4$.

Observe também que $h(2) = 1$ e, portanto, $\lim_{x \to 2} h(x) \neq h(2)$.

R.12 Construir o gráfico da função t, $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = \begin{cases} 2x - 6, \text{ se } x \leq 4 \\ x - 2, \text{ se } x > 4, \end{cases}$ e determinar $\lim_{x \to 4} t(x)$.

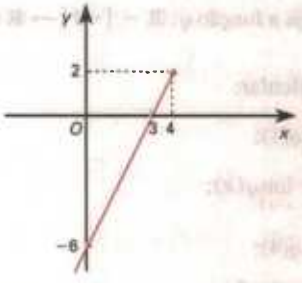
Resolução

Para $x \leq 4$, temos:

$t(x)$

x	$2x - 6$
0	−6
4	2

$\Rightarrow$

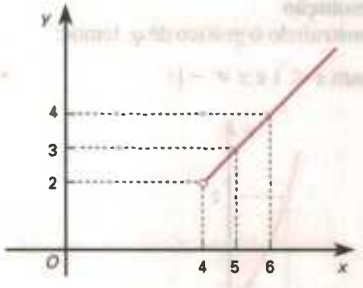


Para $x > 4$, temos:

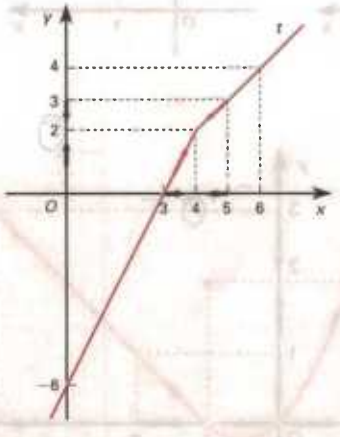
$t(x)$

x	$x - 2$
5	3
6	4

$\Rightarrow$



Assim, o gráfico de t é:

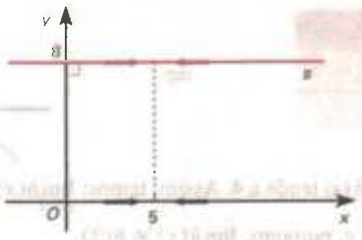


Note que, quando x tende a 4, $t(x)$ tende a 2. Logo, temos $\lim_{x \to 4} t(x) = 2$.

R.13 Esboçar o gráfico da função $s(x) = 8$ e calcular $\lim_{x \to 5} s(x)$.

Resolução

O gráfico da função s é:



Note que, para x tendendo a 5, $s(x)$ tende a $s(5) = 8$. Logo, temos $\lim_{x \to 5} 8 = 8$.

O limite de uma constante é ela mesma.

R.14 Seja a função $q: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ tal que $q(x) = \begin{cases} x^2 - x, \text{ se } x < 1 \text{ e } x \neq -1 \\ 2, \text{ se } x = 1 \\ x - 1, \text{ se } x > 1. \end{cases}$

Calcular:

a) $q(1)$;

b) $\lim_{x \to 1} q(x)$;

c) $q(4)$;

d) $\lim_{x \to 4} q(x)$;

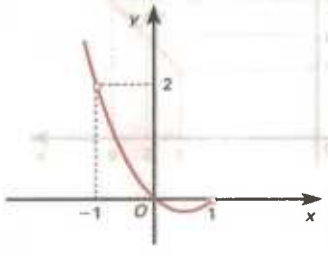
e) $q(-1)$;

f) $\lim_{x \to -1} q(x)$.

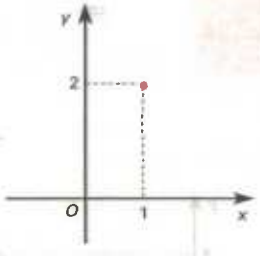
Resolução

Construindo o gráfico de q, temos:

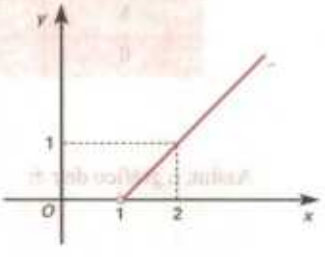
• para $x < 1$ e $x \neq -1$:



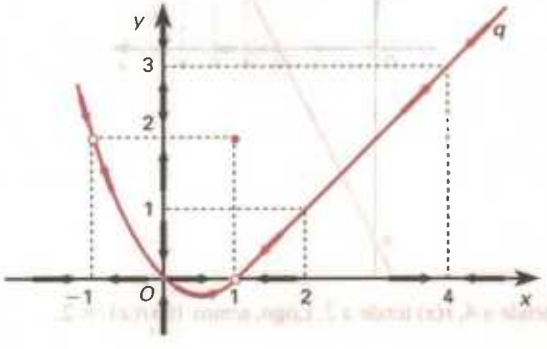
• para $x = 1$:



• para $x > 1$:



Logo, o gráfico de q é:



Assim, temos:

a) $q(1) = 2$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} q(x) = 0$;

c) $q(4) = 4 - 1 = 3$;

d) $\lim\limits_{x \to 4} q(x) = 3$;

e) não existe $q(-1)$;

f) $\lim\limits_{x \to -1} q(x) = 2$.

3.3. Outra forma da definição de limite

A definição 1 de limite (página 389) pode ser enunciada sob uma forma equivalente, que oferece algumas vantagens para o cálculo do limite.

Definição 2

Seja f uma função real de variável real e seja a, $a \in \mathbb{R}$, tal que existe uma vizinhança reduzida de a contida no domínio de f.

O limite dos valores $f(x)$ para x tendendo a a é o número real L se, e somente se, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ, tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Perceba que essa definição é equivalente à definição 1, pois:

• $|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \therefore L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$; ou seja, ao considerar ε positivo e arbitrário tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, estamos tomando uma vizinhança completa simétrica de L, $V(L, \varepsilon)$. O motivo pelo qual se escolhe a vizinhança **simétrica** é puramente operacional, isto é, visa simplificar os cálculos. Se essa vizinhança não fosse **simétrica**, obteríamos uma definição equivalente.

• $0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow |x - a| < \delta$ e $x \neq a \therefore -\delta < x - a < \delta$ e $x \neq a \therefore a - \delta < x < a + \delta$ e $x \neq a$; ou seja, dizer que $0 < |x - a| < \delta$ equivale a dizer que x pertence à vizinhança reduzida simétrica de a, $\overline{V}(a, \delta)$.

Exercícios resolvidos

R.15 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$, provar que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 5$.

Resolução

Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

O número δ depende do ε escolhido. Por isso, para determinar um possível δ, devemos analisar a desigualdade que envolve ε, ou seja, $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$.

Observe que:

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 6| < \varepsilon \therefore |(2x - 1) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |2(x - 3)| < \varepsilon$$

$$\therefore |(2x - 1) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \therefore |(2x - 1) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, dado ε, $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)
Para qualquer real positivo ε, temos:

$$0 < |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 0 < 2|x - 3| < \varepsilon;\ 0 < 2|x - 3| < \varepsilon \Rightarrow 2|x - 3| < \varepsilon;$$
$$2|x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |2x - 6| < \varepsilon;\ |2x - 6| < \varepsilon \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon.$$

Logo, $0 < |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon$.

Portanto $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$. (c.q.d.)

R.16 Sendo $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$, provar que $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$, ou seja, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 1$.

Resolução
Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)
O número δ depende de ε. Por isso, para determinar um possível valor de δ, devemos analisar a desigualdade que envolve ε, ou seja, $\left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \right| < \varepsilon$.

Observe que:

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 3} - 1 \right| < \varepsilon$$
$$\therefore \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x - 3| < \varepsilon.$$

Assim, para um dado ε, ε > 0, basta escolher δ = ε, e poderemos concluir a demonstração.

Fase 2 (conclusão da demonstração)
Para qualquer real positivo ε, temos:

$$0 < |x - 3| < \varepsilon \Rightarrow 0 < |(x - 2) - 1| < \varepsilon;\ 0 < |(x - 2) - 1| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} - 1 \right| < \varepsilon;$$
$$\left| \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Logo, $0 < |x - 3| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} - 1 \right| < \varepsilon$.

Portanto $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 1$. (c.q.d.)

R.17 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, provar que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, ou seja, $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$.
Resolução
Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)
O número δ depende do ε escolhido. Por isso, para determinar um possível valor de δ, analisemos a desigualdade que envolve ε, ou seja, $|x^2 - 0| < \varepsilon$.
Observe que:

$$|x^2 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2| < \varepsilon \therefore |x^2 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x|^2 < \varepsilon \therefore |x^2 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Assim, para um dado ε, ε > 0, basta escolher $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, e poderemos concluir a demonstração.

Fase 2 (conclusão da demonstração)
Para qualquer real positivo ε, temos:

$$0 < |x - 0| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow 0 < |x| < \sqrt{\varepsilon}\ ;\ 0 < |x| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow 0 < |x|^2 < \varepsilon;$$
$$0 < |x|^2 < \varepsilon \Rightarrow 0 < |x^2| < \varepsilon;\ 0 < |x^2| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon.$$

Logo, $0 < |x - 0| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |x^2 - 0| < \varepsilon$.
Portanto $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. (c.q.d.)

R.18 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, provar que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. **Nota:** o cálculo do limite de uma função pela definição pode ser complicado, como vamos ver nesse exercício. Por isso, apresentaremos mais adiante algumas propriedades que facilitarão muito esses cálculos.

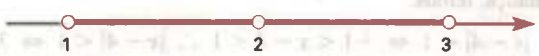
Resolução
Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)
O número δ depende do ε escolhido. Por isso, para determinar um possível valor de δ, analisemos a desigualdade que envolve ε, ou seja, $|x^2 - 4| < \varepsilon$.
Observe que:

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x + 2)(x - 2)| < \varepsilon \therefore |x^2 - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x + 2||x - 2| < \varepsilon.$$

O que nos interessa é conhecer a tendência dos valores x^2 quando x tende a 2. Sem perda de generalidade, vamos analisar a tendência dos valores de x em uma vizinhança reduzida simétrica com raio 1 do número 2:



Assim, temos:

$$|x - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \therefore |x - 2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \therefore |x - 2| < 1 \Leftrightarrow 3 < x + 2 < 5.$$

Logo, $|x - 2| < 1 \Leftrightarrow |x + 2| < 5$.

Assim, se $\varepsilon \geqslant 5$, escolhemos $\delta = 1$ e, se $\varepsilon < 5$, escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, para que possamos concluir a demonstração.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

- Se $\varepsilon \geqslant 5$, escolhemos $\delta = 1$ e temos:

$$0 < |x - 2| < 1 \Rightarrow \begin{cases} |x - 2| < 1 \\ |x + 2| < 5 \end{cases}$$

$$\therefore 0 < |x - 2| < 1 \Rightarrow |x + 2||x - 2| < 5 \therefore 0 < |x - 2| < 1 \Rightarrow |x^2 - 4| < 5 \leqslant \varepsilon.$$

- Se $\varepsilon < 5$, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ (note que $\delta < 1$) e temos:

$$0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \\ |x + 2| < 5 \end{cases}$$

$$\therefore 0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |x + 2||x - 2| < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} \therefore 0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Portanto $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. (c.q.d.)

R.19 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 2x - 3$, provar que $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 21$, ou seja,

$$\lim_{x \to 4} (x^2 + 2x - 3) = 21.$$

Resolução

Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(x^2 + 2x - 3) - 21| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

O número δ depende de ε. Por isso, para determinar um possível valor de δ, analisemos a desigualdade que envolve ε, ou seja, $|(x^2 + 2x - 3) - 21| < \varepsilon$.

Observe que:

$$|(x^2 + 2x - 3) - 21| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 + 2x - 24| < \varepsilon$$
$$\therefore |(x^2 + 2x - 3) - 21| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x - 4)(x + 6)| < \varepsilon \therefore |(x^2 + 2x - 3) - 21| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 4||x + 6| < \varepsilon.$$

O que nos interessa é a tendência dos valores $f(x)$ para x tendendo a 4. Sem perda de generalidade, podemos analisar a tendência dos valores de x em uma vizinhança reduzida simétrica com raio 1 do número 4:

Fixada essa vizinhança, temos:

$$|x - 4| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 4 < 1 \therefore |x - 4| < 1 \Leftrightarrow 3 < x < 5$$
$$\therefore |x - 4| < 1 \Leftrightarrow 9 < x + 6 < 11 \therefore |x - 4| < 1 \Leftrightarrow |x + 6| < 11.$$

Assim, se $\varepsilon \geqslant 11$, escolhemos $\delta = 1$ e, se $\varepsilon < 11$, escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{11}$, para que possamos concluir a demonstração.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

- Se $\varepsilon \geqslant 11$, tomamos $\delta = 1$ e temos:

$$0 < |x - 4| < 1 \Rightarrow \begin{cases} |x - 4| < 1 \\ |x + 6| < 11 \end{cases} \therefore 0 < |x - 4| < 1 \Rightarrow |x - 4||x + 6| < 11$$

$$\therefore 0 < |x - 4| < 1 \Rightarrow |(x - 4)(x + 6)| < 11 \therefore 0 < |x - 4| < 1 \Rightarrow |(x^2 + 2x - 3) - 21| < 11 \leqslant \varepsilon.$$

- Se $\varepsilon < 11$, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{11}$ (note que $\delta < 1$) e temos:

$$0 < |x - 4| < \frac{\varepsilon}{11} \Rightarrow \begin{cases} |x - 4| < \frac{\varepsilon}{11} \\ |x + 6| < 11 \end{cases} \therefore 0 < |x - 4| < \frac{\varepsilon}{11} \Rightarrow |x - 4||x + 6| < \frac{\varepsilon}{11} \cdot 11$$

$$\therefore 0 < |x - 4| < \frac{\varepsilon}{11} \Rightarrow |(x - 4)(x + 6)| < \varepsilon \therefore 0 < |x - 4| < \frac{\varepsilon}{11} \Rightarrow |(x^2 + 2x - 3) - 21| < \varepsilon.$$

Portanto $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 + 2x - 3) = 21$. (c.q.d.)

R.20 Provar que, se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$.

Resolução

Temos por hipótese que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Portanto temos que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f(x) - L) - 0| < \varepsilon$.

Logo, $\lim_{x \to a} (f(x) - L) = 0$.

(c.q.d.)

R.21 Provar que, se f e g são funções reais de variável real tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = 0$.

Resolução

- Por hipótese, temos que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ_1 tal que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pelas conseqüências da desigualdade triangular (exercício R.1), podemos escrever:

$$|f(x)| - |L| \leqslant |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Assim, temos:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| - |L| < \varepsilon \therefore 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon + |L|.$$

- Também por hipótese, temos que, para qualquer real positivo ε', existe um real positivo δ_2 tal que:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - 0| < \varepsilon'.$$

Sendo $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ e $\varepsilon' = \dfrac{1}{\varepsilon + |L|}$, podemos escrever:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x)| < \varepsilon + |L| \\ |g(x)| < \dfrac{1}{\varepsilon + |L|} \end{cases} \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \cdot |g(x)| < (\varepsilon + |L|) \cdot \frac{1}{\varepsilon + |L|}$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) \cdot g(x) - 0| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = 0$.

(c.q.d.)

R.22 Provar que, se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então esse limite é único.

Resolução

Vamos supor que existam dois números L_1 e L_2 tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$.

Assim sendo, temos que para qualquer real positivo ε existem reais positivos δ_1 e δ_2 tais que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

e

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon.$$

Sendo $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, temos:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - L_1| < \varepsilon \\ |f(x) - L_2| < \varepsilon \end{cases} \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon.$$

Pelas conseqüências da desigualdade triangular (exercício R.1), temos que:

$$|f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \geq |(f(x) - L_1) - (f(x) - L_2)|.$$

Assim, podemos escrever:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f(x) - L_1) - (f(x) - L_2)| < 2\varepsilon \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |L_2 - L_1| < 2\varepsilon.$$

Como ε é positivo e arbitrário, devemos ter $|L_2 - L_1|$ menor do que qualquer número positivo. Por outro lado, $|L_2 - L_1|$ não é negativo; assim, resta uma única possibilidade, ou seja:

$$|L_2 - L_1| = 0 \Rightarrow L_2 - L_1 = 0 \therefore L_2 = L_1.$$

Portanto o limite é único.

(c.q.d.)

R.23 Provar que, se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $L \neq 0$, então existem reais positivos δ e M tais que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$.

Resolução

Por hipótese, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Assim sendo, dado o número real positivo $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$, existe real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{|L|}{2} \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{-|L|}{2} < f(x) - L < \frac{|L|}{2}$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L - \frac{|L|}{2} < f(x) < L + \frac{|L|}{2}.$$

Temos duas possibilidades:

1ª)

$$L > 0 \Rightarrow L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2} \therefore \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$$

$$\therefore f(x) > \frac{L}{2} > 0 \Rightarrow |f(x)| > \frac{L}{2} > 0 \therefore |f(x)| > \frac{|L|}{2}.$$

2ª)

$$L < 0 \Rightarrow L + \frac{L}{2} < f(x) < L - \frac{L}{2} \therefore \frac{3L}{2} < f(x) < \frac{L}{2} < 0 \therefore |f(x)| > \frac{|L|}{2} > 0.$$

Por essas duas possibilidades, temos que existem reais positivos δ e $M = \frac{|L|}{2}$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

(c.q.d.)

R.24 Provar que, se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $L \neq 0$, então $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$.

Resolução

Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Para escolher convenientemente um valor para δ, devemos analisar a desigualdade que envolve ε, pois δ depende de ε.

Observe que:

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{L - f(x)}{f(x) \cdot L} \right| < \varepsilon \therefore \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|f(x) - L|}{|f(x)| \cdot |L|} < \varepsilon.$$

No exercício R.23, provamos que existem reais positivos δ_1 e M tais que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| > M$.

Assim, se escolhermos δ tal que $\frac{|f(x) - L|}{|L| \cdot M} < \varepsilon$, teremos como conseqüência $\frac{|f(x) - L|}{|L| \cdot |f(x)|} < \varepsilon$.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Temos que:

- existem reais positivos δ_1 e M tais que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| > M$ (pelo exercício R.23);
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ (por hipótese).

Consideremos o real positivo $\varepsilon \cdot |L| \cdot M$. Por hipótese, temos que existe um real positivo δ_2 tal que:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \cdot |L| \cdot M \therefore 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow \frac{|f(x) - L|}{|L| \cdot M} < \varepsilon.$$

Sendo $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ temos:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x)| > M \\ \dfrac{|f(x) - L|}{|L| \cdot M} < \varepsilon \end{cases} \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{|f(x) - L|}{|L| \cdot |f(x)|} < \varepsilon$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{L - f(x)}{Lf(x)}\right| < \varepsilon \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| < \varepsilon$$

Logo, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$.

(c.q.d.)

R.25 Demonstrar que, se $f: E \to \mathbb{R}$ é uma função tal que:

- I é um intervalo aberto contido em E,
- $a \in I$,
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L,\ L \neq 0$,

então existe uma vizinhança reduzida de a de modo que todo elemento x dessa vizinhança tem imagem $f(x)$ com o mesmo sinal de L. **Nota:** esse teorema é conhecido como **teorema da conservação do sinal**.

Resolução

Temos, por hipótese, que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$
$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Temos dois casos a considerar:

1º) $L > 0$

Escolhendo $\varepsilon = \frac{L}{2}$, temos:

$$L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2} \Rightarrow \underbrace{\frac{L}{2}}_{\text{Positivo}} < f(x) < \underbrace{\frac{3L}{2}}_{\text{Positivo}}$$

Logo $f(x)$ tem o mesmo sinal de L.

2º) $L < 0$

Escolhendo $\varepsilon = -\frac{L}{2}$ $\left(\text{note que } -\frac{L}{2} \text{ é positivo, pois } L \text{ é negativo}\right)$, temos:

$$L - \left(-\frac{L}{2}\right) < f(x) < L + \left(-\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \underbrace{\frac{3L}{2}}_{\text{Negativo}} < f(x) < \underbrace{\frac{L}{2}}_{\text{Negativo}}$$

Logo, $f(x)$ tem o mesmo sinal de L.

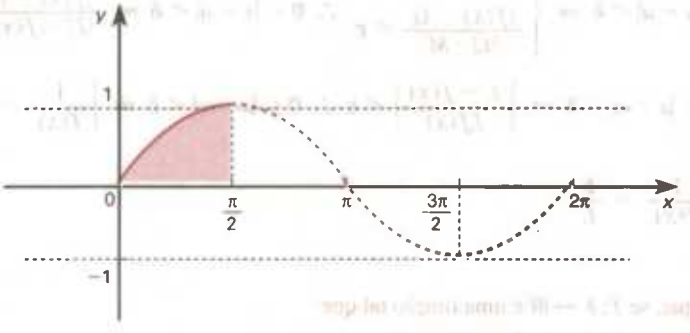
Por esses dois casos, temos que para $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$ existe δ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x)$ tem o mesmo sinal de L.

(c.q.d.)

Curiosidade

O maior "quase foi" da história da matemática

Blaise Pascal, matemático francês do século XVII, apresentou em um de seus trabalhos, o *Tratado sobre os senos em um quadrante*, um método para o cálculo da área sob a senóide.



Esse trabalho de Pascal é conhecido como o maior "quase foi" da história da matemática, pois chegou muito perto da descoberta do cálculo diferencial e integral. O próprio Leibniz comentou que, após ler o trabalho de Pascal, uma luz jorrou subitamente sobre seus olhos, convergindo sua mente para a descoberta do cálculo.

SPL/STOCK PHOTOS

Blaise Pascal (1623-1662), filósofo, escritor, matemático e físico francês. Aos 16 anos, escreveu sua primeira obra matemática, *Ensaio sobre as cônicas*.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.6, B.8 (a, b), B.9 (a, b), B.10 (a, b, c), B.11 (a, b), B.12, B.14 (a até d), B.16, B.18, B.20, C.1, C.3, C.9.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.7, B.8 (c, d), B.9 (c, d), B.10 (d, e, f), B.11 (c, d), B.13, B.14 (e até h), B.15 B.17, B.19, B.21, C.2, C.4, C.5, C.6, C.7, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Sabendo que $|x| = \frac{2}{3}$ e $|y| = \frac{1}{3}$, pode-se afirmar que:

a) $|x + y| = 1$. b) $|x + y| > 1$. c) $|x + y| \geq 1$. d) $|x + y| < 1$. e) $|x + y| \leq 1$.

B.2 Sabendo que $|x| + |y| = 3$, pode-se afirmar que:

a) $|x| - |y| < 3$.
b) $|x - y| \leq 3$.
c) $|x + y| = 3$.
d) $|x + y| = |x - y|$.
e) $|x| = |y| = 1{,}5$.

B.3 Se $|x - y| = 5$, então:

a) $x - y = 5$.
b) $|x| - |y| > 5$.
c) $|x| - |y| \leq 5$.
d) $|x| + |y| > 5$.
e) $|x| > |y|$.

B.4 Sendo $f(x) = \sqrt{9 - x}$ e $g(x) = \sqrt{x - 1}$, determine:

a) o domínio de f;
b) o domínio de g;
c) o domínio de $f \cdot g$;
d) $(f \cdot g)(5)$;
e) $(f \cdot g)(x)$, $\forall x, x \in D(f \cdot g)$.

B.5 Sendo $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = (x - 1)^2$, determine:

a) o domínio de f;
b) o domínio de g;
c) o domínio de $\frac{f}{g}$;
d) $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$;
e) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $\forall x, x \in D\left(\frac{f}{g}\right)$.

B.6 Sendo $A = \{x, x^2\}$, para que valores reais de x tem-se que máx$(A) = x$?

B.7 Dado o conjunto $B = \{x, 4x^2 - 3x\}$, para que valores reais de x tem-se que mín$(B) = x$?

B.8 Determine uma vizinhança completa e uma vizinhança reduzida do número a, em cada um dos seguintes casos:

a) $a = 5$; b) $a = -1$; c) $a = 4$; d) $a = 0$.

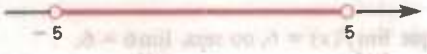
B.9 Obtenha uma vizinhança completa simétrica e uma vizinhança reduzida simétrica do número a, em cada um dos seguintes casos:

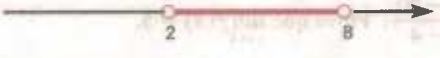
a) $a = 6$; b) $a = -3$; c) $a = 4$; d) $a = -1$.

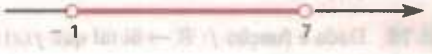
B.10 Represente no eixo real os números x tais que:

a) $|x| < 3$;
b) $|x - 5| < 4$;
c) $0 < |x - 2| < 5$;
d) $|x - 4| < 6$;
e) $|x + 3| < 5$;
f) $0 < |x - 1| < 4$.

B.11 Obtenha uma inequação modular cuja representação gráfica no eixo real é:

a) 

b) 

c) 

d)

B.12 Dado que δ é um número real positivo arbitrário e que $|x - 3| < \delta$, obtenha x, $x \in \mathbb{R}$.

B.13 Sendo $|x - 3| < 10\delta$, em que δ é um número real positivo arbitrário, determine x, $x \in \mathbb{R}$.

B.14 Construa o gráfico da função f e calcule $\lim_{x \to a} f(x)$ em cada um dos casos a seguir:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x + 1$ e $\lim_{x \to 2} (3x + 1)$;

b) $f: \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ e $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x \neq 3 \\ 4, \text{ se } x = 3 \end{cases}$ e $\lim_{x \to 3} f(x)$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, \text{ se } x \leq 1 \\ x + 3, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ e $\lim_{x \to 1} f(x)$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - x$ e $\lim_{x \to 2} (x^2 - x)$;

f) $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x}$ e $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x}{x}$;

g) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, \text{ se } x < 1 \\ 4, \text{ se } x = 1 \\ x^2 - 3x + 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ e $\lim_{x \to 1} f(x)$;

h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x > 2 \\ -x + 3, \text{ se } x \leq 2 \end{cases}$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$.

B.15 Classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:

a) Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in \mathbb{R}$, sempre existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

b) Se f é uma função e a um número real tal que existem $f(a)$ e $\lim_{x \to a} f(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

c) Se f é uma função tal que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então para qualquer vizinhança completa de L, $V(L)$, existe uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, na qual todos os elementos têm imagens em $V(L)$.

d) Se f é uma função tal que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então para qualquer vizinhança completa de L, $V(L)$, existe uma **única** vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, na qual todos os elementos têm imagens em $V(L)$.

e) Sendo f uma função tal que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to b} f(x) = L_2$, com $a \neq b$, é possível que ocorra $L_1 = L_2$.

B.16 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x + 2$, prove, através da definição de limite, que $\lim_{x \to 1} f(x) = 7$, ou seja, $\lim_{x \to 1} (5x + 2) = 7$.

B.17 Considerando a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 6x - 1$, demonstre que $\lim_{x \to 2} f(x) = 11$, ou seja, $\lim_{x \to 2} (6x - 1) = 11$.

B.18 Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 6$, prove que $\lim_{x \to 4} f(x) = 6$, ou seja, $\lim_{x \to 4} 6 = 6$.

B.19 A função $f: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \dfrac{5x - 20}{x - 4}$. Prove que $\lim_{x \to 4} f(x) = 5$.

B.20 Prove que, para a função $f: \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$, tem-se que $\lim_{x \to 5} f(x) = 10$, ou seja, $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$.

B.21 A função $g: \mathbb{R} - \{9\} \to \mathbb{R}$ é tal que $g(x) = \dfrac{x^2 - 81}{x - 9}$. Prove que $\lim\limits_{x \to 9} g(x) = 18$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 81}{x - 9} = 18$.

Exercícios complementares

C.1 Prove que, se $V_1(a)$ e $V_2(a)$ são vizinhanças completas de a, então $V_1(a) \cup V_2(a)$ é uma vizinhança completa de a.

C.2 Prove que, se $V_1(a)$ e $V_2(a)$ são vizinhanças completas de a, então $V_1(a) \cap V_2(a)$ é uma vizinhança completa de a.

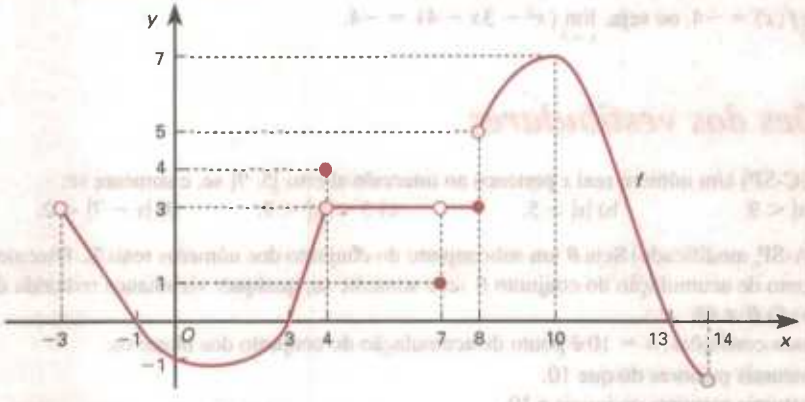
C.3 Considere no eixo das ordenadas os pontos $P(0, y)$ tais que $0 < |y - 3| < 50$. Pode-se afirmar que:

a) todos os pontos $P(0, y)$ equidistam do ponto $Q(0, 3)$.
b) existe pelo menos um ponto $P(0, y)$ cuja distância ao ponto $Q(0, 3)$ é igual a zero.
c) existe sempre um ponto $P(0, y)$ cuja distância ao ponto $Q(0, 3)$ é tão próxima de zero quanto se desejar.
d) as ordenadas dos pontos $P(0, y)$ formam uma vizinhança reduzida de zero.
e) as ordenadas dos pontos $P(0, y)$ formam uma vizinhança completa de 3.

C.4 Qual das sentenças seguintes afirma que x tende a 4?

a) $0 < |x + 4| < \delta,\ \forall \delta,\ \delta \in \mathbb{R}_+^*$.
b) $0 < |x| < 4$.
c) $0 < |x - 4| < \delta,\ \forall \delta,\ \delta \in \mathbb{R}_+^*$.
d) $4 < |x| < \delta,\ \forall \delta,\ \delta \in \mathbb{R}_+^*$.
e) $-\dfrac{4}{\delta} < |x| < \dfrac{4}{\delta},\ \forall \delta,\ \delta \in \mathbb{R}_+^*$.

C.5 O gráfico de uma função $f:]-3, 14[\to \mathbb{R}$ é:



Classifique cada afirmação como V ou F:

a) $\lim\limits_{x \to 10} f(x) = 7$;

b) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 4$;

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$;

d) $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = 3$;

e) $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = 5$;

f) não existe $\lim\limits_{x \to 8} f(x)$;

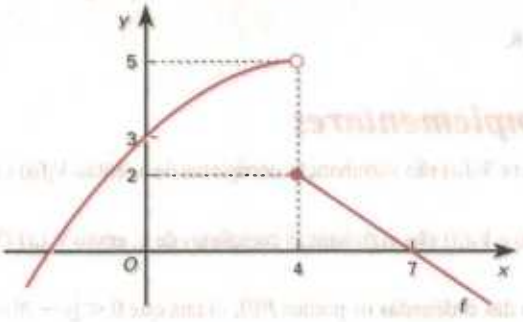
g) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$;

h) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 13} f(x)$;

i) para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - 7| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$;

j) se a é uma constante real tal que $4 < a < 7$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3$.

C.6 Considere o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



Mostre, através do gráfico, que não existe $\lim_{x \to 4} f(x)$.

C.7 Construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x + 1}$ e calcule $\lim_{x \to -1} f(x)$, ou seja, $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x + 1}$. **Sugestão:** simplifique $f(x)$.

C.8 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 6x + 8$, prove, pela definição de limite, que $\lim_{x \to 5} f(x) = 3$, ou seja, $\lim_{x \to 5} (x^2 - 6x + 8) = 3$.

C.9 Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 3x - 4$, prove, através da definição de limite, que $\lim_{x \to 3} f(x) = -4$, ou seja, $\lim_{x \to 3} (x^2 - 3x - 4) = -4$.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) Um número real x pertence ao intervalo aberto $]5, 9[$ se, e somente se:

a) $|x| < 9$. b) $|x| > 5$. c) $5 < |x| < 9$. d) $|x - 7| < 2$. e) $|x - 5| < 2$.

V.2 (ITA-SP, modificado) Seja B um subconjunto do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Dizemos que um número b é ponto de acumulação do conjunto B se, e somente se, qualquer vizinhança reduzida de b, $\overline{V}(b)$, é tal que $\overline{V}(b) \cap B \neq \varnothing$.

Nessas condições, $b = 10$ é ponto de acumulação do conjunto dos números:

a) naturais menores do que 10.
b) naturais menores ou iguais a 10.
c) racionais maiores do que 1 e menores ou iguais a 9.
d) racionais maiores do que 1 e menores do que 10.
e) Nenhuma das afirmações anteriores é válida.

V.3 (FGV-SP) O limite $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$:

a) não existe. b) é 4. c) é zero. d) é 2. e) é 8.

Sugestão: simplifique a expressão $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ e esboce o gráfico de $f(x)$.

V.4 (PUC-SP) O limite $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$:

a) não existe. b) não é nenhum número real. c) vale 2. d) vale 0. e) vale 4.

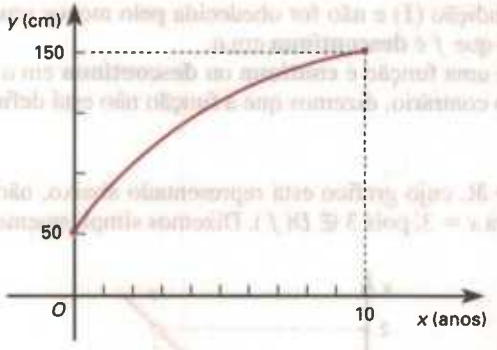
Sugestão: resolva esse exercício graficamente.

Capítulo 24

Continuidade de funções e propriedades dos limites

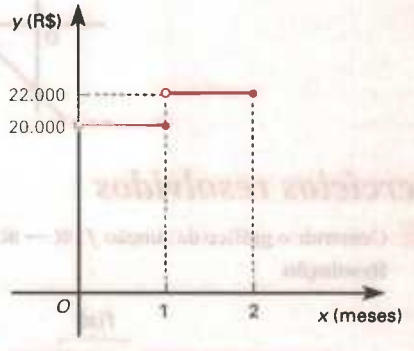
1. Função contínua

Uma criança nasceu com 50 cm e hoje, 10 anos depois, sua estatura é 150 cm. A representação gráfica do crescimento dessa criança em função do tempo é uma linha sem "falhas", pois sua estatura, ao longo de **todo** o tempo de sua vida, assumiu **todas** as medidas de 50 cm a 150 cm.



Usando uma linguagem técnica, dizemos que essa função é **contínua** no intervalo [0, 10], ou seja, seu gráfico para $x \in [0, 10]$ é uma linha sem interrupções.

Não é contínua, por exemplo, uma função que descreve o preço de um produto em função do tempo. Suponha que o preço de um automóvel seja R$ 20.000,00 durante o mês de janeiro e seja R$ 22.000,00 durante todo o mês de fevereiro. Observe ao lado a representação gráfica desses dados.



Note que, para $x \in]0, 2]$, os preços **não** assumem **todos** os valores de R$ 20.000,00 a R$ 22.000,00. Por exemplo, o preço do automóvel não foi, em nenhum momento, igual a R$ 21.000,00. Essa "falha" no gráfico caracteriza uma descontinuidade no intervalo]0, 2].

Intuitivamente, uma função $y = f(x)$ é contínua em um intervalo I, $I \subset D(f)$, quando o gráfico de f, para $x \in I$, é uma linha sem interrupções.

Definição

Seja f uma função real de variável real tal que existe uma vizinhança completa de um número real a contida no domínio de f.

A função f é contínua em a se, e somente se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Note que essa definição exige que sejam obedecidas três condições:

I. a é elemento do domínio de f e, portanto, existe $f(a)$;

II. existe $\lim_{x \to a} f(x)$;

III. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Notas

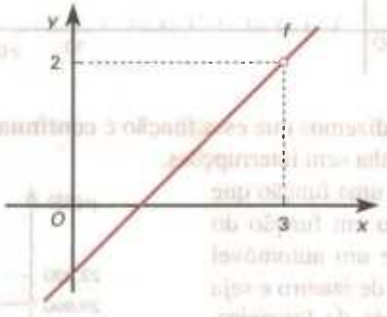
1. Se f é contínua em todos os pontos de um intervalo aberto $]a, b[$, então dizemos que f é contínua em $]a, b[$.

2. Se for obedecida a condição (I) e não for obedecida pelo menos uma das outras duas condições, (II) ou (III), então dizemos que f é **descontínua** em a.

3. Só podemos dizer que uma função é **contínua** ou **descontínua** em a se o elemento a pertence ao domínio dessa função. Caso contrário, dizemos que a função não está definida em a.

Exemplo

A função $f: R - \{3\} \to \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado abaixo, não pode ser classificada como contínua ou descontínua para $x = 3$, pois $3 \notin D(f)$. Dizemos simplesmente que f não está definida para $x = 3$.



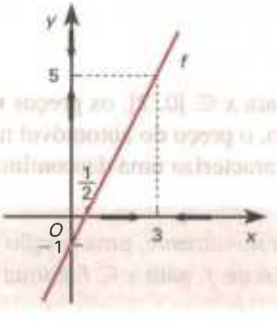
Exercícios resolvidos

R.1 Construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$ e verifique se f é contínua em $a = 3$.

Resolução

x	$f(x)$: $2x - 1$
0	-1
$\frac{1}{2}$	0

$\Rightarrow$



Analisando as três condições de continuidade, temos que:

I. existe $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 \Rightarrow f(3) = 5$;

II. existe $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1)$;

III. $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 5$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

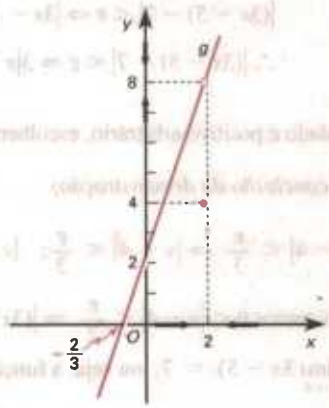
Logo, f é contínua em 3.

R.2 Construir o gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} 3x + 2, \text{ se } x \neq 2 \\ 4, \text{ se } x = 2, \end{cases}$ e verificar se g é contínua em $x = 2$.

Resolução

x	$3x + 2$
0	2
$-\frac{2}{3}$	0

$\Rightarrow$



Analisando as três condições de continuidade, temos que:

I. existe $g(2) = 4$;

II. existe $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$;

III. $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2) = 8$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 2} g(x) \neq g(2)$.

Como a condição (I) foi obedecida e a condição (III) não foi, dizemos que a função g é descontínua para $x = 3$.

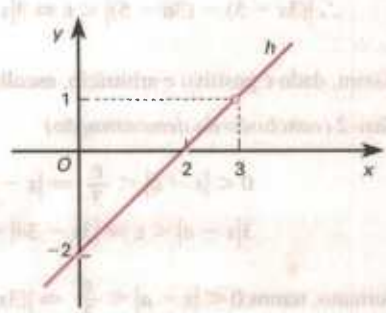
R.3 Esboçar o gráfico da função $h: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ e verificar se h é contínua em $x = 3$.

Resolução

Podemos escrever: $h(x) = \dfrac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 3)} \Rightarrow h(x) = x - 2$, para $x \neq 3$.

x	$\underbrace{x - 2}_{h(x)}$
0	-2
2	0

$\Rightarrow$



- Note que a condição (I) de continuidade não é obedecida pois 3 não pertence ao domínio de h, ou seja, não existe $h(3)$.
- Como a função h não está definida para $x = 3$, não podemos classificá-la como contínua ou descontínua nesse ponto.

R.4 Provar que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x - 5$ é contínua em $x = 4$.

Resolução

Devemos provar que: $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$, ou seja, $\lim_{x \to 4}(3x - 5) = 3 \cdot 4 - 5 = 7$.

Pela definição de limite, devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(3x - 5) - 7| < \varepsilon$.

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Analisando a desigualdade $|(3x - 5) - 7| < \varepsilon$, observamos que:

$$|(3x - 5) - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon \therefore |(3x - 5) - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon$$
$$\therefore |(3x - 5) - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x - 4| < \varepsilon \therefore |(3x - 5) - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, dado ε positivo arbitrário, escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, e a prova poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

$$0 < |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x - 4| < \varepsilon; \quad 3|x - 4| < \varepsilon \Rightarrow |3x - 12| < \varepsilon.$$

Portanto, temos $0 < |x - 4| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(3x - 5) - 7| < \varepsilon$.

Logo, $\lim_{x \to 4}(3x - 5) = 7$, ou seja, a função f é contínua em $x = 4$.

(c.q.d.)

R.5 Provar que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x - 5$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução

Devemos provar que f é contínua em a, $\forall a, a \in \mathbb{R}$. Ou seja, devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(3x - 5) - f(a)| < \varepsilon, \forall a, a \in \mathbb{R}, \text{ ou, ainda, que:}$$
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(3x - 5) - (3a - 5)| < \varepsilon \ \forall a, a \in \mathbb{R}.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Analisando a desigualdade $|(3x - 5) - (3a - 5)| < \varepsilon$, observamos que:

$$|(3x - 5) - (3a - 5)| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 3a| < \varepsilon \therefore |(3x - 5) - (3a - 5)| < \varepsilon \Leftrightarrow |3(x - a)| < \varepsilon$$
$$\therefore |(3x - 5) - (3a - 5)| < \varepsilon \Leftrightarrow 3|x - a| < \varepsilon \therefore |(3x - 5) - (3a - 5)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim, dado ε positivo e arbitrário, escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ e podemos concluir a demonstração.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

$$0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad |x - a| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3|x - a| < \varepsilon;$$
$$3|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |3x - 3a| < \varepsilon; \quad |3x - 3a| < \varepsilon \Rightarrow |(3x - 5) - (3a - 5)| < \varepsilon.$$

Portanto, temos $0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |(3x - 5) - (3a - 5)| < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$.

Logo, $\lim_{x \to a}(3x - 5) = 3a - 5$, ou seja, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, para todo a, $a \in \mathbb{R}$. Assim, a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

(c.q.d.)

R.6 Provar que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução

Devemos provar que $\lim\limits_{x \to a} x = a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$, ou seja, devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$.

Ora, basta tomarmos $\delta = \varepsilon$, e a implicação torna-se verdadeira para todo $a \in \mathbb{R}$.

Logo, a função f é contínua em $\mathbb{R}$. (c.q.d.)

R.7 Demonstrar que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução

Devemos provar que $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$, ou seja, devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$.

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Analisando a desigualdade $|x^2 - a^2| < \varepsilon$, observamos que:

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x + a)(x - a)| < \varepsilon \;\therefore\; |x^2 - a^2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x + a| \cdot |x - a| < \varepsilon.$$

Interessa-nos a tendência dos valores x^2 quando x tende a a. Fixemos uma vizinhança reduzida simétrica com raio 1 do número a, conforme a figurar ao lado.

Para todo x dessa vizinhança, temos:

$$|x - a| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - a < 1$$
$$\therefore |x - a| < 1 \Leftrightarrow a - 1 < x < 1 + a \;\therefore\; |x - a| < 1 \Leftrightarrow 2a - 1 < x + a < 1 + 2a.$$

Consideremos três casos: 1º) $a > 0$; 2º) $a < 0$; 3º) $a = 0$.

Demonstração do primeiro caso ($a > 0$)

Se $a > 0$, temos $|x + a| < 1 + 2a$.

Assim, para qualquer real positivo ε: se $\varepsilon \geqslant 1 + 2a$, então escolhemos $\delta = 1$; se $\varepsilon < 1 + 2a$, então escolhemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + 2a}$ (note que $\delta < 1$); e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração do primeiro caso)

Para qualquer real positivo ε, $\varepsilon \geqslant 1 + 2a$, existe $\delta = 1$, tal que:

$$0 < |x - a| < 1 \Rightarrow \begin{cases} |x - a| < 1 \\ |x + a| < 1 + 2a \end{cases} \;\therefore\; 0 < |x - a| < 1 \Rightarrow |x - a| \cdot |x + a| < 1(1 + 2a)$$

$$\therefore 0 < |x - a| < 1 \Rightarrow |(x - a)(x + a)| < 1 + 2a \;\therefore\; 0 < |x - a| < 1 \Rightarrow |x^2 - a^2| < 1 + 2a \leqslant \varepsilon.$$

Para qualquer real positivo ε, $\varepsilon < 1 + 2a$, existe o real positivo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + 2a}$ (note que $\delta < 1$) tal que:

$$0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{1 + 2a} \Rightarrow \begin{cases} |x - a| < \dfrac{\varepsilon}{1 + 2a} \\ |x + a| < 1 + 2a \end{cases}$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{1 + 2a} \Rightarrow |x - a| \cdot |x + a| < \frac{\varepsilon}{1 + 2a}(1 + 2a)$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{1 + 2a} \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$ e, portanto, f é contínua em a, $\forall a, a \in \mathbb{R}^*_+$.

Demonstração do segundo caso ($a < 0$)

Se $a < 0$, tem-se $|x + a| < 1 - 2a$ e repete-se o raciocínio do primeiro caso.

Demonstração do terceiro caso ($a = 0$)

Se $a = 0$, dado ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, devemos encontrar δ, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, tal que $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x^2 - 0^2| < \varepsilon$.

Basta escolher $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ e temos $0 < |x| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |x^2 - 0^2| = |x^2| = |x|^2 < \varepsilon$.

Assim, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$ e, portanto, a função f é contínua em $a = 0$.

Após a análise de cada um dos três casos, concluímos que f é contínua em $\mathbb{R}$.

(c.q.d.)

R.8 Provar que a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^*$.

Resolução

Devemos provar que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}^*$, ou seja, devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}^*$.

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Analisando a desigualdade $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| < \varepsilon$, observamos que:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{a - x}{xa}\right| < \varepsilon$$

$$\therefore \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x - a|}{|x| \cdot |a|} < \varepsilon \therefore \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon \cdot |x| \cdot |a|.$$

Consideremos dois casos: 1º) $a > 0$; 2º) $a < 0$.

Demonstração do primeiro caso ($a > 0$)

Tomemos uma vizinhança reduzida simétrica de a, com raio $\dfrac{a}{2}$:

Para todo x dessa vizinhança, temos que $-\dfrac{a}{2} < x - a < \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow \dfrac{a}{2} < x < \dfrac{3a}{2}$.

Como $a > 0$, temos que $|x| > \dfrac{a}{2}$.

Assim, para qualquer real positivo ε: se $\varepsilon \geq \dfrac{1}{a}$, então escolhemos $\delta = \dfrac{a}{2}$; se $\varepsilon < \dfrac{1}{a}$, então escolhemos $\delta = \dfrac{\varepsilon a^2}{2}$ $\left(\text{note que } \delta < \dfrac{a}{2}\right)$; e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração do primeiro caso)

Para qualquer real positivo ε, $\varepsilon \geq \dfrac{1}{a}$, existe o real positivo $\delta = \dfrac{a}{2}$ tal que:

$$0 < |x - a| < \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \frac{|x - a|}{|xa|} < \frac{a}{2|xa|} \therefore 0 < |x - a| < \frac{a}{2} \Rightarrow \left|\frac{x - a}{xa}\right| < \frac{a}{2|x| \cdot |a|}.$$

Como $|x| > \frac{a}{2}$ e $a > 0$, podemos escrever:

$$0 < |x - a| < \frac{a}{2} \Rightarrow \left|\frac{a - x}{xa}\right| < \frac{a}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a} = \frac{1}{a} \leqslant \varepsilon$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \frac{a}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.$$

Para qualquer real positivo ε, $\varepsilon < \frac{1}{a}$, existe o real positivo $\delta = \frac{\varepsilon a^2}{2}$ $\left(\text{note que } \delta < \frac{a}{2}\right)$ tal que:

$$0 < |x - a| < \frac{\varepsilon a^2}{2} \Rightarrow 0 < \frac{|x - a|}{|xa|} < \frac{\varepsilon a^2}{2|xa|} \therefore 0 < |x - a| < \frac{\varepsilon a^2}{2} \Rightarrow \left|\frac{x - a}{xa}\right| < \frac{\varepsilon a^2}{2|x| \cdot |a|}.$$

Como $|x| > \frac{a}{2}$ e $a > 0$, podemos escrever:

$$0 < |x - a| < \frac{\varepsilon a^2}{2} \Rightarrow \left|\frac{a - x}{xa}\right| < \frac{\varepsilon a^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot a} = \varepsilon \therefore 0 < |x - a| < \frac{\varepsilon a^2}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+^*$ e, portanto, $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $\mathbb{R}_+^*$.

Demonstração do segundo caso ($a < 0$)

Tomemos uma vizinhança reduzida simétrica do número a, com raio $\frac{|a|}{2}$:

Para todo x dessa vizinhança, temos que $-\frac{|a|}{2} < x - a < \frac{|a|}{2} \Leftrightarrow a - \frac{|a|}{2} < x < a + \frac{|a|}{2}$.

Como $a < 0$, podemos escrever:

$$a - \left(-\frac{a}{2}\right) < x < a + \left(-\frac{a}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{3a}{2} < x < \frac{a}{2}.$$

Logo, $|x| > \frac{|a|}{2} > 0$.

Assim, para qualquer real positivo ε: se $\varepsilon \geqslant \frac{1}{|a|}$, então escolhemos $\delta = \frac{|a|}{2}$; se $\varepsilon < \frac{1}{|a|}$, então escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon a^2}{2}$ $\left(\text{note que } \delta < \frac{|a|}{2}\right)$; e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração do segundo caso)

Para qualquer real positivo ε, $\varepsilon \geqslant \frac{1}{|a|}$, existe o real positivo $\delta = \frac{|a|}{2}$ tal que:

$$0 < |x - a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow 0 < \frac{|x - a|}{|xa|} < \frac{|a|}{2|xa|} < \frac{|a|}{2 \cdot \frac{|a|}{2} \cdot |a|} = \frac{1}{|a|} \leqslant \varepsilon$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow \left|\frac{a - x}{xa}\right| < \varepsilon \therefore 0 < |x - a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.$$

Para qualquer real positivo ε, $\varepsilon < \frac{1}{|a|}$, existe o real positivo $\delta = \frac{\varepsilon a^2}{2}$ $\left(\text{note que } \delta < \frac{|a|}{2}\right)$ tal que:

$$0 < |x - a| < \frac{\varepsilon a^2}{2} \Rightarrow 0 < \frac{|x - a|}{|xa|} < \frac{\varepsilon a^2}{2|xa|} = \frac{\varepsilon a^2}{2|x| \cdot |a|} < \frac{\varepsilon a^2}{2 \cdot \frac{|a|}{2} \cdot |a|} = \varepsilon$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \frac{\varepsilon a^2}{2} \Rightarrow \left|\frac{a - x}{xa}\right| < \varepsilon \therefore 0 < |x - a| < \frac{\varepsilon a^2}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}^*$ e, portanto, $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^*$.

Pelo primeiro e pelo segundo caso, concluímos que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^*$.

R.9 Sendo $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \sqrt{x}$, provar que f é contínua em $\mathbb{R}_+^*$.

Resolução

Devemos provar que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+^*$, ou seja, devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+^*$.

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Multiplicando por $|\sqrt{x} + \sqrt{a}|$ ambos os membros da desigualdade $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, obtemos:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{a}| < \varepsilon|\sqrt{x} + \sqrt{a}| \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon|\sqrt{x} + \sqrt{a}|.$$

Para todo x, $x \in \mathbb{R}_+$, temos: $\sqrt{x} + \sqrt{a} \geqslant \sqrt{a}$.

Assim, para qualquer real positivo ε, se $|x - a| < \varepsilon|\sqrt{a}|$, então $|x - a| < \varepsilon|\sqrt{x} + \sqrt{a}|$.

Logo, dado ε, $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, tal que:

$$0 < |x - a| < \varepsilon\sqrt{a} \Rightarrow |x - a| < \varepsilon|\sqrt{a}|, \text{ pois } \sqrt{a} \geqslant 0$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \varepsilon\sqrt{a} \Rightarrow |x - a| < \varepsilon|\sqrt{x} + \sqrt{a}| \therefore 0 < |x - a| < \varepsilon\sqrt{a} \Rightarrow \frac{|x - a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} < \varepsilon$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \varepsilon\sqrt{a} \Rightarrow \frac{|x - a| \cdot |\sqrt{x} - \sqrt{a}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}| \cdot |\sqrt{x} - \sqrt{a}|} < \varepsilon$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \varepsilon\sqrt{a} \Rightarrow \frac{|x - a| \cdot |\sqrt{x} - \sqrt{a}|}{|x - a|} < \varepsilon$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \varepsilon\sqrt{a} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+^*$, ou seja, $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $\mathbb{R}_+^*$. (c.q.d.)

Nota: no capítulo 25, exercício R.6, após o estudo da continuidade lateral, provaremos que a função $f(x) = \sqrt{x}$ também é contínua à direita em $x = 0$. Assim, podemos dizer que f é contínua em $\mathbb{R}_+$.

R.10 Provar que a função:

a) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt[n]{x}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, é contínua em $\mathbb{R}_+^*$;

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt[n]{x}$, com $n \in \mathbb{N}$ e n ímpar, é contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Devemos provar que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+^*$, com $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja, devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon, \forall a, a \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } n \in \mathbb{N}^*.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

No capítulo 20, exercício R.11, vimos que:

$t^n - k^n = (t - k)(t^{n-1} + t^{n-2}k + t^{n-3}k^2 + \ldots + tk^{n-2} + k^{n-1})$, ou seja:

$$t^n - k^n = (t - k)\sum_{j=0}^{n-1} t^{n-j-1}k^j.$$

Fazendo $t = \sqrt[n]{x}$ e $k = \sqrt[n]{a}$, $\{x, a\} \subset \mathbb{R}_+^*$, temos: $x - a = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}) \sum\limits_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-j-1}(\sqrt[n]{a})^j$. **(I)**

Para cada real positivo a, consideremos a vizinhança simétrica V de centro a e raio a:

Assim, para todo x, $x \in V$, temos $x > 0$ e, portanto, $\sum\limits_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-j-1}(\sqrt[n]{a})^j > (\sqrt[n]{a})^{n-1}$. **(II)**

Assim, para qualquer real positivo ε, se $|x - a| < \varepsilon(\sqrt[n]{a})^{n-1}$, então:

$$|x - a| < \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-j-1}(\sqrt[n]{a})^j.$$

Logo, basta escolhermos $\delta = \text{mín}\{a, \varepsilon(\sqrt[n]{a})^{n-1}\}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo $\delta = \text{mín}\{a, \varepsilon(\sqrt[n]{a})^{n-1}\}$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} 0 < |x - a| < a & \textbf{(III)} \\ 0 < |x - a| < \varepsilon(\sqrt[n]{a})^{n-1}. & \textbf{(IV)} \end{cases}$$

De (I), temos que: $|x - a| = |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \cdot \left| \sum\limits_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-j-1}(\sqrt[n]{a})^j \right|$.

Logo, para $x \neq a$, podemos escrever:

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|x - a|}{\left| \sum\limits_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-j-1}(\sqrt[n]{a})^j \right|}. \quad \textbf{(V)}$$

A condição (III) nos garante que ocorre a desigualdade (II). E, dividindo por $\left|\sum_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-j-1}(\sqrt[n]{a})^{j}\right|$ os membros da desigualdade (IV), podemos escrever:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-j-1}(\sqrt[n]{a})^{j} > (\sqrt[n]{a})^{n-1} \\ 0 < \dfrac{|x-a|}{\left|\sum_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-j-1}(\sqrt[n]{a})^{j}\right|} < \dfrac{\varepsilon(\sqrt[n]{a})^{n-1}}{\left|\sum_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-j-1}(\sqrt[n]{a})^{j}\right|} \end{cases}$$

$$\therefore 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \frac{|x-a|}{\left|\sum_{j=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-j-1}(\sqrt[n]{a})^{j}\right|} < \frac{\varepsilon(\sqrt[n]{a})^{n-1}}{(\sqrt[n]{a})^{n-1}}.$$

Finalmente, utilizando a igualdade (V), podemos escrever: $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon$.

Logo, $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+$, ou seja, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua em $\mathbb{R}_+^*$. (c.q.d.)

Nota: após o estudo da continuidade lateral, pode-se provar que $f(x) = \sqrt[n]{x}$ também é contínua à direita em zero.

b) Devemos provar que $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$, com $n \in \mathbb{N}$ e n ímpar.

O caso em que $a > 0$ já foi provado no item (a). Provemos então os casos $a < 0$ e $a = 0$.

Demonstração do caso $a < 0$

Como n é natural ímpar, a função g pode ser apresentada sob a forma: $g(x) = -\sqrt[n]{-x}$.
Sendo $x < 0$, temos que $-x > 0$.
Provamos no item (a) que a função $f(t) = \sqrt[n]{t}$ é contínua em $\mathbb{R}_+^*$.

Logo, $f(x) = \sqrt[n]{-x}$ é contínua em $\mathbb{R}_-^*$.

Temos, então, que $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{-x} = \sqrt[n]{-a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_-^*$.

Logo, $-\lim_{x \to a} \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{-a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_-^*$, ou seja, $\lim_{x \to a} (-\sqrt[n]{-x}) = -\sqrt[n]{-a}$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_-^*$, e, portanto, a função $g(x) = -\sqrt[n]{-x}$, com $x \in \mathbb{R}_-^*$, é contínua em $\mathbb{R}_-^*$.

Demonstração do caso $a = 0$
Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ*)*
Note que:

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|x^{\frac{1}{n}}\right| < \varepsilon;\ \left|x^{\frac{1}{n}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon;\ |x|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon^n.$$

Assim, dado ε, $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $\delta = \varepsilon^n$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo $\delta = \varepsilon^n$, tal que:

$$0 < |x-0| < \varepsilon^n \Rightarrow |x| < \varepsilon^n;\ |x| < \varepsilon^n \Rightarrow |x|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon;\ |x|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon \Rightarrow \left|x^{\frac{1}{n}}\right| < \varepsilon;$$
$$\left|x^{\frac{1}{n}}\right| < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - 0| < \varepsilon;\ |\sqrt[n]{x} - 0| < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}| < \varepsilon.$$

Logo, $0 < |x - 0| < \varepsilon^n \Rightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}| < \varepsilon$, ou seja, $\lim_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{0}$.

Portanto g é contínua em zero.

Completamos desse modo a demonstração de que a função g é contínua em $\mathbb{R}$.

(c.q.d.)

2. Propriedades dos limites

Se k é uma constante real e as funções f e g são tais que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, então valem as seguintes propriedades:

ℓ.1 $\lim_{x \to a} k = k$;

ℓ.2 $\lim_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \lim_{x \to a} f(x) = kL_1$;

ℓ.3 $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$;

ℓ.4 $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$;

ℓ.5 $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x) = L_1 L_2$;

ℓ.6 $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

Demonstrações

ℓ.1 Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe um real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |k - k| < \varepsilon, \forall a, a \in \mathbb{R}.$$

Ora, essa implicação é verdadeira para qualquer δ. Logo, $\lim_{x \to a} k = k$.

(c.q.d.)

ℓ.2 Se $k = 0$, temos que $\lim_{x \to a} [k \cdot f(x)] = \lim_{x \to 0} [0 f(x)] = \lim_{x \to 0} 0 \overset{\ell.1}{=} 0 = 0 \lim_{x \to a} f(x) = 0L_1$.

Se $k \neq 0$, consideremos o real positivo arbitrário $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$. Por hipótese, $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$, isto é, existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |k| \cdot |f(x) - L_1| < \varepsilon \ \therefore \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |k \cdot f(x) - kL_1| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \lim_{x \to a} f(x) = kL_1$. (c.q.d.)

ℓ.3 Consideremos o real positivo arbitrário $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Por hipótese, $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$; logo, existem reais positivos δ_1 e δ_2, tais que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sendo $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |g(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \therefore\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon.$$

Como $|f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \geqslant |[f(x) - L_1] + [g(x) - L_2]|$, podemos escrever:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |[f(x) - L_1] + [g(x) - L_2]| < \varepsilon$$

$$\therefore\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |[f(x) + g(x)] - [L_1 + L_2]| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$.

(c.q.d.)

ℓ.4 $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} \{f(x) + [-g(x)]\} \overset{\ell.3}{=}$

$= \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} [-g(x)] \overset{\ell.2}{=} \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x).$

(c.q.d.)

ℓ.5 O produto $f(x) \cdot g(x)$ pode ser escrito sob a forma:

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot g(x) + L_1 \cdot g(x) - L_1 L_2 + L_1 L_2 =$$

$$= g(x)[f(x) - L_1] + L_1[g(x) - L_2] + L_1 L_2.$$

Temos:

I. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [f(x) - L_1] = 0$ (exercício R.20, capítulo 23);

II. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [g(x) - L_2] = 0$ (exercício R.20, capítulo 23);

III. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ e $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - L_1] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \{g(x) \cdot [f(x) - L_1]\} = 0$

(exercício R.21, capítulo 23);

IV. $\lim\limits_{x \to a} L_1 L_2 = L_1 L_2$ (propriedade ℓ.1).

Assim, temos:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} \{g(x) \cdot [f(x) - L_1] + L_1[g(x) - L_2] + L_1 L_2\} \overset{\ell.3}{=}$$

$$= \lim_{x \to a} \{g(x) \cdot [f(x) - L_1]\} + \lim_{x \to a} \{L_1 [g(x) - L_2] + L_1 L_2\} \overset{\ell.3}{=}$$

$$= \lim_{x \to a} \{g(x)[f(x) - L_1]\} + \lim_{x \to a} \{L_1 [g(x) - L_2]\} + \lim_{x \to a} L_1 L_2 \overset{\text{(III), } \ell.2 \text{ e (IV)}}{=}$$

$$= 0 + L_1 \lim_{x \to a} [g(x) - L_2] + L_1 L_2 \overset{\text{(II)}}{=} 0 + 0 + L_1 L_2 = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x).$$

(c.q.d.)

ℓ.6

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} \overset{\ell.5}{=} \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} =$$

(R.24 (Cap. 23))

$$= L_1\cdot\frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

(c.q.d.)

Complemento: as propriedades ℓ.3 e ℓ.5 podem ser generalizadas para n funções: f_1, f_2, f_3, ..., f_n tais que $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = L_i$, $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ou seja:

ℓ.7

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) +$$
$$+ \lim_{x\to a} f_2(x) + \lim_{x\to a} f_3(x) + \ldots + \lim_{x\to a} f_n(x) =$$
$$= L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n;$$

ℓ.8

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)] =$$
$$= \left[\lim_{x\to a} f_1(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to a} f_1(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to a} f_3(x)\right]\cdot\ldots\cdot\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right] =$$
$$= L_1L_2L_3\cdot\ldots\cdot L_n.$$

Na propriedade ℓ.8, se tivermos $f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = f_n = f$, então obteremos:

ℓ.9

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

Exercícios resolvidos

R.11 Calcular $\lim\limits_{x\to 2}(3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5)$.

Resolução

No exercício R.6, vimos que $\lim\limits_{x\to a} x = a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$. Assim, temos $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$. Esse fato e as propriedades ℓ.1, ℓ.2, ℓ.8 e ℓ.9 garantem a existência do limite de cada parcela da expressão $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5$. Assim, temos:

$$\lim_{x\to 2}(3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5) \overset{\ell.7}{=} \lim_{x\to 2} 3x^4 + \lim_{x\to 2}(-2x^3) + \lim_{x\to 2} 4x^2 + \lim_{x\to 2} 5 \overset{\ell.1\text{ e }\ell.2}{=}$$

$$= 3\lim_{x\to 2} x^4 - 2\lim_{x\to 2} x^3 + 4\lim_{x\to 2} x^2 + 5 \overset{\ell.9}{=}$$

$$= 3\left(\lim_{x\to 2} x\right)^4 - 2\left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 + 4\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + 5 = 3\cdot 2^4 - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2 + 5 = 53.$$

R.12 Demonstrar que toda função polinomial real de variável real é contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução

Toda função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + k_{n-2}x^{n-2} + \ldots + k_1 x + k_0$, com $\{k_n, k_{n-1}, k_{n-2}, \ldots, k_0\} \subset \mathbb{R}$ é denominada "**função polinomial** real de variável real".

Devemos provar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \ \forall a, a \in \mathbb{R}$.

No exercício R.6, vimos que $\lim_{x \to a} x = a, \ \forall a, a \in \mathbb{R}$.

Esse fato e as propriedades ℓ_1, ℓ_2, ℓ_8 e ℓ_9 garantem a existência do limite de cada parcela da expressão $f(x)$. Assim, temos:

$$\lim_{x \to a} \left[k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + k_{n-2} x^{n-2} + \ldots + k_1 x + k_0 \right] \overset{\ell.7}{=}$$

$$\overset{\ell.1 \text{ e } \ell.2}{=} \lim_{x \to a} k_n x^n + \lim_{x \to a} k_{n-1} x^{n-1} + \lim_{x \to a} k_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \lim_{x \to a} k_0 =$$

$$\overset{\ell.9}{=} k_n \lim_{x \to a} x^n + k_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + k_{n-2} \lim_{x \to a} x^{n-2} + \ldots + k_0 =$$

$$\overset{\text{R.6}}{=} k_n \left(\lim_{x \to a} x \right)^n + k_{n-1} \left(\lim_{x \to a} x \right)^{n-1} + k_{n-2} \left(\lim_{x \to a} x \right)^{n-2} + \ldots + k_0 =$$

$$= k_n a^n + k_{n-1} a^{n-1} + k_{n-2} a^{n-2} + \ldots + k_0 = f(a).$$

(c.q.d.)

R.13 Calcular $\lim_{x \to 1} (x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 6)$.

Resolução

Provamos que toda função polinomial real de variável real é contínua em $\mathbb{R}$. Assim, esse limite é o valor numérico do polinômio $x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 6$ para $x = 1$, ou seja:

$$\lim_{x \to 1} (x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 6) = 1^5 - 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 6 = 8.$$

R.14 Calcular $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x + 1}{x + 3}$.

Resolução

Pelo exercício R.12, temos que:

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - x + 1) = 2^3 - 2 + 1 = 7 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2} (x + 3) = 2 + 3 = 5.$$

Pela propriedade $\ell.6$, temos: $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x + 1}{x + 3} = \dfrac{\lim_{x \to 2} (x^3 - x + 1)}{\lim_{x \to 2} (x + 3)} = \dfrac{7}{5}$.

R.15 Provar que toda função racional é contínua em seu domínio.

Resolução

Toda função f: D $\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios de coeficientes reais e variável real, é denominada **função racional**. Observe que D é o conjunto de todos os reais x tais que $Q(x) \neq 0$.

Devemos provar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou seja, $\lim_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}, \ \forall a, a \in \mathbb{R} \text{ e } Q(a) \neq 0$.

Pelo exercício R.12, temos que: $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$ e $\lim_{x \to a} Q(x) = Q(a)$.

Se $Q(a) \neq 0$, temos, pela propriedade $\ell.6$, que:

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to a} P(x)}{\lim_{x \to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} = f(a), \ \forall a, a \in \mathbb{R} \text{ e } Q(a) \neq 0.$$

Logo, f é contínua em seu domínio.

(c.q.d.)

R.16 Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - x}{x^3 + 2}$.

Resolução

Provamos no exercício R.15 que toda função racional é contínua em seu domínio.

Temos que o número 1 pertence ao domínio da função racional $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x^3 + 2}$. Assim, f é contínua em 1, isto é: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - x}{x^3 + 2} = \dfrac{3 \cdot 1^2 - 1}{1^3 + 2} = \dfrac{2}{3}$.

R.17 Provar que, se f e g são funções contínuas em a, então $f + g$ é contínua em a.

Resolução

Por hipótese, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Por definição de soma de funções, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Logo, temos:

$$\lim_{x \to a}(f + g)(x) = \lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] \overset{\ell.3}{=} \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \overset{\text{Hipótese}}{=} f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

Portanto $f + g$ é contínua em a.

(c.q.d.)

3. Cálculo do limite de uma função f, para x tendendo a a, com f descontínua em a ou f não-definida em a

Como vimos, uma função f é contínua em a se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja, o limite é simplesmente o valor numérico de f para $x = a$.

A maior dificuldade no cálculo do limite de uma função f, para x tendendo a a, é o caso em que f é **descontínua** em a ou o caso em que f **não está definida** em a. Um recurso muito útil para o cálculo desse tipo de limite, desde que ele exista, é substituir a função f por uma outra, g, contínua em a, de modo que seja obedecida a seguinte condição: **existe alguma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, de modo que para todo x, $x \in \overline{V}(a)$, tem-se que $f(x) = g(x)$.** Sob essa condição, conclui-se imediatamente que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

Exemplo

Consideremos as funções:

$$f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$$

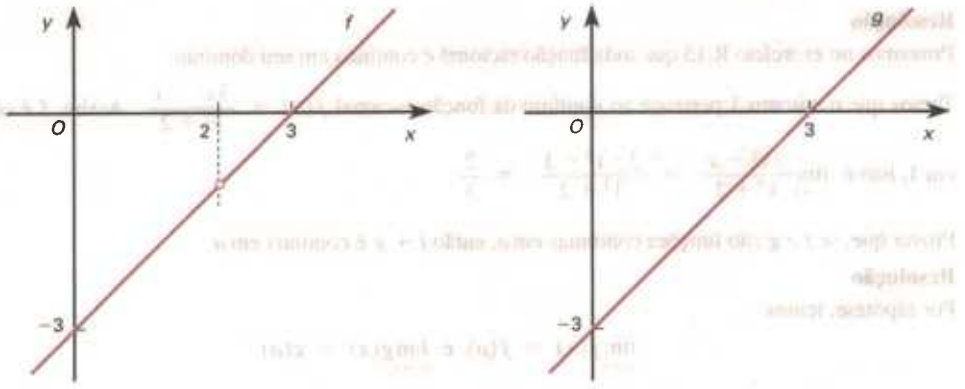
e

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = x - 3.$$

Temos que:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 2} \Leftrightarrow f(x) = x - 3, \text{ com } D(f) = \mathbb{R} - \{3\}.$$

Observe os gráficos de f e g:



A função f não está definida em 2 e a função g é contínua em 2. Note que existe vizinhança reduzida de 2 de modo que, para todo x dessa vizinhança, tem-se que $f(x) = g(x)$. Assim sendo, concluímos que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} g(x), \text{ ou seja:}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 3)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} = \lim_{x \to 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1.$$

Resumindo:

Seja f uma função descontínua em a, ou não-definida em a, tal que existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

A idéia básica para o cálculo de $\lim_{x \to a} f(x)$ é substituir a função f por uma função g **contínua** em a, de modo que $f(x) = g(x)$ para todo x de alguma vizinhança reduzida de a.

Exercícios resolvidos

R.18 Calcular $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$.

Resolução

A função $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$ não está definida em 3, pois $f(3) = \frac{3^2 - 4 \cdot 3 + 3}{3 - 3} = \frac{0}{0}$ **não** existe.

Simplificando a expressão $f(x)$, temos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \frac{\cancel{(x - 3)}\,(x - 1)}{\cancel{x - 3}} \Leftrightarrow f(x) = x - 1, \text{ com } D(f) = \mathbb{R} - \{3\}.$$

As funções:

$$f(x) = x - 1, \text{ com } D(f) = \mathbb{R} - \{3\} \text{ e } g(x) = x - 1, \text{ com } D(g) = \mathbb{R},$$

têm o mesmo limite para x tendendo a 3, pois existe vizinhança reduzida de 3 de modo que todo x dessa vizinhança é tal que $f(x) = g(x)$. Assim, temos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x - 3)}\,(x - 1)}{\cancel{x - 3}} = \lim_{x \to 3} (x - 1) = 3 - 1 = 2.$$

R.19 Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1}$.

Resolução

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x-5}{x+1} = \frac{1-5}{1+1} = -2.$$

R.20 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ se } x \neq 2 \\ k, \text{ se } x = 2, \end{cases}$ determinar k sabendo que f é contínua em 2.

Resolução

A função f é contínua em 2 se, e somente se, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = k$. Assim, temos:

$$k = f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = \lim \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 2 + 2 = 4.$$

Portanto f é contínua em 2 se, e somente se, $k = 4$.

4. Limite da função composta

Propriedade

ℓ.10 Sejam as funções f e g, reais de variável real, tais que:

- existe a composta $f \circ g$;
- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = w_0$.
- $\lim\limits_{w \to w_0} f(w) = f(w_0) = L$, ou seja, f é contínua em w_0.

Nessas condições, tem-se que:

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to a} f[g(x)] = f[\lim_{x \to a} g(x)] = f(w_0).$$

Demonstração

$$x \xrightarrow{g} g(x) = w \xrightarrow{f} f[g(x)] = f(w).$$

Devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f \circ g)(x) - f(w_0)| < \varepsilon.$$

I. Por hipótese, temos: $\lim\limits_{w \to w_0} f(w) = f(w_0)$.

Assim, para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ_1 tal que:

$$0 < |w - w_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(w) - f(w_0)| < \varepsilon.$$

II. Também por hipótese, temos: $\lim\limits_{x \to a} g(x) = w_0$.

Assim, para $\varepsilon' = \delta_1$ existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - w_0| < \delta_1 \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |w - w_0| < \delta_1.$$

Por (I) e (II), temos que, para qualquer real positivo ε, existem reais positivos δ_1 *e* δ tais que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |w - w_0| < \delta_1 \text{ e } 0 < |w - w_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(w) - f(w_0)| < \varepsilon.$$

Logo, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(w) - f(w_0)| < \varepsilon$.
Como $f(w) = f[g(x)] = (f \circ g)(x)$ temos: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f \circ g)(x) - f(w_0)| < \varepsilon$.
Portanto $\lim\limits_{x \to a}(f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f[g(x)] = f(w_0)$.

Como $w_0 = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, podemos escrever: $\lim\limits_{x \to a}(f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f[g(x)] = f[\lim\limits_{x \to a} g(x)]$.

(c.q.d.)

4.1. Conseqüência da propriedade $\ell.10$

$\ell.11$ Sejam as funções f e g, reais de variável real, tais que:

- existe a composta $f \circ g$;
- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a) = w_0$, ou seja, g é contínua em a;
- $\lim\limits_{w \to w_0} f(w) = f(w_0)$, ou seja, f é contínua em w_0.

Nessas condições, tem-se que:

$$\lim_{x \to a}(f \circ g)(x) = (f \circ g)(a).$$

Ou seja, a composta de funções contínuas em a também é contínua em a.

Exercícios resolvidos

R.21 Calcular $\lim\limits_{x \to 1}\sqrt{\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}}$

Resolução
Consideremos as funções:

- $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ e
- $g: D \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$, em que D é o conjunto dos reais x tais que $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \geqslant 0$.

Temos que:

- existe $f \circ g$;
- $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 3) = 1 + 3 = 4$;
- f é contínua em $\mathbb{R}_+^*$ (exercício R.9) e, portanto, contínua em 4.

Assim, pela propriedade $\ell.10$, temos:

$$\lim_{x \to 1}\sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}} = \sqrt{\lim_{x \to 1}\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 1}\frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1}} = \sqrt{\lim_{x \to 1}(x + 3)} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2.$$

R.22 Calcular $\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Resolução

Consideremos as funções:

- $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ e
- $g: D \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = x^2 + x + 1$, em que D é o conjunto de todos os reais x tais que $x^2 + x + 1 \geqslant 0$.

Temos que:

- existe $f \circ g$;
- g é contínua em $\mathbb{R}$ (exercício R.12); logo, é contínua em 3;
- f é contínua em $\mathbb{R}_+^*$ (exercício R.9); logo, é contínua em $g(3) = 3^2 + 3 + 1 = 13$.

Assim, pela propriedade $\ell.11$, temos que a composta $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ também é contínua em 3.

Logo, $\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{3^2 + 3 + 1} = \sqrt{13}$.

4.2. Outra conseqüência da propriedade $\ell.10$

Algumas propriedades importantes decorrem da $\ell.10$. Uma delas é:

$\ell.12$ Se

I. $n \in \mathbb{N}^*$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $L \geqslant 0$, ou

II. $n \in \mathbb{N}$, n ímpar e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $L < 0$, então:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

Demonstração

Faremos a demonstração apenas no caso em que $n \in \mathbb{N}^*$ e $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.

Por hipótese, temos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.

Pelo **teorema da conservação do sinal** (exercício R.25, capítulo 23), temos que existe uma vizinhança de a, $\overline{V}(a, \delta)$, tal que para todo x, $x \in \overline{V}(a, \delta)$, tem-se $f(x) > 0$.

Consideremos as funções:

- $h: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \sqrt[n]{x}$;
- $g: \overline{V}(a, \delta) \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $g(x) = f(x)$.

Temos que:

- existe $h \circ g$;
- $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$, $L > 0$;
- h é contínua em $\mathbb{R}_+^*$ (exercício R.10); logo, é contínua em L, pois $L \in \mathbb{R}_+^*$.

Assim, pela propriedade $\ell.10$, obtemos:

$$\lim_{x \to a} (h \circ g)x = h\left[\lim_{x \to a} g(x)\right], \text{ ou seja, } \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}.$$

(c.q.d.)

Nota: a demonstração dessa propriedade para o caso em que $\lim_{x \to a} f(x) < 0$ e n é ímpar é análoga; para o caso em que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, sugerimos a você que faça a demonstração após o estudo dos limites laterais (capítulo 25).

Exercícios resolvidos

R.23 Calcular $\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x - 3}}$.

Resolução
Temos que:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x + 3)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6.$$

Como esse limite não é negativo, temos, pela propriedade $\ell.12$, que:

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x - 3}} = \sqrt{\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}} = \sqrt{6}.$$

R.24 Calcular $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}}$.

Resolução
Temos:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 5)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} = \lim_{x \to 4} (x - 5) = 4 - 5 = -1.$$

Como esse limite é negativo, e como o índice do radical $\sqrt[3]{\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}}$ é ímpar, 3, temos, pela propriedade $\ell.12$, que: $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}} = \sqrt[3]{-1} = -1.$

R.25 Calcular $\lim_{x \to 9} \frac{x + 1}{\sqrt{x} + 5}$.

Resolução

$$\lim_{x \to 9} \frac{x + 1}{\sqrt{x} + 5} \overset{\ell.6}{=} \frac{\lim_{x \to 9} (x + 1)}{\lim_{x \to 9} (\sqrt{x} + 5)} \overset{\ell.3 \text{ e } \ell.1}{=} \frac{9 + 1}{\sqrt{9} + 5} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

R.26 Calcular $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$.

Resolução

A função $f(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ não está definida em 4, pois não existe $f(4)$. Assim, para o cálculo desse limite vamos substituir f por uma função g contínua em 4, de modo que $f(x) = g(x)$ para todo x de alguma vizinhança reduzida de 4. Essa função g pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x - 4)}(\sqrt{x} + 2)}{\cancel{x - 4}} =$$

$$= \lim_{x \to 4} (\sqrt{x} + 2) \overset{\ell.3 \text{ e } \ell.1}{=} \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4.$$

R.27 Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Resolução

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)}(\sqrt{x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \overset{\ell.6,\ \ell.1 \text{ e } \ell.3}{=} \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até d), B.2 (a), B.3 (a), B.5, B.6 (a até l), B.7 (a), B.8 (a até d), B.9, B.11 (a, b), B.12 (a, b, c), B.13 (a, b), C.2 (a), C.3 (a), C.4 (a), C.5, C.8.

Tarefa de casa: exercícios B.2 (e até d), B.2 (b), B.3 (b), B.4, B.6 (m até q), B.7 (b, c), B.8 (e até h), B.10, B.11 (c, d), B.12 (d, e, f), B.13 (c, d), C.1, C.2 (b), C.3 (b), C.4 (b), C.6, C.7, C.9, C.10.

Exercícios básicos

B.1 Construa o gráfico da função f e verifique, através do gráfico, se f é contínua em a.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2x + 1$ e $a = 2$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, \text{ se } x \neq 3 \\ 1, \text{ se } x = 3 \end{cases}$ e $a = 3$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, \text{ se } x \neq 3 \\ 6, \text{ se } x = 3 \end{cases}$ e $a = 3$;

d) $f: \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}$ e $a = 5$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 3x$ e $a = 4$;

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1}, \text{ se } x \neq 1 \\ 3, \text{ se } x = 1 \end{cases}$ e $a = 1$;

g) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1}, \text{ se } x \neq 1 \\ 1, \text{ se } x = 1 \end{cases}$ e $a = 1$;

h) $f: \mathbb{R} - \{1, -1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ e $a = 1$.

B.2 Prove que a função f é contínua em a.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 4$ e $a = 3$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 6x - 1$ e $a = 2$.

B.3 Demonstre que a função f é contínua em $\mathbb{R}$, nos seguintes casos:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x - 2$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 6x + 4$.

B.4 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$, onde k é uma constante real, prove que f é contínua em $\mathbb{R}$.

B.5 Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$. Demonstre que f é contínua em $\mathbb{R}$. **Sugestão:** demonstre em três casos: 1º) para $x > 0$; 2º) para $x < 0$; 3º) para $x = 0$.

B.6 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} 3$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} x$;

c) $\lim\limits_{x \to 2} 3x$;

d) $\lim\limits_{x \to 2} x^4$;

e) $\lim\limits_{x \to 2} 3x^4$;

f) $\lim\limits_{x \to 3} (5x^2 - 3x + 1)$;

g) $\lim\limits_{x \to 0} (4x^3 + 2x + 6)$;

h) $\lim\limits_{x \to 1} (6x^2 + 3x)$;

i) $\lim\limits_{x \to -2} (x^4 + x + 3)$;

j) $\lim\limits_{x \to 2} (x^5 + x + 1)(x^3 - 3x)(x + 2)$;

k) $\lim\limits_{x \to 1} (6x - 1)(x^4 + 2)(x^3 - 1)(x^8 + 3)$;

l) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x + 2}{x - 1}$;

m) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 2x}{x - 1}$;

n) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(6x + 1)(x - 2)(x + 4)}{(x + 1)(2 - x)}$;

o) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x^4 + x + 3)(x^2 - x + 1)}{x - 2}$;

p) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x)^5$;

q) $\lim\limits_{x \to 1} (3x - 1)^{10}$.

B.7 Se f e g são funções contínuas em a, prove que:

a) $f - g$ é contínua em a;

b) $f \cdot g$ é contínua em a;

c) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

B.8 Determine os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x - 6}$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x}$;

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$;

f) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 16}$;

g) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^3 - 9x^2 + x - 9}{x^2 - 81}$;

h) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x + 4}$.

B.9 Obtenha k de modo que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x - 5}, \text{ se } x \neq 5 \\ k, \text{ se } x = 5, \end{cases}$ seja contínua em 5.

B.10 Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, \text{ se } x \neq 1 \\ k, \text{ se } x = 1, \end{cases}$ determine k de modo que f seja contínua em 1.

B.11 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^2 + 9}$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{\dfrac{x - 1}{x^2 + 4}}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{3x^2 + 2x}$;

d) $\lim\limits_{x \to 8} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x + 24} \right)$.

B.12 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}}$;

b) $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt[3]{\dfrac{x^4 - 81}{x + 3}}$;

c) $\lim\limits_{x \to 5} \left(\sqrt{2x + 15} + \sqrt{\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}} \right)$;

d) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}}$;

e) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x - 1}}$;

f) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\sqrt{7 - x} - \sqrt{\dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}} \right)$.

B.13 Encontre os seguintes valores:

a) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$;

b) $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$.

Exercícios complementares

C.1 Você demonstrou no exercício B.5 que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$. Usando essa conclusão, calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 4} |x|$;

b) $\lim\limits_{x \to -4} |x|$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} (|x| + 6)$;

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{|x| + 3}$;

e) $\lim\limits_{x \to 2} |x| (3x - 2)$;

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{|x| - 3}$; **sugestão:** $x^2 = |x|^2$;

g) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x^4 - 1}{|x| - 1}}$;

h) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{|x| - 3}$; **sugestão:** existe vizinhança de 3 de modo que todo x dessa vizinhança é positivo;

i) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{|x| - 3}$; **sugestão:** existe vizinhança de -3 de modo que todo x dessa vizinhança é negativo.

C.2 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$;

b) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$.

C.3 Obtenha os seguintes valores:

a) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$; **sugestão:** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}$; **sugestão:** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

C.4 Determine os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{3 - \sqrt{x - 1}}{x^2 - 100}$;

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{1 - \sqrt{4 - x}}$.

C.5 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Calcule:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

C.6 Dada a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$, obtenha: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

C.7 Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$, calcule: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

C.8 Calcule $\lim\limits_{x \to 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{\sqrt{x+3} - 3}$. **Sugestão:** multiplique o numerador e o denominador por $\sqrt{x+3} + 3$ e também por $\sqrt{x-2} + 2$.

C.9 Obtenha o valor de $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-4} - \sqrt{2x-9}}{\sqrt{x+4} - 3}$.

C.10 Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}, \text{ se } x \neq 4 \\ k, \text{ se } x = 4. \end{cases}$

Obtenha o valor de k, sabendo que f é contínua em 4.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) O limite $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$ vale:

a) 0. b) 1. c) 2. d) 4. e) 6.

V.2 (Cescea) O valor do limite $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ é:

a) 0. b) 12. c) 16. d) 8. e) 13.

V.3 (UFRS) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, \text{ se } x \neq 4 \\ m, \text{ se } x = 4, \end{cases}$ é contínua em 4 se, e somente se:

a) $m = 8$. b) $m = 6$. c) $m = -8$. d) $m = 0$. e) $m = -1$.

V.4 (FGV-SP) O limite $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x + 1}{|x| - 1}$ é igual a:

a) 1. b) 2. c) -1. d) 0. e) 2.

V.5 (UnB-DF) A expressão $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$. b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. c) 0. d) $-\sqrt{2}$. e) $\frac{1}{2}$.

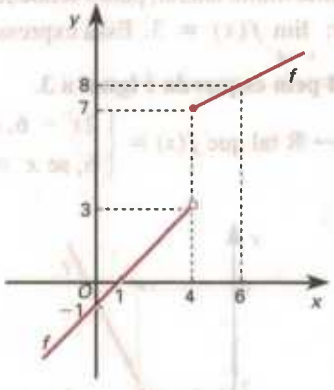
Capítulo 25
Limites e continuidade laterais

1. Limites laterais (conceituação)

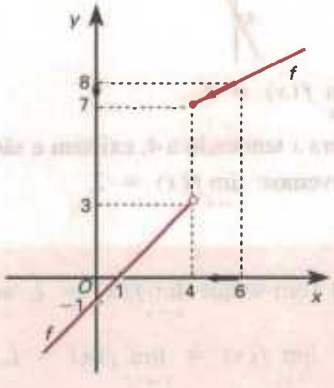
Exemplos

a) Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x < 4 \\ \frac{x}{2} + 5, \text{ se } x \geq 4, \end{cases}$

cujo gráfico é:

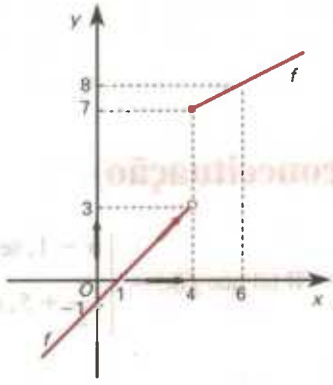


Conforme provamos no capítulo 23 (página 393), não existe $\lim_{x \to 4} f(x)$. Porém, se considerarmos x tendendo a 4 apenas por valores maiores do que 4, ou seja, à direita de 4, percebemos que $f(x)$ tende a 7:



Por isso, dizemos que a função f admite limite lateral para x tendendo a 4 pela direita, e que esse limite é igual a 7. Indicamos esse fato por: $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 7$. Essa expressão deve ser lida do seguinte modo: **o limite de $f(x)$ para x tendendo a 4 pela direita é igual a 7.**

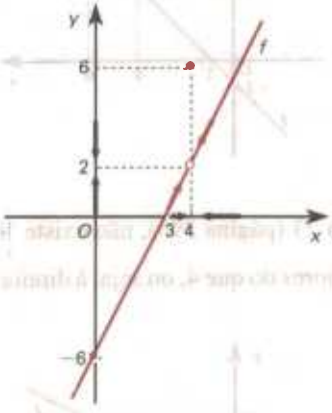
Analogamente, se considerarmos x tendendo a 4 apenas por valores menores do que 4, ou seja, à esquerda de 4, percebemos que $f(x)$ tende a 3:



Por isso dizemos que a função f admite limite lateral, para x tendendo a 4 pela esquerda, e que esse limite é igual a 3. Indicamos esse fato por: $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$. Essa expressão deve ser lida do seguinte modo: **o limite de $f(x)$ para x tendendo a 4 pela esquerda é igual a 3.**

b) Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 2x - 6, \text{ se } x \neq 4 \\ 6, \text{ se } x = 4, \end{cases}$

cujo gráfico é:



Observe que $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 2$.

Como os dois limites laterais, para x tendendo a 4, existem e são iguais, dizemos que existe o limite de $f(x)$ para x tendendo a 4, e escrevemos: $\lim_{x \to 4} f(x) = 2$.

Entenda bem! Tem-se que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Definições

Seja $]a, b[$, $a < b$, um intervalo aberto contido no domínio de uma função f, real de variável real.

Definição 1

O limite dos valores $f(x)$ para x tendendo a a **pela direita** é o número real L se, e somente se, para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Indicamos esse limite por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

Definição 2

O limite dos valores $f(x)$ para x tendendo a b **pela esquerda** é o número real L se, e somente se, para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$b - \delta < x < b \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Indicamos esse limite por $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = L$.

Exercícios resolvidos

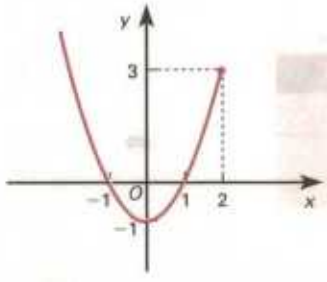
R.1 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x \leq 2 \\ x + 3, \text{ se } x > 2. \end{cases}$

a) Construir o gráfico de f e calcular $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

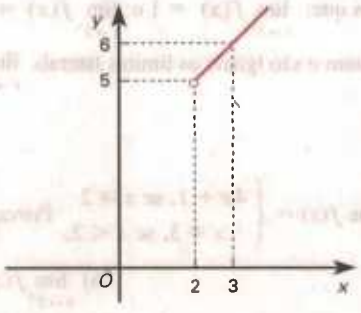
b) Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

Resolução

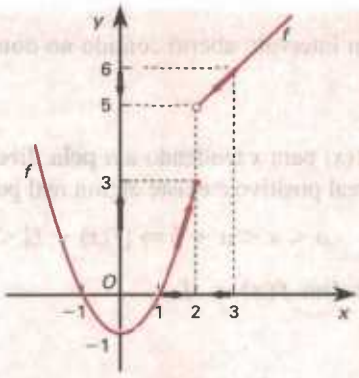
a) **I.** $f(x) = x^2 - 1$, se $x \leq 2$:



II. $f(x) = x + 3$, se $x > 2$:



O gráfico da função f é a reunião dos gráficos de (I) e (II), ou seja:



Observando esse gráfico, temos que: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$.

b) Não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, pois $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

R.2 Seja a função $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{2x^2 - 11x + 15}{x - 3}$.

a) Construir o gráfico de f e calcular $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

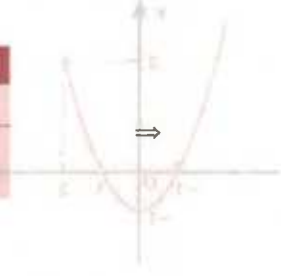
b) Existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?

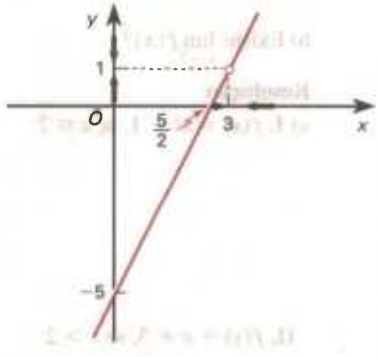
Resolução

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 11x + 15}{x - 3} = \dfrac{2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x - 3)}{x - 3} \Leftrightarrow f(x) = 2x - 5$, com $D = \mathbb{R} - \{3\}$.

x	$2x - 5$
0	−5
$\frac{5}{2}$	0

$f(x)$





Observando o gráfico temos que: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$.

b) Existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, pois existem e são iguais os limites laterais $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

Temos que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$.

R.3 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 4x + 1, \text{ se } x \geq 2 \\ -x + 3, \text{ se } x < 2. \end{cases}$ Provar, através da definição, que:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$;

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 9$.

Resolução

a) Para qualquer x à esquerda de 2, isto é, $x < 2$, temos que $f(x) = -x + 3$. Assim, devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que:

$$2 - \delta < x < 2 \Rightarrow |(-x + 3) - 1| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Observe que:

$$|(-x + 3) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |-x + 2| < \varepsilon \ \therefore \ |(-x + 3) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \varepsilon.$$

Note ainda que:

$$2 - \delta < x < 2 \Leftrightarrow -\delta < x - 2 < 0 \ \therefore \ 2 - \delta < x < 2 \Leftrightarrow |x - 2| < \delta.$$

Assim sendo, dado ε, $\varepsilon > 0$, basta escolher $\delta = \varepsilon$, e podemos concluir a demonstração.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo δ, $\delta = \varepsilon$, tal que:

$$2 - \varepsilon < x < 2 \Rightarrow -\varepsilon < x - 2 < 0; \ -\varepsilon < x - 2 < 0 \Rightarrow |x - 2| < \varepsilon;$$
$$|x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |2 - x| < \varepsilon; \ |2 - x| < \varepsilon \Rightarrow |(-x + 3) - 1| < \varepsilon.$$

Portanto temos que: $2 - \varepsilon < x < 2 \Rightarrow |(-x + 3) - 1| < \varepsilon$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 2^-} (-x + 3) = 1$. (c.q.d.)

b) Para qualquer x à direita de 2, isto é, $x > 2$, temos que $f(x) = 4x + 1$. Assim, devemos provar que para qualquer real positivo ε existe um real positivo δ tal que:

$$2 < x < 2 + \delta \Rightarrow |(4x + 1) - 9| < \varepsilon \ \therefore \ 2 < x < 2 + \delta \Rightarrow |4x - 8| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Observe que:

$$|4x - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow |4(x - 2)| < \varepsilon \ \therefore \ |4x - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow 4|x - 2| < \varepsilon$$

$$\therefore \ |4x - 8| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Note ainda que:

$$2 < x < 2 + \delta \Leftrightarrow 0 < x - 2 < \delta \ \therefore \ 2 < x < 2 + \delta \Leftrightarrow |x - 2| < \delta.$$

Assim sendo, dado ε, $\varepsilon > 0$ basta escolhermos $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo δ, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, tal que:

$$2 < x < 2 + \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 0 < x - 2 < \frac{\varepsilon}{4}; \ 0 < x - 2 < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4};$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 4|x - 2| < \varepsilon; \ 4|x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |4x - 8| < \varepsilon; \ |4x - 8| < \varepsilon \Rightarrow |(4x + 1) - 9| < \varepsilon.$$

Portanto temos que: $2 < x < 2 + \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |(4x + 1) - 9| < \varepsilon$.

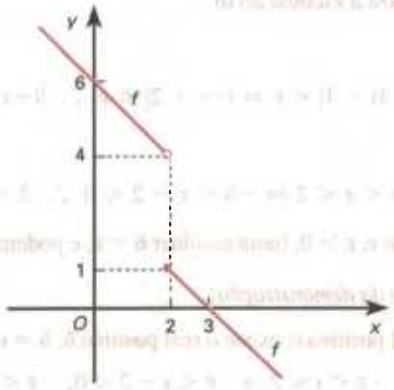
Logo, $\lim\limits_{x \to 2^+} (4x + 1) = 9$.

(c.q.d.)

2. Continuidade lateral

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -x + 6, \text{ se } x < 2 \\ -x + 3, \text{ se } x \geq 2, \end{cases}$

cujo gráfico é:



Observe que:

- $f(2) = 1$;
- existe $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 1$.

Essas três condições nos permitem dizer que a função é contínua à direita em 2.

Definições

Seja f uma função real de variável real tal que existe um intervalo $[a, b]$, $a < b$, contido no domínio de f.

Definição 1

f é contínua à esquerda em b se, e somente se: $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Definição 2

f é contínua à direita em a se, e somente se: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Em cada uma dessas definições, ficam subentendidas três condições. Vejamos.

Primeiro caso (definição 1): para que f seja contínua à esquerda em b, deve-se ter que:

I. existe $f(b)$;

II. existe $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$;

III. $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Segundo caso (definição 2): para que f seja contínua à direita em a, deve-se ter que:

I. existe $f(a)$;

II. existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$;

III. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Notas

1. Dizemos que a função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ se e somente se:
- f é contínua em $]a, b[$.
- f é contínua à direita em a.
- f é contínua à esquerda em b.

2. Analogamente define-se função contínua nos intervalos $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ e $]-\infty, b]$.

3. No **primeiro caso**, se for obedecida a condição (I) e não for obedecida pelo menos uma das condições (II) ou (III), então dizemos que f é **descontínua à esquerda** em b.

4. No **segundo caso**, se for obedecida a condição (I) e não for obedecida pelo menos uma das condições (II) ou (III), então dizemos que f é **descontínua à direita** em a.

5. Podemos dizer que uma função f é contínua lateralmente ou descontínua lateralmente em p se, e somente se, p é elemento do domínio da função. Caso contrário dizemos que f **não está definida** em p.

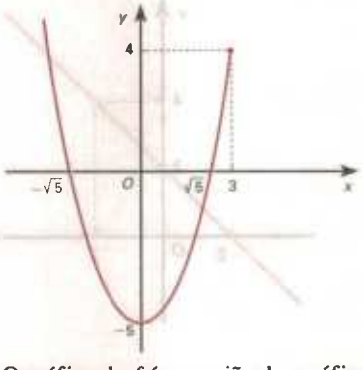
Exercícios resolvidos

R.4 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, \text{ se } x \leq 3 \\ -x + 2, \text{ se } x > 3. \end{cases}$

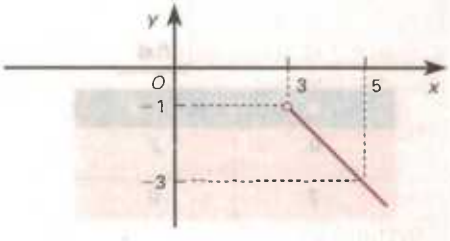
a) Construir o gráfico de f.
b) Verificar se f é contínua à esquerda em 3.
c) Verificar se f é contínua à direita em 3.

Resolução

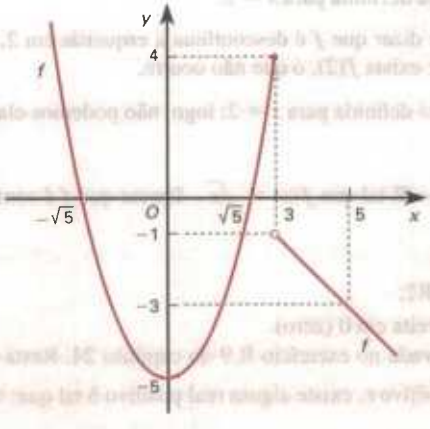
a) **I.** $f(x) = x^2 - 5$, se $x \leq 4$:



II. $f(x) = -x + 2$, se $x > 3$:



O gráfico de f é a reunião dos gráficos (I) e (II), ou seja:



b) Observando o gráfico de f, temos que:

- $f(3) = 4$;
- existe $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4 = f(3)$.

Essas três condições nos garantem que f é contínua à esquerda em 3.

c) Através do gráfico de f, concluímos que:

- $f(3) = 4$;
- existe $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \neq f(3)$, pois $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -1$.

Assim, f é descontínua à direita em 3.

R.5 Seja a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

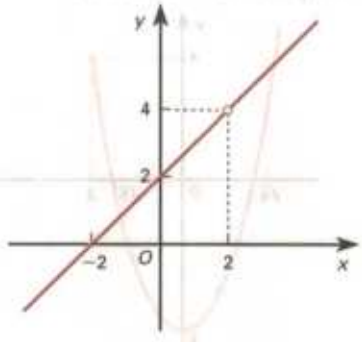
a) Construir o gráfico de f.
b) Verificar se f é contínua à esquerda em 2.
c) Verificar se f é contínua à direita em 2.

Resolução

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} \Rightarrow f(x) = x + 2$, com $D = \mathbb{R} - \{2\}$.

x	$f(x)$: $x + 2$
0	2
−2	0

$\Rightarrow$



b) A função f não está definida para $x = 2$.

Nota: não se pode dizer que f é descontínua à esquerda em 2, pois uma condição necessária para essa classificação é que exista $f(2)$, o que não ocorre.

c) A função f não está definida para $x = 2$; logo, não podemos classificá-la como contínua ou descontínua nesse ponto.

R.6 Seja a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$. Provar que f é contínua em $\mathbb{R}_+$.

Resolução

Devemos provar que:

I. f é contínua em $\mathbb{R}_+^*$;

II. f é contínua à direita em 0 (zero).

A parte (I) já foi provada no exercício R.9 do capítulo 24. Resta-nos, portanto, provar a parte (II), isto é, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que: $0 < x < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon$.

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Observe que: $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon \Leftrightarrow |\sqrt{x}| < \varepsilon \therefore |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon^2$.

Note ainda que: $0 < x < \delta \Rightarrow |x| < \delta$.

Assim sendo, dado ε, escolhemos $\delta = \varepsilon^2$ e a demonstração pode ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Dado um real positivo ε, existe o real positivo δ, $\delta = \varepsilon^2$, tal que:

$$0 < x < \varepsilon^2 \Rightarrow |x| < \varepsilon^2;\ |x| < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{|x|} < \sqrt{\varepsilon^2};$$

$$x > 0 \text{ e } \sqrt{|x|} < \sqrt{\varepsilon^2} \Rightarrow |\sqrt{x}| < \varepsilon;\ |\sqrt{x}| < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon.$$

Portanto, temos: $0 < x < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0}$.

Logo, f é contínua à direita em 0.

Por (I) e (II), concluímos que f é contínua em $\mathbb{R}_+$.

(c.q.d.)

3. Propriedades dos limites e continuidade laterais

As propriedades dos limites (de $\ell.1$ a $\ell.12$) e as propriedades das funções contínuas vistas no capítulo 24 valem também para limites e continuidade laterais. As demonstrações, que são meras repetições daquelas feitas no capítulo 24, ficam para você fazer como exercício.

Exercícios resolvidos

R.7 Calcular $\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3}$.

Resolução

Sejam as funções $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ e $g: D \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = x - 3$, em que $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.

Temos que:

- existe $f \circ g$;
- g é contínua à direita em 3;
- f é contínua em $\mathbb{R}_+$ (exercício R.6); logo, é contínua à direita em $g(3) = 3 - 3 = 0$.

Assim, a composta $(f \circ g)(x) = \sqrt{x - 3}$ é contínua à direita em 3.

Portanto, $\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x - 3} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3)} = \sqrt{3 - 3} = 0$.

R.8 Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Resolução

a) Se x tende a zero pela direita, então $x > 0$ e, portanto, $|x| = x$. Assim, temos que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

b) Se x tende a zero pela esquerda, então $x < 0$ e, portanto, $|x| = -x$. Assim, temos que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1.$$

R.9 Calcular $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|}$.

Resolução

Se x tende a 1 pela direita, então $x > 1$, ou seja, $x - 1 > 0$ e, portanto, $|x - 1| = x - 1$.

Assim, temos que:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x - 2) = 1 - 2 = -1.$$

R.10 Calcular $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{|x - 3|}$.

Resolução

Se x tende a 3 pela esquerda, então $x < 3$, ou seja, $x - 3 < 0$ e, portanto, $|x - 3| = -(x - 3)$.

Assim, temos que:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 3|} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x - 2)(x - 3)}{-(x - 3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x - 2)}{-1} = \lim_{x \to 3^-} (2 - x) = 2 - 3 = -1.$$

R.11 Calcular $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x^2 - 6x + 8|}{x - 2}$.

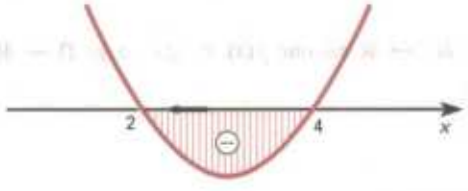
Resolução

Vamos, inicialmente, estudar o sinal da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

- Raízes de f:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \therefore x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 4.$$

- Gráfico de f:



Note que a função assume valores negativos para qualquer x, $2 < x < 4$. Logo, para x tendendo a 2, $2 < x < 4$, obtemos:

$$|x^2 - 6x + 8| = -(x^2 - 6x + 8).$$

Assim, temos que:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x^2 - 6x + 8|}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x^2 - 6x + 8)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x - 2)(x - 4)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} (4 - x) = 4 - 2 = 2.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.6, B.8, B.10 (a, b), B.11 (a até f), C.1 (a), C.3, C.5 (a).
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.7, B.9, B.10 (c, d), B.11 (g até l), C.1 (b), C.2, C.4, C.5 (b).

Exercícios básicos

B.1 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, \text{ se } x \geq 1 \\ 2x + 2, \text{ se } x < 1. \end{cases}$

a) Construa o gráfico de f e calcule $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

b) Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

B.2 Considere a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } x > 0 \\ x - 4, \text{ se } x < 0. \end{cases}$

a) Construa o gráfico de f e calcule $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b) Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

B.3 Seja $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3x - 1}{x - 1}$.

a) Construa o gráfico de f e calcule $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

b) Existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

B.4 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ se } x \geq 1 \\ x + 2, \text{ se } x < 1. \end{cases}$

Prove, através da definição, que:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$;

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 5$.

B.5 A função $f:]-\infty, 0] \cup]3, +\infty[\to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ para } x > 3 \\ -3x - 3, \text{ para } x \leq 0. \end{cases}$

Prove, através da definição, que:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -3$;

b) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$.

B.6 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x + 5, \text{ se } x \geq 2 \\ x^2 - 1, \text{ se } x < 2. \end{cases}$

a) Construa o gráfico de f.
b) Verifique se f é contínua à direita em 2.
c) Verifique se f é contínua à esquerda em 2.

B.7 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, \text{ se } x \leq 4 \\ 5, \text{ se } 4 < x < 7 \\ -x + 12, \text{ se } x \geq 7. \end{cases}$

a) Construa o gráfico de f.
b) Verifique se f é contínua à esquerda em 4.
c) Verifique se f é contínua à direita em 4.
d) Verifique se f é contínua à esquerda em 7.
e) Verifique se f é contínua à direita em 7.

B.8 A função $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ é contínua à esquerda em 1? Por quê?

B.9 A função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ é contínua à direita em 2? Por quê?

B.10 Através das propriedades dos limites, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 5^+} \sqrt{x-5}$; b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2-x}$; c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}^+} \sqrt{3x-1}$; d) $\lim\limits_{x \to \frac{5}{7}^-} \sqrt{5-7x}$.

B.11 Utilizando as propriedades dos limites, cacule:

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{|x-3|}{x-3}$;

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{|x-3|}{x-3}$;

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-6x+8}{|x-2|}$;

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2-6x+8}{|x-2|}$;

e) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{|x^2-5x+4|}{x-4}$;

f) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{|x^2-5x+4|}{|x-4|}$;

g) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{|x-1|}$;

h) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|}$;

i) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{|x-3|}{x^2-9}$;

j) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{|x-3|}{x^2-9}$;

k) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-3}{|x^2-2x-3|}$;

l) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x-3}{|x^2-2x-3|}$.

Exercícios complementares

C.1 Calcule os seguintes limites laterais:

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^3-8}{|x^2-4|}$; b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{|x-1|}$.

C.2 Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = n$, se $n \leq x < n+1$, $\forall n, n \in \mathbb{Z}$.

a) Calcule $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f\left(\frac{9}{5}\right)$ e $f(2)$.

b) Construa o gráfico de f.

c) Calcule $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

d) Calcule $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

e) Sendo n um inteiro qualquer, calcule $\lim\limits_{x \to n^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to n^+} f(x)$.

Nota: a função f apresentada nesse exercício é denominada **função máximo inteiro** e é simbolizada por $f(x) = [x]$.

C.3 Considere a função $f: [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x+3, \text{ se } x > 2 \\ m, \text{ se } x = 2. \end{cases}$

Determine o número real m de modo que f seja contínua à direita em $x = 2$.

C.4 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2-4, \text{ se } x < 1 \\ 4, \text{ se } 1 \leq x \leq 5 \\ x+m, \text{ se } x > 5. \end{cases}$

Determine o número real m de modo que f seja contínua à direita em $x = 5$.

C.5 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{|x-3|}$; b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x-1|}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFPA) Dado o gráfico da função $y = f(x)$, podemos afirmar que:

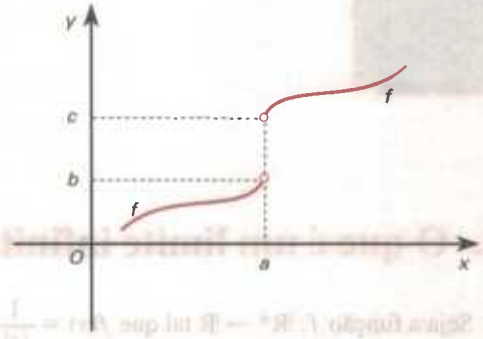
a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

d) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$.

e) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c$.



V.2 (E. E. Mauá-SP) Determine os limites laterais (à esquerda e à direita) com x tendendo a 2, para a função $f(x) = \dfrac{x|x-2|}{x^2-4}$.

V.3 (UFRS) Se $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \geqslant 2 \\ 2x + 4, \text{ se } x < 2, \end{cases}$ então:

a) f é contínua à esquerda em 2.

b) f é contínua à direita em 2.

c) f é contínua em 2.

d) f é contínua em seu domínio.

e) f é descontínua em 3.

Capítulo 26
Limites infinitos

1. O que é um limite infinito?

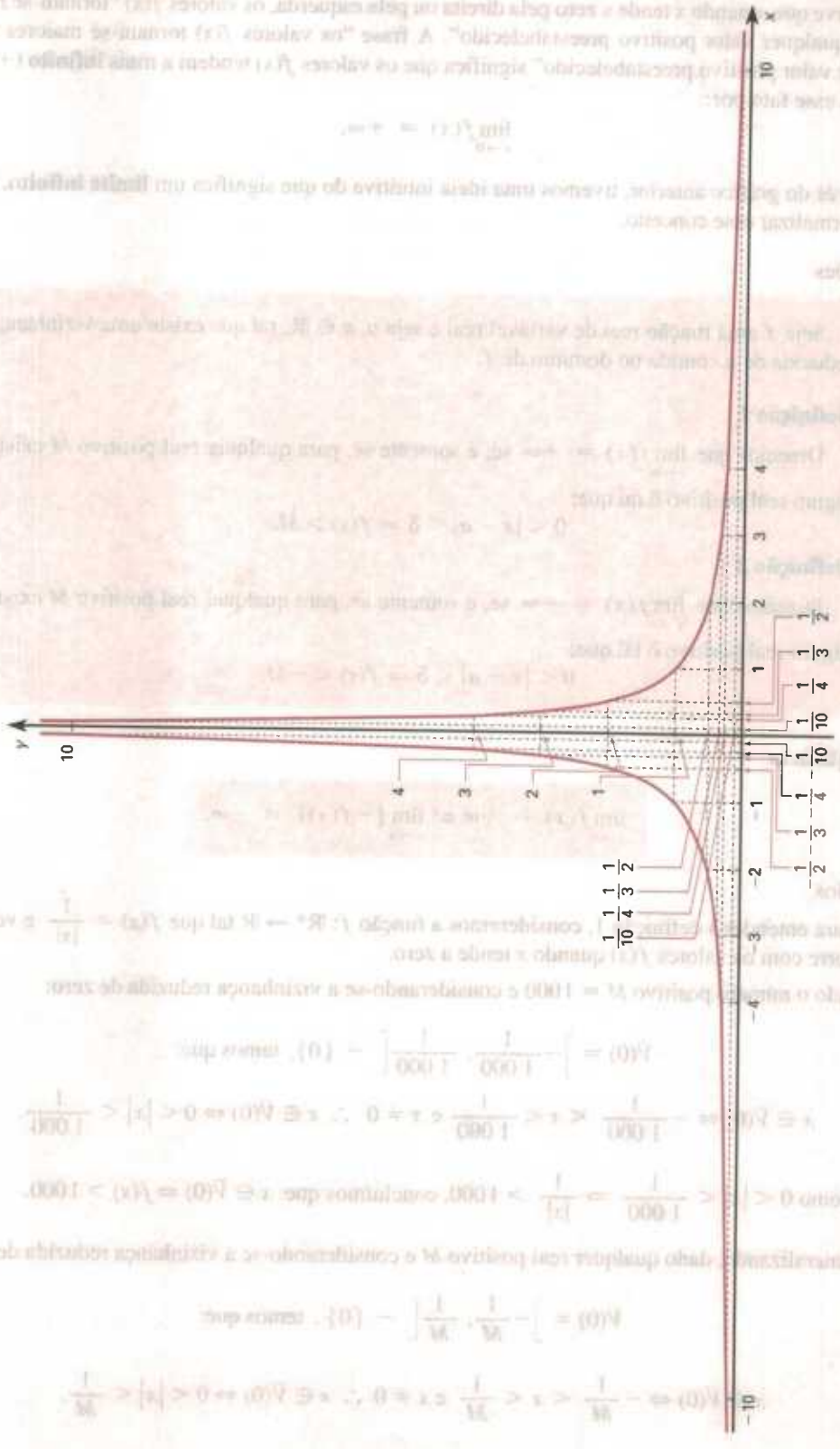
Seja a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{|x|}$. Qual é o $\lim_{x \to 0} f(x)$?

Para responder essa pergunta, vamos esboçar o gráfico de f. Façamos duas tabelas: a primeira com x tendendo a zero pela direita; e a segunda, pela esquerda.

x	$f(x) = \frac{1}{\lvert x \rvert}$
1000	$\frac{1}{1000} = 0{,}001$
100	$\frac{1}{100} = 0{,}01$
10	$\frac{1}{10} = 0{,}1$
1	1
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{10}$	10
$\frac{1}{100}$	100
$\frac{1}{1\,000}$	1000

x	$f(x) = \frac{1}{\lvert x \rvert}$
-1000	$\frac{1}{1000} = 0{,}001$
-100	$\frac{1}{100} = 0{,}01$
-10	$\frac{1}{10} = 0{,}1$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	2
$-\frac{1}{3}$	3
$-\frac{1}{4}$	4
$-\frac{1}{10}$	10
$-\frac{1}{100}$	100
$-\frac{1}{1\,000}$	1000

Representando esses pontos no plano cartesiano obtemos um esboço do gráfico:



Observe que, quando x tende a zero pela direita ou pela esquerda, os valores $f(x)$ "tornam-se maiores do que qualquer valor positivo preestabelecido". A frase "os valores $f(x)$ tornam-se maiores do que qualquer valor positivo preestabelecido" significa que os valores $f(x)$ tendem a **mais infinito** $(+\infty)$. Indicamos esse fato por:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$$

Através do gráfico anterior, tivemos uma idéia intuitiva do que significa um **limite infinito**. Vamos agora formalizar esse conceito.

Definições

Seja f uma função real de variável real e seja a, $a \in \mathbb{R}$, tal que existe uma vizinhança reduzida de a contida no domínio de f.

Definição 1

Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ se, e somente se, para qualquer real positivo M existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Definição 2

Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ se, e somente se, para qualquer real positivo M existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

Conseqüência

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to a} [-f(x)] = -\infty.$$

Exemplos

a) Para entender a definição 1, consideremos a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{|x|}$ e vejamos o que ocorre com os valores $f(x)$ quando x tende a zero.

• Dado o número positivo $M = 1\,000$ e considerando-se a vizinhança reduzida de zero:

$$\overline{V}(0) = \left]-\frac{1}{1\,000}, \frac{1}{1\,000}\right[- \{0\}, \text{ temos que:}$$

$$x \in \overline{V}(0) \Leftrightarrow -\frac{1}{1\,000} < x < \frac{1}{1\,000} \text{ e } x \neq 0 \ \therefore\ x \in \overline{V}(0) \Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{1}{1\,000}.$$

E, como $0 < |x| < \frac{1}{1\,000} \Rightarrow \frac{1}{|x|} > 1000$, concluímos que: $x \in \overline{V}(0) \Rightarrow f(x) > 1000$.

• Generalizando, dado qualquer real positivo M e considerando-se a vizinhança reduzida de zero:

$$\overline{V}(0) = \left]-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right[- \{0\}, \text{ temos que:}$$

$$x \in \overline{V}(0) \Leftrightarrow -\frac{1}{M} < x < \frac{1}{M} \text{ e } x \neq 0 \ \therefore\ x \in \overline{V}(0) \Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{1}{M}.$$

E, como $0 < |x| < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{|x|} > M$, concluímos que, dado M, $M > 0$, existe δ, $\delta = \frac{1}{M}$, tal que:

$0 < |x - 0| < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{|x|} > M$, ou seja, $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

b) Para entender a definição 2, consideremos a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\frac{1}{|x|}$ e vejamos o que ocorre com os valores $f(x)$ quando x tende a zero.

• Dado o número positivo $M = 1000$ e considerando-se a vizinhança reduzida de zero:

$$\overline{V}(0) = \left]-\frac{1}{1\,000}, \frac{1}{1\,000}\right[- \{0\}, \text{ temos que:}$$

$$x \in \overline{V}(0) \Leftrightarrow -\frac{1}{1\,000} < x < \frac{1}{1\,000} \text{ e } x \neq 0 \therefore x \in \overline{V}(0) \Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{1}{1\,000}.$$

E, como $0 < |x| < \frac{1}{1\,000} \Rightarrow \frac{1}{|x|} > 1000$ e $\frac{1}{|x|} > 1000 \Rightarrow -\frac{1}{|x|} < -1000$, concluímos que: $x \in \overline{V}(0) \Rightarrow f(x) < -1000$.

• Generalizando, dado qualquer real positivo M e considerando-se a vizinhança reduzida de zero:

$$\overline{V}(0) = \left]-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right[- \{0\}, \text{ temos que:}$$

$$x \in \overline{V}(0) \Leftrightarrow -\frac{1}{M} < x < \frac{1}{M} \text{ e } x \neq 0 \therefore x \in \overline{V}(0) \Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{1}{M}.$$

E, como $0 < |x| < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{|x|} > M$ e $\frac{1}{|x|} > M \Rightarrow -\frac{1}{|x|} < -M$, concluímos que, dado M, $M > 0$, existe δ, $\delta = \frac{1}{M}$, tal que: $0 < |x - 0| < \frac{1}{M} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} < -M$, ou seja, $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

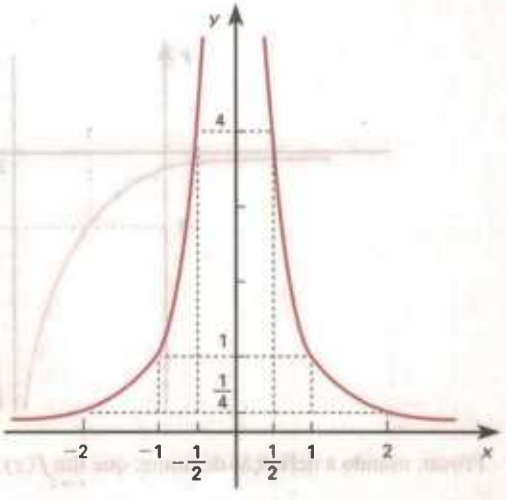
Exercícios resolvidos

R.1 Seja a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Esboçar o gráfico de f e, através do gráfico, calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Resolução

x	$\frac{1}{x^2}$ ($f(x)$)
2	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{1}{2}$	4
$-\frac{1}{2}$	4
-1	1
-2	$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$



Através do gráfico, percebemos que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Nota: abusamos da intuição quando ligamos os seis pontos, obtidos pela tabela, conforme o gráfico anterior. Atribua mais alguns valores a x a fim de obter mais pontos desse gráfico.

R.2 Seja $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Provar, usando a definição de limite, que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo M, existe algum real positivo δ, tal que:

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Observe que:

$$\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x^2}\right| > M \therefore \frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > \sqrt{M} \therefore \frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Assim sendo, dado M, $M > 0$, basta escolhermos $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ e podemos concluir a demonstração.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Dado um real positivo qualquer M, existe o real positivo δ, $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, tal que:

$$0 < |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}};$$

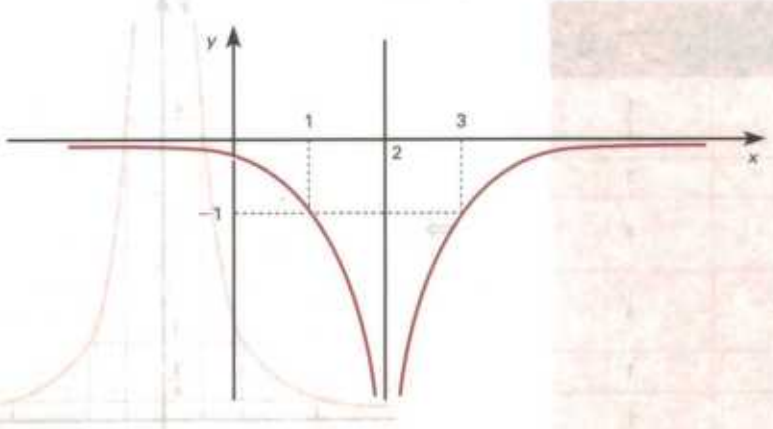
$$0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow \frac{1}{|x|} > \sqrt{M}; \frac{1}{|x|} > \sqrt{M} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M.$$

Portanto, temos: $0 < |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$.

Logo, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

(c.q.d.)

R.3 Seja a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\frac{1}{|x - 2|}$, cujo gráfico é:



Provar, usando a definição de limite, que $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo M, existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow -\frac{1}{|x-2|} < -M.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Observe que:

$$-\frac{1}{|x-2|} < -M \Leftrightarrow \frac{1}{|x-2|} > M \therefore -\frac{1}{|x-2|} < -M \Leftrightarrow 0 < |x-2| < \frac{1}{M}.$$

Assim sendo, dado M, $M > 0$, basta escolhermos $\delta = \frac{1}{M}$ e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Dado um real positivo qualquer M, existe o real positivo δ, $\delta = \frac{1}{M}$, tal que:

$$0 < |x-2| < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} > M; \quad \frac{1}{|x-2|} > M \Rightarrow -\frac{1}{|x-2|} < -M.$$

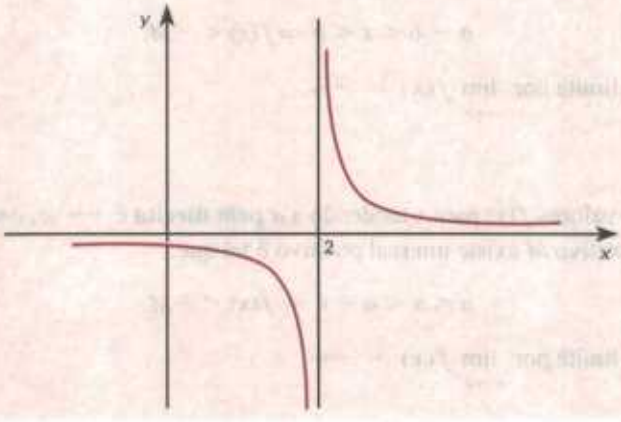
Portanto, temos: $0 < |x-2| < \frac{1}{M} \Rightarrow -\frac{1}{|x-2|} < -M$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 2}\left(-\frac{1}{|x-2|}\right) = -\infty$.

(c.q.d.)

2. Limites laterais infinitos

Seja a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x-2}$, cujo gráfico é:



Dizemos que:

- para x tendendo a 2 pela direita, os valores $f(x)$ tendem a $+\infty$; indicamos esse fato por:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty;$$

- para x tendendo a 2 pela esquerda, os valores $f(x)$ tendem a $-\infty$; indicamos esse fato por:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty.$$

Os dois limites citados são os **limites laterais** de f para x tendendo a 2 pela direita e pela esquerda, respectivamente.

Definições

Seja f uma função real de variável real tal que existe um intervalo aberto $]a, b[$, $a < b$, contido no domínio de f.

Definição 1

O limite dos valores $f(x)$ para x tendendo a b **pela esquerda** é $+\infty$ se, e somente se, para qualquer real positivo M existe algum real positivo δ tal que:

$$b - \delta < x < b \Rightarrow f(x) > M.$$

Indicamos esse limite por $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

Definição 2

O limite dos valores $f(x)$ para x tendendo a a **pela direita** é $+\infty$ se, e somente se, para qualquer real positivo M existe algum real positivo δ tal que:

$$a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Indicamos esse limite por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

Definição 3

O limite dos valores $f(x)$ para x tendendo a b **pela esquerda** é $-\infty$ se, e somente se, para qualquer real positivo M existe algum real positivo δ tal que:

$$b - \delta < x < b \Rightarrow f(x) < -M.$$

Indicamos esse limite por $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$.

Definição 4

O limite dos valores $f(x)$ para x tendendo a a **pela direita** é $-\infty$ se, e somente se, para qualquer real positivo M existe um real positivo δ tal que:

$$a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

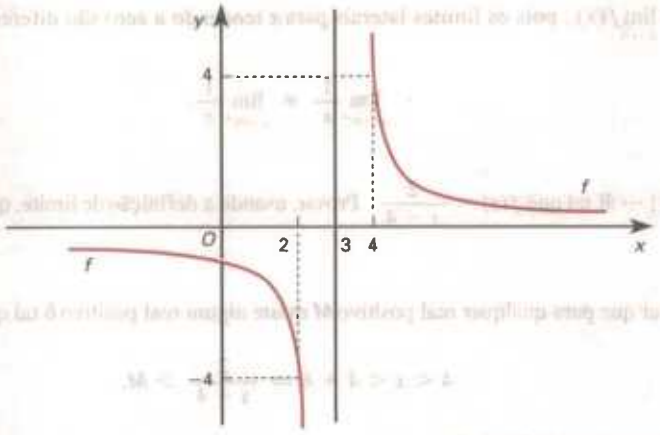
Indicamos esse limite por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Nota: dizemos que existe $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ se, e somente se, **existem e são iguais** os limites laterais de $f(x)$ para x tendendo a p, isto é:

1. $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = \lim\limits_{x \to p^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to p} f(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x \to p^-} f(x) = \lim\limits_{x \to p^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to p} f(x) = -\infty$.

Exercícios resolvidos

R.4 Seja a função $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{4}{x-3}$, cujo gráfico é:



Através do gráfico, calcular $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

Resolução

Quando x tende a 3 pela esquerda, os valores $f(x)$ tendem a $-\infty$, ou seja: $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{4}{x-3} = -\infty$.

E quando x tende a 3 pela direita, os valores $f(x)$ tendem a $+\infty$, ou seja: $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{4}{x-3} = +\infty$.

Note que esses limites laterais são diferentes; por isso, dizemos que **não** existe $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4}{x-3}$.

R.5 Seja a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Esboçar o gráfico de f e calcular $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

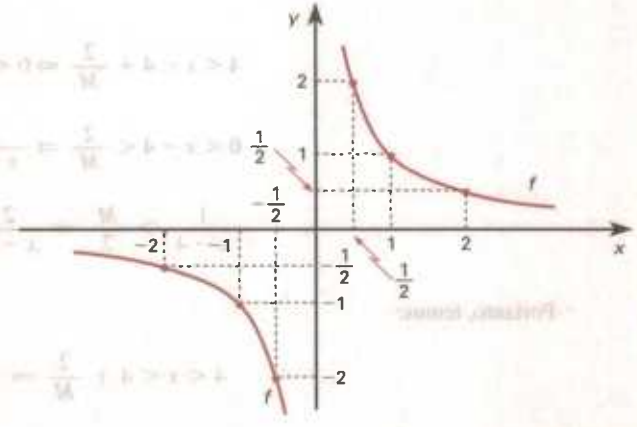
b) Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

Resolução

a)

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
2	$\frac{1}{2}$
1	1
$\frac{1}{2}$	2
$-\frac{1}{2}$	−2
−1	1
−2	$-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$



Observando o gráfico, temos:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ e } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

b) Não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$, pois os limites laterais para x tendendo a zero são diferentes, isto é:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}.$$

R.6 Seja $f: \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{2}{x-4}$. Provar, usando a definição de limite, que $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$.

Resolução

Devemos provar que para qualquer real positivo M existe algum real positivo δ tal que:

$$4 < x < 4 + \delta \Rightarrow \frac{2}{x-4} > M.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ)

Observe que:

$$\frac{2}{x-4} > M \Leftrightarrow 0 < \frac{x-4}{2} < \frac{1}{M}$$

$$\therefore \frac{2}{x-4} > M \Leftrightarrow 0 < x - 4 < \frac{2}{M}$$

$$\therefore \frac{2}{x-4} > M \Leftrightarrow 4 < x < 4 + \frac{2}{M}.$$

Assim, dado M, $M > 0$, basta escolhermos $\delta = \frac{2}{M}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Dado um real positivo qualquer M, existe o real positivo δ, $\delta = \frac{2}{M}$, tal que:

$$4 < x < 4 + \frac{2}{M} \Rightarrow 0 < x - 4 < \frac{2}{M};$$

$$0 < x - 4 < \frac{2}{M} \Rightarrow \frac{1}{x-4} > \frac{M}{2};$$

$$\frac{1}{x-4} > \frac{M}{2} \Rightarrow \frac{2}{x-4} > M.$$

Portanto, temos:

$$4 < x < 4 + \frac{2}{M} \Rightarrow \frac{2}{x-4} > M.$$

Logo, $\lim_{x \to 4^+} \frac{2}{x-4} = +\infty$.

(c.d.q.)

3. Propriedades dos limites infinitos

Apresentamos a seguir três tabelas que nos auxiliam a operar com limites infinitos. Vamos demonstrar algumas dessas propriedades e deixar as demais para você fazer como exercício.

3.1. Limite da soma

Propriedades	Se $\lim_{x \to a} f(x)$ é igual a	e $\lim_{x \to a} g(x)$ é igual a	então $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ é igual a
S.1	L	$+\infty$	$+\infty$
S.2	L	$-\infty$	$-\infty$
S.3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
S.4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
S.5	$+\infty$	$-\infty$	Não há regra geral.
S.6	$-\infty$	$+\infty$	Não há regra geral.

3.2. Limite do produto

Propriedades	Se $\lim_{x \to a} f(x)$ é igual a	e $\lim_{x \to a} g(x)$ é igual a	então $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)]$ é igual a
P.1	$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
P.2	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
P.3	$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
P.4	$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$
P.5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
P.6	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
P.7	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
P.8	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
P.9	0	$+\infty$	Não há regra geral.
P.10	0	$-\infty$	Não há regra geral.
P.11	$+\infty$	0	Não há regra geral.
P.12	$-\infty$	0	Não há regra geral.

3.3. Limite do quociente

Propriedades	Se $\lim_{x \to a} f(x)$ é igual a	e $\lim_{x \to a} g(x)$ é igual a	então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ é igual a
Q.1	$L > 0$	0	• $+\infty$, se existe $\bar{V}(a)$ tal que $g(x) > 0$, $\forall x, x \in \bar{V}(a)$; • $-\infty$, se existe $\bar{V}(a)$ tal que $g(x) < 0$, $\forall x, x \in \bar{V}(a)$.
Q.2	$L < 0$	0	• $+\infty$, se existe $\bar{V}(a)$ tal que $g(x) < 0$, $\forall x, x \in \bar{V}(a)$; • $-\infty$, se existe $\bar{V}(a)$ tal que $g(x) > 0$, $\forall x, x \in \bar{V}(a)$.
Q.3	L	$+\infty$	0
Q.4	L	$-\infty$	0
Q.5	$+\infty$	$L > 0$	$+\infty$
Q.6	$+\infty$	$L < 0$	$-\infty$
Q.7	$+\infty$	0	• $+\infty$, se existe $\bar{V}(a)$ tal que $g(x) > 0$, $\forall x, x \in \bar{V}(a)$; • $-\infty$, se existe $\bar{V}(a)$ tal que $g(x) < 0$, $\forall x, x \in \bar{V}(a)$.
Q.8	$-\infty$	$L > 0$	$-\infty$
Q.9	$-\infty$	$L < 0$	$+\infty$
Q.10	$-\infty$	0	• $+\infty$, se existe $\bar{V}(a)$ tal que $g(x) < 0$, $\forall x, x \in \bar{V}(a)$; • $-\infty$, se existe $\bar{V}(a)$ tal que $g(x) > 0$, $\forall x, x \in \bar{V}(a)$.
Q.11	$+\infty$	$+\infty$	**Não há regra geral.**
Q.12	$+\infty$	$-\infty$	Não há regra geral.
Q.13	$-\infty$	$-\infty$	**Não há regra geral.**
Q.14	$-\infty$	$+\infty$	**Não** há regra geral.
Q.15	0	0	Não há regra geral.

4. Propriedades dos limites laterais infinitos

As três tabelas anteriores continuam válidas para limites laterais infinitos, adaptando as propriedades Q.1, Q.2, Q.7 e Q.10 do seguinte modo:

Propriedades	Se $\lim_{x \to a^-} f(x)$ é igual a	e $\lim_{x \to a^-} g(x)$ é igual a	então $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ é igual a
Q'.1	$L > 0$	0	• $+\infty$, se existe $]b, a[$, $b < a$, tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]b, a[$; • $-\infty$, se existe $]b, a[$, $b < a$, tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]b, a[$.
Q'.2	$L < 0$	0	• $+\infty$, se existe $]b, a[$, $b < a$, tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]b, a[$; • $-\infty$, se existe $]b, a[$, $b < a$, tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]b, a[$.
Q'.7	$+\infty$	0	• $+\infty$, se existe $]b, a[$, $b < a$, tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]b, a[$; • $-\infty$, se existe $]b, a[$, $b < a$, tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]b, a[$.
Q'.10	$-\infty$	0	• $+\infty$, se existe $]b, a[$, $b < a$, tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]b, a[$; • $-\infty$, se existe $]b, a[$, $b < a$, tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]b, a[$.

Propriedades	Se $\lim_{x \to a^+} f(x)$ é igual a	e $\lim_{x \to a^+} g(x)$ é igual a	então $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ é igual a
Q''.1	$L > 0$	0	• $+\infty$, se existe $]a, b[$, $a < b$, tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]a, b[$; • $-\infty$, se existe $]a, b[$, $a < b$, tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]a, b[$.
Q''.2	$L < 0$	0	• $+\infty$, se existe $]a, b[$, $a < b$, tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]a, b[$; • $-\infty$, se existe $]a, b[$, $a < b$, tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]a, b[$.
Q''.7	$+\infty$	0	• $+\infty$, se existe $]a, b[$, $a < b$, tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]a, b[$; • $-\infty$, se existe $]a, b[$, $a < b$, tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]a, b[$.
Q''.10	$-\infty$	0	• $+\infty$, se existe $]a, b[$, $a < b$, tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]a, b[$; • $-\infty$, se existe $]a, b[$, $a < b$, tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]a, b[$.

Exercícios resolvidos

R.7 Provar que, se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$.

Resolução

Devemos provar que para qualquer real positivo M existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow (f + g)(x) > M.$$

Por hipótese, temos que, dado um real positivo qualquer $\frac{M}{2}$, existem reais positivos δ_1 e δ_2 tais que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > \frac{M}{2} \text{ e } 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) > \frac{M}{2}.$$

Sendo $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \frac{M}{2} \\ g(x) > \frac{M}{2} \end{cases}$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow (f + g)(x) > M.$$

Logo, $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$. (c.q.d.)

R.8 Provar que, se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L$, $(L > 0)$, então $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Resolução

Devemos provar que para qualquer real positivo M existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow (f \cdot g)(x) > M.$$

Por hipótese, temos que $\lim_{x \to a} g(x) = L$, com $L > 0$. Logo, existem reais positivos δ_1 e N tais que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow g(x) > N \text{ (pelo exercício R.23, do capítulo 23).}$$

Temos ainda que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$. Logo, para o real positivo $\frac{M}{N}$, existe um real positivo δ_2 tal que:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow f(x) > \frac{M}{N}.$$

Sendo $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, temos:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} g(x) > N \\ f(x) > \frac{M}{N} \end{cases}$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) \cdot g(x) > N \cdot \frac{M}{N} \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow (f \cdot g)(x) > M.$$

Logo, $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$. (c.q.d.)

R.9 Provar que, se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $L > 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e existe uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, tal que $g(x) > 0$, $\forall x, x \in \overline{V}(a)$, então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Resolução

Devemos provar que para qualquer real positivo M existe um real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M.$$

I. Temos, por hipótese, que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $L > 0$. Pelo teorema da conservação do sinal (exercício R.25, capítulo 23), existe um real positivo δ_1 tal que: $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow 0 < \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$.

II. Também por hipótese, temos que $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e existe $\overline{V}(a)$ tal que $g(x) > 0$, $\forall x, x \in \overline{V}(a)$.

Logo, para $\varepsilon = \frac{L}{2M}$, em que M é um real positivo qualquer, existe um real positivo δ_2 tal que:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - 0| < \frac{L}{2M}$$

e também existe um real positivo δ_3 tal que: $0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow g(x) > 0$.

Assim, por (I) e (II) concluímos que, para qualquer real positivo M, existe um real positivo δ, $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \frac{L}{2} \\ |g(x)| < \frac{L}{2M} \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \frac{L}{2} \\ 0 < g(x) < \frac{L}{2M} \end{cases}$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \frac{L}{2} \\ \frac{\frac{L}{2}}{g(x)} > M \end{cases} \quad \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M.$$

Logo, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. (c.q.d.)

Nota: nos exercícios R.7, R.8 e R.9, provamos as propriedades S.3, P.1 e Q.1 das tabelas dos limites infinitos; não demonstraremos as demais propriedades, mas sugerimos que você o faça como exercício.

R.10 Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{3x + 5}{(x - 1)^2}$.

Resolução

Observe que:

I. $\lim_{x \to 1} (3x + 5) = 8$;

II. $\lim_{x \to 1} (x - 1)^2 = 0$ e existe alguma vizinhança reduzida de 1, $\overline{V}(1)$, tal que $(x - 1)^2 > 0$, $\forall x, x \in \overline{V}(1)$.

As afirmações (I) e (II) nos permitem concluir, pela propriedade Q.1, que: $\lim_{x \to 1} \frac{3x + 5}{(x - 1)^2} = +\infty$.

R.11 Calcular $\lim_{x \to 5} \frac{3 - x}{|x - 5|}$.

Resolução

Observe que:

I. $\lim_{x \to 5} (3 - x) = -2$;

II. $\lim_{x \to 5} |x - 5| = 0$ e existe alguma vizinhança reduzida de 5, $\overline{V}(5)$, tal que $|x - 5| > 0$, $\forall x, x \in \overline{V}(5)$.

As informações (I) e (II) nos permitem concluir, pela propriedade Q.2, que: $\lim_{x \to 5} \frac{3 - x}{|x - 5|} = -\infty$.

R.12 Calcular $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2x - x^2}{(x+4)^2}$.

Resolução

Observe que:

I. $\lim\limits_{x \to -4} (2x - x^2) = -24$;

II. $\lim\limits_{x \to -4} (x+4)^2 = 0$ e existe alguma vizinhança reduzida de -4, $\overline{V}(-4)$, tal que $(x+4)^2 > 0$, $\forall x$, $x \in \overline{V}(-4)$.

As informações (I) e (II) nos permitem concluir, pela propriedade Q.2, que: $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2x - x^2}{(x+4)^2} = -\infty$.

R.13 Calcular $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x + 4}{|x+1|}$.

Resolução

Observe que:

I. $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + x + 4) = 2$;

II. $\lim\limits_{x \to -1} |x+1| = 0$ e existe alguma vizinhança reduzida de -1, $\overline{V}(-1)$, tal que $|x+1| > 0$, $\forall x$, $x \in \overline{V}(-1)$.

As informações (I) e (II) nos permitem concluir, pela propriedade Q.1, que: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x + 4}{|x+1|} = +\infty$.

R.14 Calcular $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 3x + 11}{x^3}$.

Resolução

Observe que:

I. $\lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 3x + 11) = 11$;

II. $\lim\limits_{x \to 0^-} x^3 = 0$ e existe $]b, 0[$, $b < 0$, tal que $x^3 < 0$, $\forall x$, $x \in]b, 0[$.

As informações (I) e (II) nos permitem concluir, pela propriedade Q'.1, para limites laterais à esquerda, que: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 3x + 11}{x^3} = -\infty$.

R.15 Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 3x + 11}{x^3}$.

Resolução

Observe que:

I. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 11) = 11$;

II. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^3 = 0$ e existe $]0, b[$, $b > 0$, tal que $x^3 > 0$, $\forall x$, $x \in]0, b[$.

As informações (I) e (II) nos permitem concluir, pela propriedade Q".1, para limites laterais à direita, que:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 3x + 11}{x^3} = +\infty.$$

R.16 Calcular $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1 - x}{\sqrt{x-3}}$.

Resolução

Observe que:

I. $\lim\limits_{x \to 3^+} (1 - x) = -2$;

II. $\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0$ e existe $]3, b[$, $3 < b$, tal que $\sqrt{x-3} > 0$, $\forall x$, $x \in]3, b[$.

As informações (I) e (II) nos permitem concluir, pela propriedade Q'.2, para limites laterais à direita, que:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1 - x}{\sqrt{x - 3}} = -\infty.$$

R.17 Calcular $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x}{\sqrt{1 - x}}$.

Resolução

Observe que:

I. $\lim_{x \to 1^-} (x^2 + x) = 2$;

II. $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$ e existe $]b, 1[$, $b < 1$, tal que $\sqrt{1 - x} > 0$, $\forall x, x \in]b, 1[$.

As informações (I) e (II) nos permitem concluir, pela propriedade Q'.1, para limites laterais à esquerda, que: $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x}{\sqrt{1 - x}} = +\infty$.

R.18 Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 1)^3}$.

Resolução

Observe que:

I. $\lim_{x \to 1} (x^2 - 4x + 3) = 0$;

II. $\lim_{x \to 1} (x - 1)^3 = 0$.

Assim, pela propriedade Q.15, temos uma **indeterminação**. Para eliminar essa indeterminação, basta observarmos que, em qualquer vizinhança reduzida de 1, temos:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 1)^3} = \frac{\cancel{(x - 1)}(x - 3)}{\cancel{(x - 1)^3}} = \frac{x - 3}{(x - 1)^2}$$

Logo, $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 1)^3} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 3}{(x - 1)^2}$.

Note que:

III. $\lim_{x \to 1} (x - 3) = -2$;

IV. $\lim_{x \to 1} (x - 1)^2 = 0$ e existe vizinhança reduzida de 1, $\overline{V}(1)$, tal que $(x - 1)^2 > 0$, $\forall x, x \in \overline{V}(1)$.

As informações (III) e (IV) nos permitem concluir, pela propriedade Q.2, que: $\lim_{x \to 1} \frac{(x - 3)}{(x - 1)^2} = -\infty$.

Logo, $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 1)^3} = -\infty$.

R.19 Provar que não existe $\lim_{x \to 2} \frac{3x - 1}{x^2 - 2x}$.

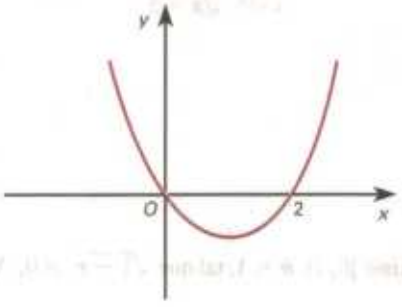
Resolução

Temos:

I. $\lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5$;

II. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 2x) = 0$.

Observemos o gráfico da função $g(x) = x^2 - 2x$:



Note que:

III. se $x \in]2, b[$, $b > 2$, então $g(x) > 0$.

Logo, (I) e (III) nos permitem concluir que: $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x - 1}{x^2 - 2x} = +\infty$.

Note também que:

IV. se $x \in]1, 2[$, então $g(x) < 0$.

Logo, (I) e (IV) nos permitem concluir que: $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x - 1}{x^2 - 2x} = -\infty$.

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x - 1}{x^2 - 2x} \neq \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x - 1}{x^2 - 2x}$, temos que **não** existe $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 1}{x^2 - 2x}$.

5. Cálculo de $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, dado que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Propriedades

ℓR.1

Se f é uma função tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, então:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty, \ \forall n, n \in \mathbb{N}^*.$$

ℓR.2

Se f é uma função tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, então:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = -\infty, \ \forall n, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \text{ ímpar}.$$

Demonstraremos a propriedade ℓR.1, deixando a ℓR.2 para você fazer como exercício.

Demonstração de ℓR.1

Devemos provar que para qualquer real positivo N existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \sqrt[n]{f(x)} > N.$$

Por hipótese, temos que para o real positivo N^n, $n \in \mathbb{N}^*$, existe um real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N^n.$$

Como $f(x) > N^n \Rightarrow \sqrt[n]{f(x)} > N$, temos:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \sqrt[n]{f(x)} > N, \text{ ou seja, } \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty. \qquad \text{(c.q.d.)}$$

Nota: as propriedades ℓR.1 e ℓR.2 também valem para limites laterais.

Exercícios resolvidos

R.20 Calcular $\lim_{x \to 1} \sqrt[4]{\frac{3 + x}{(x - 1)^2}}$.

Resolução

Observe que:

I. $\lim_{x \to 1} (3 + x) = 4$;

II. $\lim_{x \to 1} (x - 1)^2 = 0$ e existe alguma vizinhança reduzida de 1, $\overline{V}(1)$, tal que $(x - 1)^2 > 0$, $\forall x, x \in \overline{V}(1)$.

Pela propriedade Q.1, concluímos, através de (I) e (II), que: $\lim_{x \to 1} \frac{3 + x}{(x - 1)^2} = +\infty$.

Assim, pela propriedade ℓR.1, temos que: $\lim_{x \to 1} \sqrt[4]{\frac{3 + x}{(x - 1)^2}} = +\infty$.

R.21 Calcular $\lim_{x \to -2} \sqrt[5]{\frac{x + 1}{(x + 2)^2}}$.

Resolução

I. $\lim_{x \to -2} (x + 1) = -1$;

II. $\lim_{x \to -2} (x + 2)^2 = 0$ e existe alguma vizinhança reduzida de -2, $\overline{V}(2)$, tal que $(x - 2)^2 > 0$, $\forall x$, $x \in \overline{V}(-2)$.

Pela propriedade Q.2, concluímos, através de (I) e (II), que: $\lim_{x \to -2} \frac{x + 1}{(x + 2)^2} = -\infty$.

Assim, pela propriedade ℓR.2, temos que: $\lim_{x \to -2} \sqrt[5]{\frac{(x + 1)}{(x + 2)^2}} = -\infty$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3, B.5, B.7 (a), B.8 (a até d), B.9 (a até g), B.10 (a, b), B.11 (a, b, c), C.1 (a, b), C.2 (a), C.3 (a).

Tarefa de casa: exercícios B.2, B.4, B.6, B.7 (b), B.8 (e até h), B.9 (h até n), B.10 (c, d), B.11 (d, e, f), C.1 (c, d), C.2 (b), C.3 (b).

Exercícios básicos

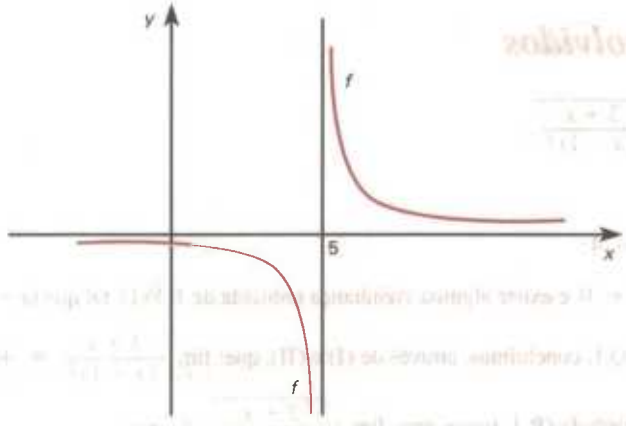
B.1 Esboce o gráfico da função $f(x) = |\text{tg } x|$ e calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$.

B.2 Através do gráfico da função $f(x) = -|\text{cotg } x|$, calcule $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$.

B.3 Seja $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$. Prove, usando a definição de limite, que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

B.4 Dada a função $f(x) = -\dfrac{1}{|x - 3|}$, prove, através da definição de limite, que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$.

B.5 A função $f(x) = \dfrac{1}{x - 5}$ tem como gráfico:



a) Calcule $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$.

b) Existe $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$? Por quê?

B.6 Seja $f(x) = \text{tg } x$.

a) Esboce o gráfico de f e calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$.

b) Existe $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$? Por quê?

B.7 Seja a função $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$. Prove, usando a definição de limite, que:

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$.

B.8 Através das propriedades dos limites infinitos, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x - 6}{(x - 2)^2}$;

b) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{1 - x}{|x - 8|}$;

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x}{(x - 3)^4}$;

d) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3 + x}{|x + 4|}$;

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{(x - 1)^6}$;

f) $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{1}{|x - 10|}$;

g) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9}}{(x - 4)^2}$;

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 1}{x^2}$.

B.9 Utilizando as propriedades dos limites laterais infinitos, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+3}{(x-1)^5}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+3}{(x-1)^5}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x-1}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x-1}{\sqrt[4]{2-x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3}{x^5}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{x^5}$;

j) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{(x+1)^2}{(x-3)^3}$;

k) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x+1)^2}{(x-3)^3}$;

l) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x-4}}$;

m) $\lim\limits_{x\to 9^+} \dfrac{4}{\sqrt{x-9}}$;

n) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{1-x}}$.

B.10 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2-7x+6}{(x-6)^5}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^4-10x^2+9}{(x+3)^7}$.

B.11 Obtenha os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 9} \sqrt[6]{\dfrac{5+x}{(x-9)^4}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{(x-2)^2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[5]{\dfrac{2x-9}{(x-3)^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[8]{\dfrac{3}{(x-1)^6}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[7]{\dfrac{1-x}{(3-x)^4}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt[4]{\dfrac{x-2}{|x-4|}}$.

Exercícios complementares

C.1 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{(\sqrt{x}-3)|x-9|}$;

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-4x^2+x-4}{(x-4)^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-3x^2+3x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[6]{\dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)^3}}$.

C.2 Encontre os seguintes limites laterais:

a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x-3}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)^2}$.

C.3 Prove que não existem os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+5}{x^2-9}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5}{x^2-3x+2}$.

Sugestão: prove que os limites laterais são diferentes.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) O limite $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)^3}$ é igual a:

a) $+\infty$.
b) $-\infty$.
c) 0.
d) 1.
e) nenhuma das respostas anteriores.

V.2 (UFPR) Se $f(x) = \dfrac{x-1}{|x-3|}$, então:

a) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 1$.
b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$.
c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.
d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.
e) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$.

V.3 (Mackenzie-SP) O limite lateral $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x-1}{x^2-5x+4}$ é igual a:

a) 1. b) 2. c) 3. d) $-\infty$. e) $+\infty$.

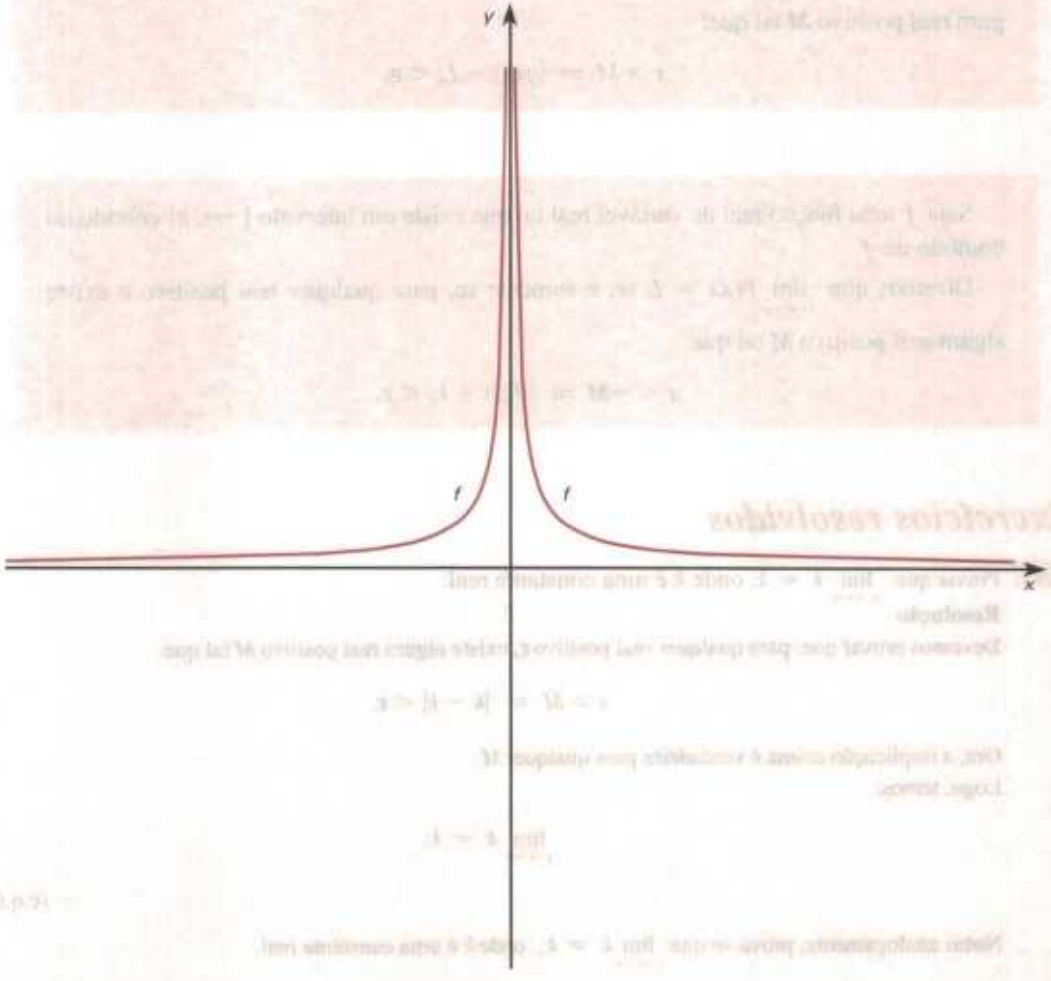
V.4 (FEI-SP) Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{\sqrt{x}-2}{(x-4)^2}$.

Capítulo 27

Cálculo do limite de $f(x)$ para x tendendo a $+\infty$ ou a $-\infty$

1. Limites finitos para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Consideremos a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$, cujo gráfico esboçamos no início do capítulo 26:



Dizemos que x **tende a** $+\infty$ se, para qualquer real positivo M, tem-se que $x > M$. Analogamente, x **tende a** $-\infty$, se $x < -M$ para qualquer real positivo M. Analisando o gráfico anterior, observemos que:

- os valores $f(x)$ tendem a zero quando x tende a $+\infty$. Indicamos esse fato por:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|x|} = 0.$$

- os valores $f(x)$ tendem a zero quando x tende a $-\infty$. Indicamos esse fato por:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{|x|} = 0.$$

Vamos formalizar esses conceitos através das definições seguintes.

Seja f uma função real de variável real tal que existe um intervalo $]a, +\infty[$ contido no domínio de f.

Dizemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se, e somente se, para qualquer real positivo ε existe algum real positivo M tal que:

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Seja f uma função real de variável real tal que existe um intervalo $]-\infty, a[$ contido no domínio de f.

Dizemos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se, e somente se, para qualquer real positivo ε existe algum real positivo M tal que:

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Provar que $\lim_{x \to +\infty} k = k$, onde k é uma constante real.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo M tal que:

$$x > M \Rightarrow |k - k| < \varepsilon.$$

Ora, a implicação acima é verdadeira para qualquer M.

Logo, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} k = k.$$

(c.q.d.)

Nota: analogamente, prova-se que $\lim_{x \to -\infty} k = k$, onde k é uma constante real.

R.2 Provar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo M tal que:

$$x > M \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha de M)

Observe que:

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \therefore \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Como x tende a $+\infty$, temos que $|x| = x$.

Logo, $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ e $x \to +\infty \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$.

Assim, dado ε, $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $M = \frac{1}{\varepsilon}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo $M = \frac{1}{\varepsilon}$ tal que:

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon};\ |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon;\ \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Logo, $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(c.q.d.)

R.3 Provar que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo M tal que:

$$x < -M \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha de M)

Observe que:

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \therefore \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Como x tende a $-\infty$, temos que $|x| = -x$.

Logo, $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ e $x \to -\infty \Leftrightarrow -x > \frac{1}{\varepsilon}$, ou seja, $x < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Assim, dado ε, $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $M = \frac{1}{\varepsilon}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo $M = \frac{1}{\varepsilon}$ tal que:

$$x < -\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow -x > \frac{1}{\varepsilon};\ -x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon};\ |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon;\ \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Logo, $x < -\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(c.q.d.)

R.4 Provar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{kx^n} = 0$, onde k é uma constante real não-nula e $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo M tal que:

$$x > M \Rightarrow \left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha de M)

Observe que:

$$\left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|k| \cdot |x^n|} < \varepsilon$$

$$\therefore \left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |k| \cdot |x^n| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \therefore \left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^n| > \frac{1}{|k|\varepsilon}.$$

Como x tende a $+\infty$, temos que x é positivo; logo, podemos escrever:

$$x^n > \frac{1}{|k|\varepsilon} \quad \therefore \quad x > \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}}.$$

Assim, dado ε, $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $M = \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo, M, $M = \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}}$, tal que:

$$x > \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}} \Rightarrow x^n > \frac{1}{|k|\varepsilon}; \quad x^n > \frac{1}{|k|\varepsilon} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^n} < |k|\varepsilon;$$

$$0 < \frac{1}{x^n} < |k|\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|x^n||k|} < \varepsilon; \quad \frac{1}{|x^n||k|} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Logo, $x > \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}} \Rightarrow \left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{kx^n} = 0$.

(c.q.d.)

R.5 Provar que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{kx^n} = 0$, onde k é uma constante real não-nula e $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo M tal que:

$$x < -M \Rightarrow \left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha de M)

Observe que:

$$\left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|k||x^n|} < \varepsilon \quad \therefore \left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |k||x^n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\therefore \left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^n| > \frac{1}{|k|\varepsilon} \quad \therefore \left| \frac{1}{kx^n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}}.$$

Como x tende a $-\infty$, temos que x é negativo; logo, podemos escrever:

$$\left|\frac{1}{kx^n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -x > \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}} \therefore \left|\frac{1}{kx^n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}}.$$

Assim, dado ε, basta escolhermos $M = \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo M, $M = \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}}$, tal que:

$$x < -\frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}}; \quad |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}} \Rightarrow |x^n| > \frac{1}{|k|\varepsilon};$$

$$|x^n| > \frac{1}{|k|\varepsilon} \Rightarrow |kx^n| > \frac{1}{\varepsilon}; \quad |kx^n| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{kx^n}\right| < \varepsilon.$$

Logo, $x < -\frac{1}{\sqrt[n]{|k|\varepsilon}} \Rightarrow \left|\frac{1}{kx^n} - 0\right| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{kx^n} = 0$.

(c.q.d.)

R.6 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3x^5}$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{7x^4}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{4x}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{4x^{10}}$.

Resolução

a) Pelo exercício R.4, temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3x^5} = 0$.

b) Podemos escrever $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{7x^4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{7}{9}x^4}$.

Logo, pelo exercício R.4, temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{7x^4} = 0$.

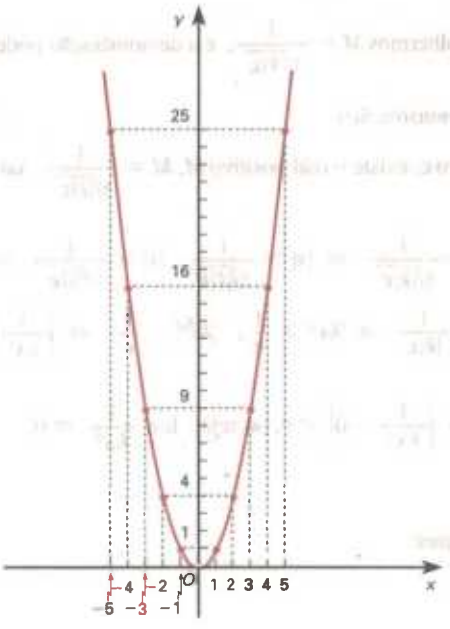
c) Pelo exercício R.5, temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{4x} = 0$.

d) Podemos escrever $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{4x^{10}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{4}{5}x^{10}}$.

Logo, pelo exercício R.5, temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{4x^{10}} = 0$.

2. Limites infinitos para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, cujo gráfico é a parábola:



Observemos o gráfico.

- Se x tende a $+\infty$, então $f(x)$ tende a $+\infty$. Indicamos esse fato por: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.
- Se x tende a $-\infty$, então $f(x)$ tende a $+\infty$. Indicamos esse fato por: $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

Vamos formalizar esses conceitos através das duas definições seguintes.

Seja f uma função real de variável real tal que existe um intervalo $]a, +\infty[$ contido no domínio de f.

- Dizemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se, e somente se, para qualquer real positivo N existe algum real positivo M tal que: $x > M \Rightarrow f(x) > N$.
- Dizemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se, e somente se, para qualquer real positivo N existe algum real positivo M tal que: $x > M \Rightarrow f(x) < -N$.

Seja f uma função real de variável real tal que existe um intervalo $]-\infty, a[$ contido no domínio de f.

- Dizemos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se, e somente se, para qualquer real positivo N existe algum real positivo M tal que: $x < -M \Rightarrow f(x) > N$.
- Dizemos que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se, e somente se, para qualquer real positivo N existe algum real positivo M tal que: $x < -M \Rightarrow f(x) < -N$.

Exercícios resolvidos

R.7 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$. Provar que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo N, existe algum real positivo M tal que:

$$x > M \Rightarrow x^3 > N.$$

Fase 1 (análise para a escolha de M)

A desigualdade $x^3 > N$ pode ser escrita como $x > \sqrt[3]{N}$.

Assim, dado N, $N > 0$, basta escolhermos $M = \sqrt[3]{N}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo N, existe o real positivo $M = \sqrt[3]{N}$ tal que: $x > \sqrt[3]{N} \Rightarrow x^3 > N$.

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

(c.q.d.)

R.8 Provar que:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e n par;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$, $\forall n, n \in \mathbb{N}$ e n ímpar.

Resolução

a) Para qualquer real positivo N, existe o real positivo $M = \sqrt[n]{N}$ tal que: $x > \sqrt[n]{N} \Rightarrow x^n > N$.

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

b) Para qualquer real positivo N, existe o real positivo $M = \sqrt[n]{N}$ tal que:

$$x < -\sqrt[n]{N} \Rightarrow |x| > \sqrt[n]{N};$$

$$|x| > \sqrt[n]{N} \Rightarrow |x|^n > N;\ |x|^n > N, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \text{ é par} \Rightarrow x^n > N.$$

Logo, $x < -\sqrt[n]{N} \Rightarrow x^n > N$, ou seja, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$.

c) Para qualquer real positivo N, existe o real positivo $M = \sqrt[n]{N}$ tal que:

$$x < -\sqrt[n]{M} \Rightarrow |x| > \sqrt[n]{M};\ |x| > \sqrt[n]{M} \Rightarrow |x|^n > M.$$

Como n é um número natural ímpar e $x < 0$, pois x tende a $-\infty$, podemos escrever:

$$|x|^n > M \Rightarrow -x^n > M;\ -x^n > M \Rightarrow x^n < -M.$$

Logo, $x < -\sqrt[n]{M} \Rightarrow x^n < -M$, ou seja, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

(c.q.d.)

R.9 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^8$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^7$.

Resolução

De acordo com o exercício R.8, temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$. Logo, temos:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$.

Ainda pelo exercício R.8, temos que:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e n par;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$, $\forall n, n \in \mathbb{N}$ e n ímpar.

Logo, temos:

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^8 = +\infty$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^7 = -\infty$.

3. Propriedades dos limites para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

As tabelas a seguir mostram as propriedades que nos auxiliam a operar com limites para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Demonstraremos algumas dessas propriedades, deixando as demais para você fazer como exercício.

3.1. Limite da soma

Propriedades	Se $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ é igual a	e $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ é igual a	então $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)]$ é igual a
IS.0	L_1	L_2	$L_1 + L_2$
IS.1	L	$+\infty$	$+\infty$
IS.2	L	$-\infty$	$-\infty$
IS.3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
IS.4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
IS.5	$+\infty$	$-\infty$	Não há regra geral.
IS.6	$-\infty$	$+\infty$	Não há regra geral.

3.2. Limite do produto

Propriedades	Se $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ é igual a	e $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ é igual a	então $\lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)]$ é igual a
IP.0	L_1	L_2	$L_1 L_2$
IP.1	$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
IP.2	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
IP.3	$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
IP.4	$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$
IP.5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
IP.6	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
IP.7	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
IP.8	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
IP.9	0	$+\infty$	Não há regra geral.
IP.10	0	$-\infty$	Não há regra geral.
IP.11	$+\infty$	0	Não há regra geral.
IP.12	$-\infty$	0	Não há regra geral.

3.3. Limite do quociente

Propriedades	Se $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ é igual a	e $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ é igual a	então $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ é igual a
IQ.0	L_1	$L_2 \neq 0$	$\frac{L_1}{L_2}$
IQ.1	$L > 0$	0	• $+\infty$, se existe $]a, +\infty[$ tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]a, +\infty[$; • $-\infty$, se existe $]a, +\infty[$ tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]a, +\infty[$.
IQ.2	$L < 0$	0	• $+\infty$, se existe $]a, +\infty[$ tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]a, +\infty[$; • $-\infty$, se existe $]a, +\infty[$ tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]a, +\infty[$.
IQ.3	L	$+\infty$	0
IQ.4	L	$-\infty$	0
IQ.5	$+\infty$	$L > 0$	$+\infty$
IQ.6	$+\infty$	$L < 0$	$-\infty$
IQ.7	$+\infty$	0	• $+\infty$, se existe $]a, +\infty[$ tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]a, +\infty[$; • $-\infty$, se existe $]a, +\infty[$ tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]a, +\infty[$.
IQ.8	$-\infty$	$L > 0$	$-\infty$
IQ.9	$-\infty$	$L < 0$	$+\infty$
IQ.10	$-\infty$	0	• $+\infty$, se existe $]a, +\infty[$ tal que $g(x) < 0, \forall x, x \in]a, +\infty[$; • $-\infty$, se existe $]a, +\infty[$ tal que $g(x) > 0, \forall x, x \in]a, +\infty[$.
IQ.11	$+\infty$	$+\infty$	Não há regra geral.
IQ.12	$+\infty$	$-\infty$	Não há regra geral.
IQ.13	$-\infty$	$-\infty$	Não há regra geral.
IQ.14	$-\infty$	$+\infty$	Não há regra geral.
IQ.15	0	0	Não há regra geral.

Nota: as três tabelas valem também para x tendendo a $-\infty$, sendo que nas propriedades IQ.1, IQ.2, IQ.7 e IQ.10 o intervalo $]a, +\infty[$ deve ser substituído por $]-\infty, a[$.

Exercícios resolvidos

R.10 Provar que, se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f + g)(x) = +\infty$.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo N, existe um real positivo M tal que:

$$x > M \Rightarrow (f + g)(x) > N, \text{ ou seja, } x > M \Rightarrow f(x) + g(x) > N.$$

Por hipótese, temos que, dado o real positivo $\frac{N}{2}$, existem reais positivos M_1 e M_2 tais que:

$$x > M_1 \Rightarrow f(x) > \frac{N}{2} \quad \text{e} \quad x > M_2 \Rightarrow g(x) > \frac{N}{2}.$$

Sendo $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$, temos:

$$x > M \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \dfrac{N}{2} \\ g(x) > \dfrac{N}{2} \end{cases} \therefore\ x > M \Rightarrow f(x) + g(x) > \frac{N}{2} + \frac{N}{2} \therefore\ x > M \Rightarrow (f + g)x > N.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f + g)(x) = +\infty$.

(c.q.d.)

R.11 Provar que:

a) se $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L, L > 0$, então existe um real positivo k, tal que $x > k \Rightarrow g(x) > 0$;

b) se $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L, L < 0$, então existe um real positivo k, tal que $x > k \Rightarrow g(x) < 0$;

c) se $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = L, L > 0$, então existe um real positivo k, tal que $x < -k \Rightarrow g(x) > 0$;

d) se $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = L, L < 0$, então existe um real positivo k, tal que $x < -k \Rightarrow g(x) < 0$.

Resolução

Faremos apenas a demonstração do item (a), pois as demais demonstrações são análogas.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L, L > 0$, temos que, para qualquer real positivo ε, existe um real positivo M tal que:

$$x > M \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon.$$

Assim, se considerarmos $\varepsilon = \frac{L}{2}$, teremos que existe um real positivo k tal que:

$$x > k \Rightarrow |g(x) - L| < \frac{L}{2} \therefore\ x > k \Rightarrow -\frac{L}{2} < g(x) - L < \frac{L}{2}$$

$$\therefore x > k \Rightarrow L - \frac{L}{2} < g(x) < L + \frac{L}{2} \therefore\ x > k \Rightarrow \frac{L}{2} < g(x) < \frac{3L}{2}.$$

Como $L > 0$, temos $g(x) > \frac{L}{2} > 0$.

Logo, existe um real positivo k tal que $x > k \Rightarrow g(x) > 0$.

(c.q.d.)

Nota: os quatro itens do exercício R.11 constituem o **teorema da conservação do sinal** para limites com $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Ou seja:

- se $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L, L \neq 0$, então existe um real positivo k tal que $g(x)$ conserva o sinal de L para todo x real, $x > k$.
- se $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = L, L \neq 0$, então existe um real positivo k tal que $g(x)$ conserva o sinal de L para todo x real, $x < -k$.

R.12 Provar que, se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L, L > 0$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo M, existe um real positivo N tal que:

$$x > M \Rightarrow (f \cdot g)(x) > N.$$

Por hipótese, temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L, L > 0$.

Logo, existe um real positivo M_1 tal que: $x > M_1 \Rightarrow g(x) > \frac{L}{2}$ (exercício R.11).

Temos ainda que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Logo, para um real positivo $\frac{2N}{L}$, existe um real positivo M_2 tal que: $x > M_2 \Rightarrow f(x) > \frac{2N}{L}$.

Sendo $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$, temos que:

$$x > M \Rightarrow \begin{cases} g(x) > \frac{L}{2} \\ f(x) > \frac{2N}{L} \end{cases} \quad \therefore\ x > M \Rightarrow f(x) \cdot g(x) > \frac{2N}{L} \cdot \frac{L}{2} \quad \therefore\ x > M \Rightarrow (f \cdot g)(x) > N.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$. (c.q.d.)

R.13 Provar que, se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L, L > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e existe um intervalo $]a, +\infty[$ tal que $g(x) > 0$, $\forall x, x \in]a, +\infty[$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Resolução

Devemos provar que, para qualquer real positivo N, existe um real positivo M tal que:

$$x > M \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > N.$$

Temos, por hipótese, que:

I. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L, L > 0$; logo, existe um real positivo M_1 tal que: $x > M_1 \Rightarrow f(x) > \frac{L}{2}$ (exercício R.11);

II. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ e existe $]a, +\infty[$ tal que: $g(x) > 0$, $\forall x, x \in]a, +\infty[$; logo, para $\varepsilon = \frac{L}{2N}$, em que N é um real positivo qualquer, existe um real positivo M_2 tal que: $x > M_2 \Rightarrow |g(x) - 0| < \frac{L}{2N}$ e também existe um real positivo M_3 tal que: $x > M_3 \Rightarrow g(x) > 0$.

Assim, por (I) e (II), concluímos que, para qualquer real positivo N, existe um real positivo M, $M = \text{máx}\{M_1, M_2, M_3\}$, tal que:

$$x > M \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \frac{L}{2} \\ g(x) < \frac{L}{2N} \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \therefore\ x > M \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \frac{L}{2} \\ 0 < g(x) < \frac{L}{2N} \end{cases}$$

$$\therefore\ x > M \Rightarrow \begin{cases} f(x) > \frac{L}{2} \\ \frac{\frac{L}{2}}{g(x)} > N \end{cases} \quad \therefore\ x > M \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > N. \text{ Logo, } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

(c.q.d.)

Nota: nos exercícios R.10, R.12 e R.13 provamos as propriedades IS.3, IP.1 e IQ.1 das tabelas dos limites para $x \to \pm\infty$. Não demonstraremos as demais propriedades, mas sugerimos que você as demonstre.

4. Limite de uma função polinomial $y = P(x)$ para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

4.1. Cálculo de $\lim\limits_{x \to +\infty} ax^n$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n$, em que a é uma constante real não-nula e $n \in \mathbb{N}^*$

Pelos exercícios R.1 e R.8, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} a = a;$$

$$\lim_{x \to -\infty} a = a;$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \forall n, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty, \forall n, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \text{ par};$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty, \forall n, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ ímpar}.$$

Assim, pelas propriedades IP.1, IP.2, IP.3 e IP.4 da tabela do limite do produto para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, concluímos que:

$$\lim_{x \to +\infty} ax^n = +\infty, \text{ se } a > 0;$$

$$\lim_{x \to +\infty} ax^n = -\infty, \text{ se } a < 0;$$

$$\lim_{x \to -\infty} ax^n = +\infty, \text{ se } a > 0 \text{ e } n \text{ é par ou } a < 0 \text{ e } n \text{ é ímpar};$$

$$\lim_{x \to -\infty} ax^n = -\infty, \text{ se } a > 0 \text{ e } n \text{ é ímpar ou } a < 0 \text{ e } n \text{ é par}.$$

Exemplos

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^5 = +\infty$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^6) = -\infty$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-4x^5) = +\infty$;

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^4) = -\infty$.

4.2. Cálculo de $\lim_{x \to +\infty} P(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} P(x)$, em que $P(x)$ é uma função polinomial real de variável real

Consideremos o limite $\lim_{x \to +\infty} (5x^4 + 8x^3 + 3x + 6)$. Como x tende a $+\infty$, temos que x não é igual a zero e, portanto, podemos escrever:

$$\lim_{x \to +\infty} (5x^4 + 8x^3 + 3x + 6) = \lim_{x \to +\infty} x^4 \left(5 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right).$$

Observemos que: $\lim_{x \to +\infty} 5 = 5$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{8}{x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x^3} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x^4} = 0$.

Assim, pela propriedade IS.0 da tabela do limite da soma para $x \to +\infty$, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right) = 5.$$

Observemos ainda que: $\lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$.

Logo, pela propriedade IP.1 da tabela do limite do produto para $x \to +\infty$, obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} x^4 \left(5 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right) = +\infty.$$

Generalizando, podemos enunciar o seguinte teorema:

Se $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$, com $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0\} \subset \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ e $\{n, n-1, n-2, \ldots, 0\} \subset \mathbb{N}$, então:

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \text{ e } \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n.$$

Em outras palavras, o limite de uma função polinomial $P(x)$, real de variável real, para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, é o limite do termo de maior grau de $P(x)$.

Demonstração

Para $x \to +\infty$, temos que $x \neq 0$. Logo, podemos escrever:

$$\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Temos que: $\lim_{x \to +\infty} a_n = a_n$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{a_{n-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_{n-2}}{x^2} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_0}{x^n} = 0$.

Assim, pelo exercício R.1 e por extensão da propriedade IS.0, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = a_n.$$

Pelas propriedades IP.1, IP.2, IP.3 e IP.4 da tabela do limite do produto para $x \to +\infty$, obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n .$$

Analogamente, prova-se que $\lim_{x \to -\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.14 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to +\infty} (5x^6 + 4x^3 + 3x - 1)$;

b) $\lim_{x \to +\infty} (-2x^6 + x^4 - 2x^2 - x + 1)$;

c) $\lim_{x \to -\infty} (6x^3 + x^2 + 4x + 2)$;

d) $\lim_{x \to -\infty} (4x^8 + 6x^2 - x)$;

e) $\lim_{x \to -\infty} (-2x^4 + x^3 - 2x + 1)$;

f) $\lim_{x \to -\infty} (-4x^3 + x^2 + 3x - 1)$.

Resolução

O limite de uma função polinomial $P(x)$ para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ é o limite do termo de mais alto grau de $P(x)$; logo, temos:

a) $\lim_{x \to +\infty} (5x^6 + 4x^3 + 3x - 1) = \lim_{x \to +\infty} 5x^6 = +\infty$;

b) $\lim_{x \to +\infty} (-2x^6 + x^4 - 2x^2 - x + 1) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^6) = -\infty$;

c) $\lim_{x \to -\infty} (6x^3 + x^2 + 4x + 2) = \lim_{x \to -\infty} 6x^3 = -\infty$;

d) $\lim_{x \to -\infty} (4x^8 + 6x^2 - x) = \lim_{x \to -\infty} 4x^8 = +\infty$;

e) $\lim_{x \to -\infty} (-2x^4 + x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^4) = -\infty$;

f) $\lim_{x \to -\infty} (-4x^3 + x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \to -\infty} (-4x^3) = +\infty$.

5. Limite de uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Exemplos

a) Consideremos o limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 + 2x - 1}{x^2 + 8x + 5}$. Como $\lim_{x \to +\infty} (2x^6 + 3x^4 + 2x - 1) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 8x + 5) = +\infty$, temos uma indeterminação (propriedade IQ.11). Para eliminarmos essa indeterminação basta efetuar a seguinte transformação:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 + 2x - 1}{x^2 + 8x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^6\left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^6}\right)}{x^2\left(1 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4\left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^6}\right)}{1 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}}.$$

Observe que: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4\left(2 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^6}\right) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 1$.

Logo, pela propriedade IQ.5, temos que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 + 2x - 1}{x^2 + 8x + 5} = +\infty$.

b) Seja o limite $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x^5 + 2x^3 + x - 2}{3x^5 + 4x + 3}$. Como $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^5 + 2x^3 + x - 2) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^5 + 4x + 3) = -\infty$, temos uma indeterminação (propriedade IQ.13). Essa indeterminação será eliminada se fizermos:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^5 + 2x^3 + x - 2}{3x^5 + 4x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^5\left(4 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^5}\right)}{x^5\left(3 + \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^5}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^5}}{3 + \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^5}}$$

Como $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(4 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^5}\right) = 4$ e $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(3 + \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^5}\right) = 3$, temos, pela propriedade IQ.0, que: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^5}}{3 + \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^5}} = \frac{4}{3}$.

c) Consideremos o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^3 + 6x^2 + x - 1}{x^4 + x^2 + x + 6}$. Como $\lim\limits_{x \to +\infty} (5x^3 + 6x^2 + x - 1) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + x^2 + x + 6) = +\infty$, temos uma indeterminação (propriedade IQ.11). Podemos eliminar essa indeterminação do seguinte modo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 + 6x^2 + x - 1}{x^4 + x^2 + x + 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^4\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{x\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right)}.$$

Observe que: $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = 5$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{6}{x^4}\right) = +\infty$.

Logo, pela propriedade IQ.3, temos: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^3 + 6x^2 + x - 1}{x^4 + x^2 + x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x} = 0$.

Generalizando, podemos enunciar o seguinte teorema:

Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, com $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0\} \subset \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \ldots + b_0$ com $\{b_m, b_{m-1}, b_{m-2}, \ldots, b_0\} \subset \mathbb{R}$, com $b_m \neq 0$, são polinômios de variável real, então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Em outras palavras, o limite do quociente de um polinômio $P(x)$ por outro $Q(x)$, para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, é o limite do quociente do termo de maior grau de $P(x)$ pelo de maior grau de $Q(x)$.

Deixamos a demonstração desse teorema para você fazer como exercício.

Exercício resolvido

R.15 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^9 - 3x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 6x^2 + 4}$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^5 + x + 3}{x^2 + 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2}{4x^6 - 2x^4 + x^2}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^7 - 2x^4 + 3x}{x^4 - 2x + 1}$;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x}{x^8}$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^6 + x}{x^3}$;

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^8 - 3x^5 + x + 2}{5x^8 + x^3 - 1}$.

Resolução

O limite do quociente de um polinômio $P(x)$ por outro $Q(x)$, para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, é o limite do quociente do termo de maior grau de $P(x)$ pelo de maior grau de $Q(x)$. Assim sendo, temos:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^9 - 3x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 6x^2 + 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^9}{2x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^6}{2} = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^5 + x + 3}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-2x^5}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3) = -\infty$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2}{4x^6 - 2x^4 + x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{4x^6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{4x^4} = 0$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^7 - 2x^4 + 3x}{x^4 - 2x + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^7}{x^4} = \lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3 = -\infty$;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^2 + 2x}{x^8} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-3x^2}{x^8}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-3}{x^6}\right) = 0$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^6 + x}{x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{-2x^6}{x^3}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3) = +\infty$;

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^8 - 3x^5 + x + 2}{5x^8 + x^3 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^8}{5x^8} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}$.

6. Cálculo de $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{f(x)}$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{f(x)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

A tabela a seguir apresenta as propriedades que nos auxiliam a calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{f(x)}$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{f(x)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriedades	Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ é igual a	então $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{f(x)}$ é igual a
IR.1	$L \geqslant 0$	$\sqrt[n]{L}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.
IR.2	$L < 0$	$\sqrt[n]{L}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}$, n ímpar.
IR.3	$+\infty$	$+\infty$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.
IR.4	$-\infty$	$-\infty$, $\forall n, n \in \mathbb{N}$, n ímpar.

Nota: essa tabela vale também para $x \to -\infty$.

Vamos demonstrar apenas a propriedade IR.3, deixando as demais como exercício.

Demonstração de IR.3

Temos, por hipótese, que, para qualquer real positivo N, existe um real positivo M, tal que:

$$x > M \Rightarrow f(x) > N^n, \forall n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Como N é positivo, temos: $f(x) > N^n \Rightarrow \sqrt[n]{f(x)} > N$.

Logo, para qualquer real positivo N existe um real positivo M tal que: $x > M \Rightarrow \sqrt[n]{f(x)} > N$, ou seja:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.16 Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{18x^4 + x}{2x^4 + 3x - 1}}$.

Resolução

Temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{18x^4 + x}{2x^4 + 3x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{18x^4}{2x^4} = \lim\limits_{x \to +\infty} 9 = 9$.

Assim, pela propriedade IR.1, temos: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{18x^4 + x}{2x^4 + 3x - 1}} = \sqrt{9} = 3$.

R.17 Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2x^5}{x^4 + 6}}$.

Resolução

Temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^5}{x^4 + 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^5}{x^4} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$.

Assim, pela propriedade IR.4, que também vale para $x \to -\infty$, temos: $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2x^5}{x^4 + 6}} = -\infty$.

R.18 Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[4]{-2x^5 + 3x^4 - 3}$.

Resolução

Temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^5 + 3x^4 - 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^5) = +\infty$.

Assim, pela propriedade IR.3, temos: $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[4]{-2x^5 + 3x^4 - 3} = +\infty$.

R.19 Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[8]{\dfrac{2x^5 + x + 1}{x^6}}$.

Resolução

Temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^5 + x + 1}{x^6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^5}{x^6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$.

Assim, pela propriedade IR.1, temos: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[8]{\dfrac{2x^5 + x + 1}{x^6}} = 0$.

R.20 Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1})$.

Resolução

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\sqrt{x^2 - x - 1}) = -\infty$, temos uma indeterminação (propriedade IS.5). Eliminamos essa indeterminação do seguinte modo:

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1})(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1})}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - (x^2 - x - 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 + \frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}} = 1$$

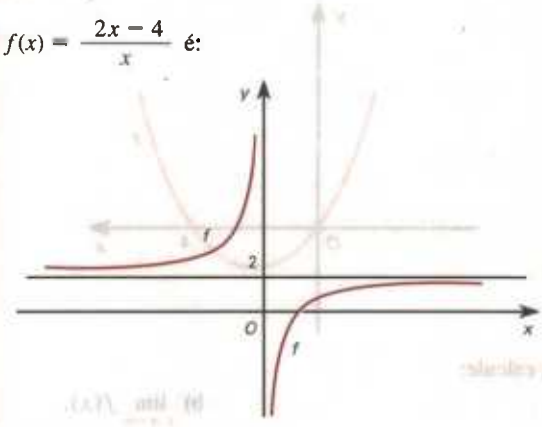
(*) Fizemos $|x| = x$ porque x tende a $+\infty$ e, portanto, $x > 0$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.4 (a até d), B.5, B.7 (a até d), B.8 (a até f), B.9 (a até g), B.10 (a até g), B.11 (a até d), C.1 (a, b), C.2, C.4 (a), C.5 (a).
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.3, B.4 (e até h), B.6, B.7 (e até h), B.8 (g até k), B.9 (h até n), B.10 (h até n), B.11 (e até h), C.1 (c, d, e), C.3, C.4 (b), C.5 (b).

Exercícios básicos

B.1 O gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x-4}{x}$ é:

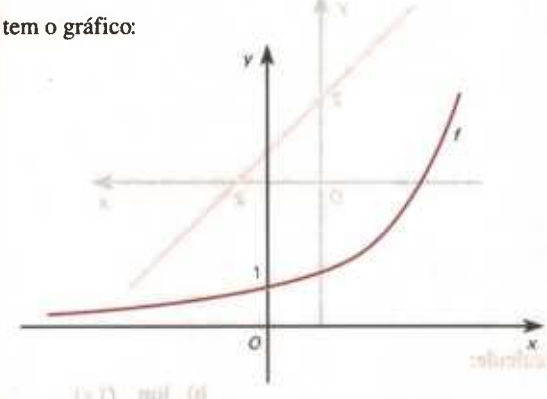


Observando o gráfico, calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

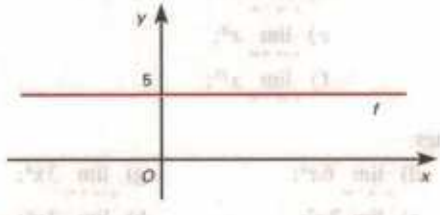
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

B.2 A função $f(x) = 3^x$ tem o gráfico:



Observando o gráfico, calcule o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

B.3 Observando o gráfico da função $f(x) = 5$:



calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

B.4 Encontre os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^8}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^8}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{3x^5}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{3x^5}$;

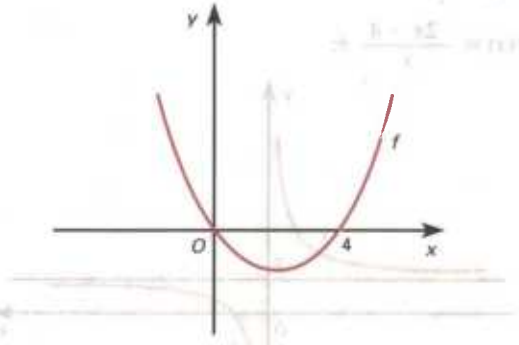
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^7}$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^7}$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6}{7x^4}$;

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6}{7x^4}$.

B.5 O gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x$ é a seguinte parábola:

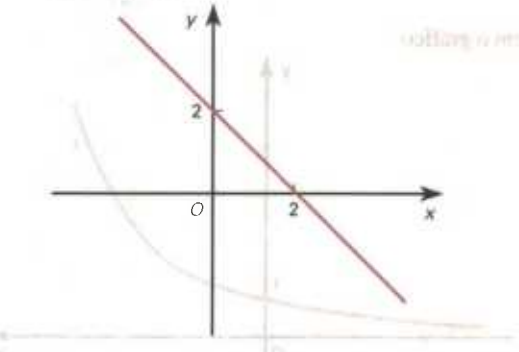


Observando o gráfico, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

B.6 A função $f(x) = 2 - x$ tem o gráfico:



Analisando o gráfico, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

B.7 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^9$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{12}$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{15}$;

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$;

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4$.

B.8 Encontre os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^6$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 8x^7$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^2)$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 6x^4$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^7$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^7)$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4$;

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4$;

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-5x^8)$;

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^3)$;

k) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^8)$.

B.9 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^6 + 3x^4 - 2x + 1)$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^4 + 2x^3 + x - 4)$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{2x^5}{7} + x^4 - \frac{3x}{2} + 1\right)$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^5 + x^4 - 3x + 1)$;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{4x^6}{3} + \frac{2x^3}{5} + x\right)$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + x^2 - x - 4)$;

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^8 + x^2 + x - 7)$;

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^8}{5} + x^7 + \frac{3x}{2} - 1\right)$;

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^4}{3} + x^3 + x - \frac{1}{4}\right)$;

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 3x + 1)$;

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^7 + 3x + 4)$;

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^8 + x^7 + 3x - 1)$;

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x^3 + x^2 + x + 1)$;

n) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + x^3 + x^2 + 1)$.

B.10 Determine os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^6 - 2x^4 + x^3 - 1}{x^2 + 3x + 2}$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^8 - 3x^5 + x^2 + 6}{3x^8 + 3x + 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x^3 + 3x^2 + 4}{2x^7 + x - 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-7x^5 + 3x - 1}{2x^3 + x}$;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{9x^7 - 4x^2 + 3}{3x^3 + x^2 + x + 4}$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{12x^8 + 3x^5 + x}{2x^5 + 3x - 1}$;

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-4x^5 + 6x^4 + 3}{2x^8 + 3x - 1}$;

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^5 + 2x^4 + 1}{2x^5 + 3}$;

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 4x - 3}{7x^4 - 3x + 1}$;

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^8 + 3x^5 - x + 9}{3x^7 + 4x + 12}$;

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x^8 + 6x^2 + 3}{6x^6 + 4x + 9}$;

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^6 + 3x^5 - 2x}{x^4 + 3x + 2}$;

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{8x^4 + 3x - 1}{x^6 + 3}$;

n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-6x^{12} + 7x}{3x^9 - 6x + 8}$.

B.11 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{3x^6 + 2x^4 - x + 1}{2x^3 - 2x + 6}}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^5 - 3x + 2}{x^2 - x - 1}}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[4]{-x^3 + 3x - 2}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[6]{\frac{2x^3 + 3x - 1}{4x^5 - 3}}$;

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[4]{\frac{2x^3 + 3x}{x}}$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[7]{\frac{x^9 - 3x + 2}{2x^4 - x}}$;

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[5]{-2x^3}$;

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 3x}{x^3 - 2}}$.

Exercícios complementares

C.1 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 2})$;

sugestão: $\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 2} = \frac{(\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 2})(\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{x^4 - 2})}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{x^4 - 2}}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt[3]{x + 2} - \sqrt[3]{x})$; **sugestão:** $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - x})$;

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 8x})$.

C.2 Através da definição de limite, prove que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

C.3 Prove, através da definição de limite, que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x} = 1$.

C.4 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; **sugestão:** $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

C.5 Através da definição de limite, prove que:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-MG) O limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x^2 - 5x}{2x^2 - 5}$ é igual a:

a) -1. b) 2. c) 3. d) 5. e) 6.

V.2 (PUC-SP) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{4x^2+6x+3}{x^2-5}}$ é igual a:

a) -2. b) -1. c) 0. d) 1. e) 2.

V.3 (Mackenzie-SP) O $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\right)$ é:

a) 0. b) 1. c) 2. d) 3. e) $+\infty$.

V.4 (U. Uberaba-MG) O valor do limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3} - x\right)$ é:

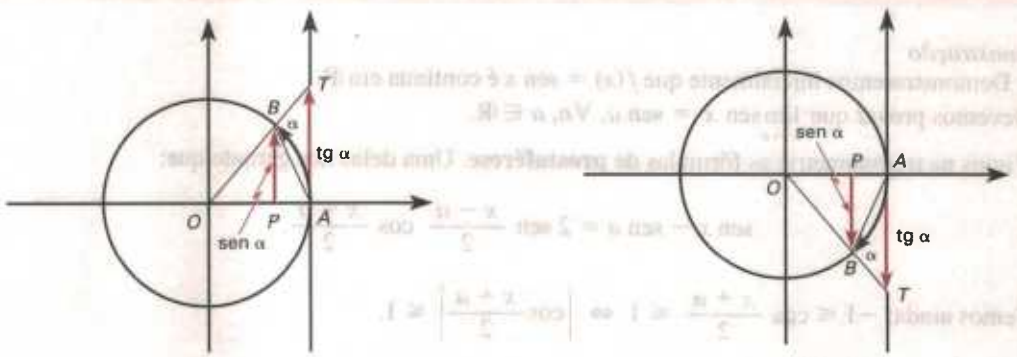
a) 0. b) $+\infty$. c) $-\infty$. d) 2. e) 1.

Capítulo 28

Cálculo de limites de funções trigonométricas

1. Desigualdade básica para o cálculo de limites trigonométricos

Observe, nas circunferências trigonométricas a seguir, os arcos de medida α:



Intuitivamente percebemos que:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\text{sen } \alpha| \leq |\alpha| \leq |\text{tg } \alpha|.$$

Esse fato é essencial para o cálculo de limites trigonométricos. Para uma justificativa, observe nos dois casos, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, que a área do triângulo OAB é menor do que a área do setor circular OAB, que por sua vez é menor do que a área do triângulo OAT, ou seja:

$$\frac{OA \cdot PB}{2} < \frac{\left|\text{med}\,(\widehat{AB})\right| \cdot OA}{2} < \frac{OA \cdot |AT|}{2} \Rightarrow 1 \cdot |\text{sen } \alpha| < |\alpha| \cdot 1 < 1 \cdot |\text{tg } \alpha|.$$

Logo, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq 0 \Rightarrow |\text{sen } \alpha| < |\alpha| < |\text{tg } \alpha|$.

Falta justificarmos a desigualdade para $\alpha = 0$.
Note que sen $0 = 0 =$ tg 0; logo, temos: $|\text{sen } 0| = |0| = |\text{tg } 0|$.

Concluímos, finalmente, que: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\text{sen } \alpha| \leq |\alpha| \leq |\text{tg } \alpha|$.

(c.q.d.)

2. Continuidade de funções trigonométricas

Teorema

As funções:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$,

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \cos x$,

$h: \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \sec x$,

$r: \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = \operatorname{cossec} x$,

$s: \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) = \operatorname{tg} x$ e

$t: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = \operatorname{cotg} x$

são contínuas em seus domínios.

Demonstração

- Demonstraremos inicialmente que $f(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Devemos provar que $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$.

Vimos na trigonometria as fórmulas de **prostaférese**. Uma delas nos garante que:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}.$$

Temos ainda: $-1 \leq \cos \frac{x+a}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \leq 1$.

Logo, $\left|2 \cos \frac{x+a}{2}\right| \leq 2$.

Para qualquer real positivo ε, sendo $\delta = \text{mín}\left\{\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right\}$, temos:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \left|\operatorname{sen} \frac{x-a}{2}\right| < \left|\frac{x-a}{2}\right| & \textbf{(desigualdade básica)} \\ \text{e} \\ \left|2 \cos \frac{x+a}{2}\right| \leq 2 \end{cases}$$

$$\therefore 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|2 \cos \frac{x+a}{2}\right| \cdot \left|\operatorname{sen} \frac{x-a}{2}\right| < 2\left|\frac{x-a}{2}\right|$$

$$\therefore 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|2 \cos \frac{x+a}{2} \operatorname{sen} \frac{x-a}{2}\right| < |x-a|$$

$$\therefore 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| < |x-a|.$$

Como $\delta = \text{mín}\left\{\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right\}$ e $|x-a| < \delta$, temos $|x-a| < \varepsilon$. Logo, temos:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| < \varepsilon, \text{ ou seja, } \lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \forall a, a \in \mathbb{R}.$$

Portanto a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

- Note que $g(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ é composta de duas funções contínuas. Logo, g é contínua.
- Temos, ainda, que as funções $h(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, $r(x) = \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, $s(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e $t(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ são contínuas por serem obtidas através de quocientes de funções contínuas.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$;

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \sec x$;

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \operatorname{cossec} x$;

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x$;

f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{cotg} x$.

Resolução

O limite de uma função contínua f para x tendendo a a é o valor numérico da função para $x = a$, ou seja, $f(a)$. Provamos que as funções seno, co-seno, secante, co-secante, tangente e co-tangente são contínuas em seus domínios. Logo, temos:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$;

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \sec x = \sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$;

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \operatorname{cossec} x = \operatorname{cossec} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$;

e) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$.

R.2 Calcular $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{tg} x)$.

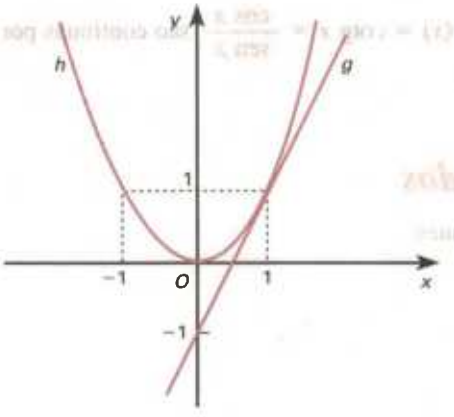
Resolução

Pela propriedade $\ell.7$ dos limites (capítulo 24), temos:

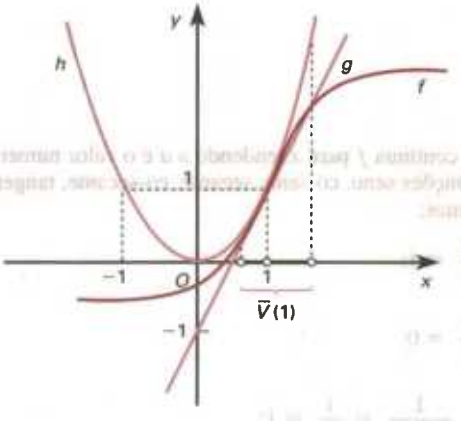
$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{tg} x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x + \lim_{x \to 0} \cos x + \lim_{x \to 0} \operatorname{tg} x =$$
$$= \operatorname{sen} 0 + \cos 0 + \operatorname{tg} 0 = 0 + 1 + 0 = 1.$$

3. Teorema do confronto

Consideremos as funções $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x - 1$ e $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$, cujos gráficos são:



Seja f uma função tal que existe uma vizinhança reduzida de 1, $\overline{V}(1)$, em que $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2$, $\forall x, x \in \overline{V}(1)$. Por exemplo:



Temos:

- $\lim\limits_{x \to 1} (2x - 1) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.
- Existe $\overline{V}(1)$ tal que $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2$, $\forall x, x \in \overline{V}(1)$.

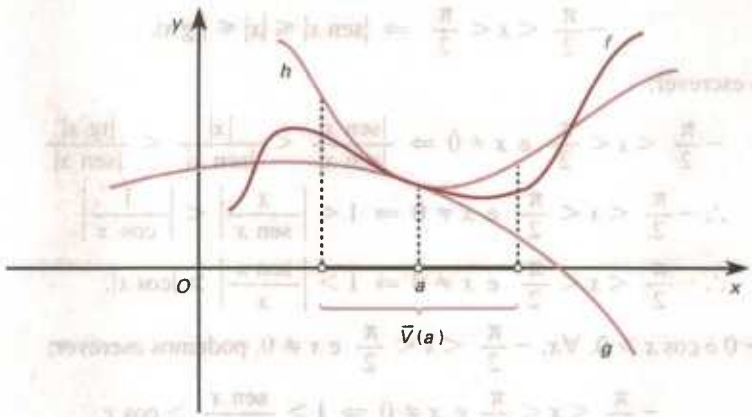
Intuitivamente percebemos que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$. Agora demonstraremos um teorema conhecido como **teorema do confronto**, que generaliza o raciocínio utilizado nesse exemplo.

Teorema

Sejam f, g e h, funções reais de variáveis reais, e um número real a tal que existe uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, contida no domínio de cada uma dessas três funções.

Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ e $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\forall x, x \in \overline{V}(a)$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Um exemplo que ilustra esse teorema é dado pelo gráfico:



Demonstração

Devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe um real positivo δ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Temos, por hipótese, que:

- existe um real positivo δ_1 tal que: $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.
- para qualquer real positivo ε existem reais positivos δ_2 e δ_3 tal que:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon.$$

Escolhendo $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, temos:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ |g(x) - L| < \varepsilon \\ |h(x) - L| < \varepsilon \end{cases} \quad \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon \\ -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \end{cases}$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \\ L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \end{cases}$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$\therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \quad \therefore 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

ou seja: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Nota: o teorema do confronto também é válido para $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ e para limites laterais.

4. Limite trigonométrico fundamental

Teorema

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Demonstração

Pela desigualdade básica para o cálculo de limites trigonométricos, temos que:

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\text{sen } x| \leq |x| \leq |\text{tg } x|.$$

Assim, podemos escrever:

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq 0 \Rightarrow \frac{|\text{sen } x|}{|\text{sen } x|} < \frac{|x|}{|\text{sen } x|} < \frac{|\text{tg } x|}{|\text{sen } x|}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq 0 \Rightarrow 1 < \left|\frac{x}{\text{sen } x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right|$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq 0 \Rightarrow 1 > \left|\frac{\text{sen } x}{x}\right| > |\cos x|.$$

Como $\frac{\text{sen } x}{x} > 0$ e $\cos x > 0$, $\forall x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e $x \neq 0$, podemos escrever:

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq 0 \Rightarrow 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x.$$

Resumindo, temos que:

- $\lim_{x \to 0} 1 = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$;
- existe a vizinhança reduzida de zero, $\overline{V}(0) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}$ tal que: $1 \geq \frac{\text{sen } x}{x} \geq \cos x$.

Logo, pelo teorema do confronto, concluímos que: $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

4.1. Conseqüência do limite trigonométrico fundamental

Teorema

$$\lim_{x \to -\frac{m}{k}} \frac{\text{sen } (kx + m)}{kx + m} = 1,$$

onde k e m são constantes reais com $k \neq 0$.

Demonstração

Para o cálculo de $\lim_{x \to -\frac{m}{k}} \frac{\text{sen } (kx + m)}{kx + m}$, onde k e m são constantes reais com $k \neq 0$, basta efetuarmos a mudança de variável $kx + m = t$.

Temos que t tende a zero quando x tende a $-\frac{m}{k}$. Logo: $\lim_{x \to -\frac{m}{k}} \frac{\text{sen } (kx + m)}{kx + m} = \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1$. (c.q.d.)

Nota: para $m = 0$, o limite anterior se resume a:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } kx}{kx} = 1.$$

Exemplos

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 8x}{8x} = 1$;

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \pi x}{\pi x} = 1$;

c) $\lim_{x \to \frac{\pi}{5}} \frac{\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)}{x - \frac{\pi}{5}} = 1$.

Exercícios resolvidos

R.3 Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$.

Resolução

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \operatorname{sen} 5x}{5x} = \lim_{x \to 0} 5 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

R.4 Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$.

Resolução

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{3 \operatorname{sen} 3x}{3x}}{\dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{2x}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x}} \right) =$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{3}{2} \right) \left(\frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x}} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{2}.$$

R.5 Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Resolução

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

R.6 Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 6x}{5x}$.

Resolução

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{5x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{6}{6} \cdot \frac{\operatorname{tg} 6x}{5x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{\operatorname{tg} 6x}{6x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{\operatorname{sen} 6x}{6x} \cdot \frac{1}{\cos 6x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{6}{5} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 6x}{6x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 6x} = \frac{6}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = \frac{6}{5}.$$

R.7 Calcular $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{7}} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{7}\right)}{x - \frac{\pi}{7}}$.

Resolução

Fazendo a mudança de variável $x - \dfrac{\pi}{7} = t$, temos que t tende a zero quando x tende a $\dfrac{\pi}{7}$. Logo, temos:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{7}} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{7}\right)}{x - \frac{\pi}{7}} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

R.8 Calcular $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$.

Resolução

Temos que:

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ (arcos complementares)} \therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{2} - x}.$$

Fazendo a mudança de variável $\frac{\pi}{2} - x = t$, temos que t tende a zero quando x tende a $\frac{\pi}{2}$. Logo, temos:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

R.9 Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x}$.

Resolução

Temos que: $\cos \frac{\pi x}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)$ **(arcos complementares)**

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}}.$$

Fazendo a mudança de variável $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} = t$, temos que t tende a zero quando x tende a 1. Logo, temos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} t}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

R.10 Calcular $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$.

Resolução

Temos que:

$$\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{sen} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}}{\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}. \quad \text{(I)}$$

- Fazendo a mudança de variável $\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = t$, temos que t tende a zero quando x tende a $\frac{\pi}{4}$. Assim, temos: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}}{\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$.

- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = \cos \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, concluindo (I), temos que: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

R.11 Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Resolução

Existe vizinhança reduzida de zero, $\overline{V}(0)$, tal que para todo x, $x \in \overline{V}(0)$, tem-se $\cos x \neq -1$. Assim, podemos escrever:

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}.$$

Logo, temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} =$$

$$= 1 \cdot \frac{\operatorname{sen} 0}{1 + \cos 0} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a até g), B.2 (a até h), B.3 (a até f), B.4 (a, b), C.1 (a, b), C.2 (a até d), C.3 (a), C.4 (a).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (h até m), B.2 (i até p), B.3 (g até l), B.4 (c, d), C.1 (c, d), C.2 (e até h), C.3 (b), C.4 (b).

Exercícios básicos

B.1 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x$;

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x$;

c) $\lim\limits_{x \to \pi} \sec x$;

d) $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{3}} \operatorname{cossec} x$;

e) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} \operatorname{tg} x$;

f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg} x$;

g) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{8}} \operatorname{sen} 2x$;

h) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{15}} \cos 5x$;

i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$;

j) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x)$;

k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sec x} + \operatorname{cotg} \frac{3x}{2} \right)$;

l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen} x \cos x)$;

m) $\lim\limits_{x \to \pi} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$.

B.2 Através do limite trigonométrico fundamental, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 6x}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{5x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 7x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{5}} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)}{x - \frac{\pi}{5}}$;

h) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{24}} \dfrac{\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)}{x + \frac{\pi}{24}}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 9x}{9x}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4 \operatorname{sen} 2x}{x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 \operatorname{sen} 7x}{2x}$;

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\operatorname{sen} 2x}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 8x}$;

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{4x}$;

o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{9}} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{9}\right)}{x - \frac{\pi}{9}}$;

p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{3x - \pi}$.

B.3 Determine o valor de:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 7x}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{5}\right)}{x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} 4x}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1 + \cos x}{x}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{\operatorname{sen}^4 x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^5\left(\frac{x}{3}\right)}{x^5}$;

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}$.

B.4 Sendo a uma constante real, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$;

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$;

c) $\lim\limits_{x\to \frac{a}{2}} \dfrac{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2a}{2x - a}$;

d) $\lim\limits_{x\to \frac{a}{3}} \dfrac{\cos 6x - \cos 2a}{3x - a}$.

Sugestão:

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}; \quad \cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}.$$

Exercícios complementares

C.1 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{8}} (\operatorname{sen} x \cos x)$;

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{12}} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$;

c) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{8}} \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

d) $\lim\limits_{x\to \frac{5\pi}{12}} (\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x)$.

C.2 Determine os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x^2}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}$; **sugestão:** multiplique por $\sqrt{x + 3} + \sqrt{3}$ o numerador e o denominador;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$;

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{sen} x}$;

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{\sqrt{x + 1} - 1}$;

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{x \cos x}$; **sugestão:** $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \dfrac{p + q}{2} \cos \dfrac{p - q}{2}$.

C.3 Sendo a uma constante real, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sec x - \sec a}{x - a}$;

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$.

C.4 Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{1 + \operatorname{tg} x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sec x}{x}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Fuvest-SP) Sabe-se que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = 1$. Conclui-se que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$:

a) é $\dfrac{1}{2}$. b) é 0. c) é infinito. d) é indeterminado. e) não existe.

V.2 (FEI-SP) O limite de $\dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$, quando x tende a zero, é igual a:

a) 1. b) 0. c) π. d) ∞. e) nenhuma das anteriores.

V.3 (F. M. Santa Casa-SP) Calculando $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \operatorname{sen} x}$, obtém-se:

a) $\sqrt{2}$. b) $-\sqrt{2}$. c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. e) n.d.a.

V.4 (PUC-SP) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x + x}{x}$ é igual a:

a) 0. b) 2. c) 3. d) 1. e) 4.

Capítulo 29

Cálculo de limites de funções exponenciais e logarítmicas

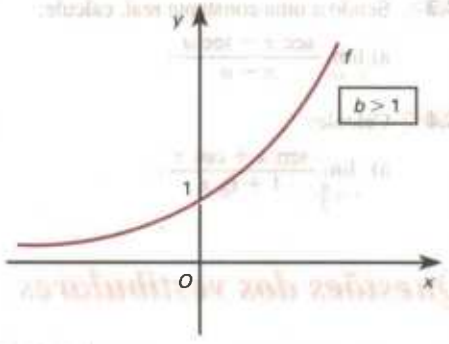
1. Função exponencial

Toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = b^x, \text{ com } b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

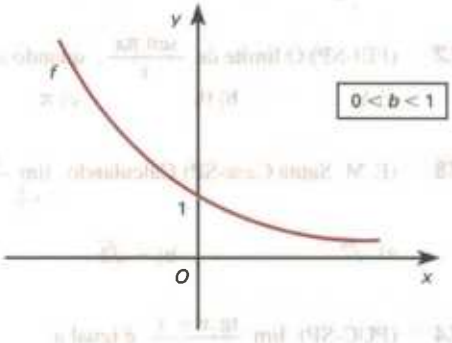
é denominada **função exponencial**, conforme estudamos no volume 1 desta obra.

I. $f(x) = b^x$ é crescente se, e somente se, $b > 1$. Seu gráfico é:



- $D(f) = \mathbb{R}$;
- $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, ou seja, $b^x > 0$, $\forall x, x \in \mathbb{R}$;
- $b^x > 1$, se $x > 0$;
- $b^x = 1$, se $x = 0$;
- $b^x < 1$, se $x < 0$.

II. $f(x) = b^x$ é decrescente se, e somente se, $0 < b < 1$. Seu gráfico é:



- $D(f) = \mathbb{R}$;
- $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, ou seja, $b^x > 0$, $\forall x, x \in \mathbb{R}$;
- $b^x < 1$, se $x > 0$;
- $b^x = 1$, se $x = 0$;
- $b^x > 1$, se $x < 0$.

1.1. Continuidade de funções exponenciais

Vamos demonstrar, a seguir, que toda função exponencial é contínua em $\mathbb{R}$. Antes, porém, apresentaremos um lema que será útil na demonstração.

Lema

Seja um número real b, $b > 1$. Para qualquer real positivo ε existe um número natural k tal que:

$$b^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon.$$

Demonstração

Pelo teorema do binômio de Newton, temos:

$$(1+\varepsilon)^k = \binom{k}{0}1^k\varepsilon^0 + \binom{k}{1}1^{k-1}\varepsilon^1 + \binom{k}{2}1^{k-2}\varepsilon^2 + \ldots + \binom{k}{k}1^0\varepsilon^k = 1 + k\varepsilon + \sum_{p=2}^{k}\binom{k}{p}1^{k-p}\varepsilon^p.$$

Logo, $(1+\varepsilon)^k > 1 + k\varepsilon$, $\forall \varepsilon, k$, com $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}^*$.

Escolhendo k, $k \in \mathbb{N}^*$, de modo que $k > \dfrac{b-1}{\varepsilon}$, teremos $b < 1 + k\varepsilon$ e, portanto, $b < (1+\varepsilon)^k$.

Logo, $b^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon$.

(c.q.d.)

Teorema

Toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, é contínua em $\mathbb{R}$.

Demonstração da primeira parte ($b > 1$)

Observemos que: $f(x) = b^x = b^a[b^{x-a} - 1] + b^a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$.

Para provar que f é contínua em a, $\forall a, a \in \mathbb{R}$, devemos demonstrar que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \text{ ou seja, } \lim_{x \to a}\{b^a[b^{x-a} - 1] + b^a\} = b^a.$$

Essa última sentença será verdadeira se, e somente se, $\lim_{x \to a} b^{x-a} = 1$. Portanto, o teorema estará demonstrado se provarmos que:

$$\lim_{x \to a} b^{x-a} = 1. \quad \text{(I)}$$

Fazendo em (I) a mudança de variável $x - a = t$, temos que t tende a zero quando x tende a a:

$$\lim_{x \to a} b^{x-a} = 1 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} b^t = 1.$$

Como $\lim_{t \to 0} b^t = 1 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0^+} b^t = \lim_{t \to 0^-} b^t = 1$, provemos cada um dos limites laterais.

Demonstração de $\lim_{t \to 0^+} b^t = 1$

Temos que $\lim_{t \to 0^+} b^t = 1$ se, e somente se, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que: $0 < t < \delta \Rightarrow |b^t - 1| < \varepsilon$.

Fase 1 (análise para a escolha do δ). Como $t > 0$ e $b > 1$, temos $b^t > 1$, ou seja, $b^t - 1 > 0$. Logo, temos: $|b^t - 1| < \varepsilon \Rightarrow b^t - 1 < \varepsilon \therefore b^t < 1 + \varepsilon$.

Pelo lema anterior, existe um natural k, $k > \dfrac{b-1}{\varepsilon}$, tal que $b^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon$. Assim, se escolhermos $\delta = \dfrac{1}{k}$, a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração). Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo δ, $\delta = \dfrac{1}{k}$, com $k \in \mathbb{N}^*$ e $k > \dfrac{b-1}{\varepsilon}$, tal que:

$$0 < t < \delta \Rightarrow 0 < t < \frac{1}{k};\ 0 < t < \frac{1}{k} \Rightarrow b^t < b^{\frac{1}{k}};\ b^t < b^{\frac{1}{k}} \Rightarrow b^t < 1 + \varepsilon;\ \textbf{(lema anterior)}$$

$$b^t < 1 + \varepsilon \Rightarrow b^t - 1 < \varepsilon;\ b^t - 1 < \varepsilon \Rightarrow |b^t - 1| < \varepsilon, \text{ pois } b^t - 1 > 0.$$

Logo, $0 < t < \delta \Rightarrow |b^t - 1| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{t \to 0^+} b^t = 1$.

Demonstração de $\lim\limits_{t \to 0^-} b^t = 1$

Provaremos que $\lim\limits_{t \to 0^-} b^t = 1$ fazendo a mudança de variável $t = -s$, $s > 0$. Temos que:

$$b^t = b^{-s} = \frac{1}{b^s}.$$

Observemos que, quando t tende a zero pela esquerda, s tende a zero pela direita. Assim, temos:

$$\lim_{t \to 0^-} b^t = \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{b^s} = \frac{\lim\limits_{s \to 0^+} 1}{\lim\limits_{s \to 0^+} b^s} = \frac{1}{1} = 1.$$

Concluímos, assim, que: $\lim\limits_{t \to 0^+} b^t = \lim\limits_{t \to 0^-} b^t = 1$, ou seja, $\lim\limits_{t \to 0} b^t = 1$.

Demonstração da segunda parte $(\mathbf{0 < b < 1})$

Temos que:

$$0 < b < 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{b} > 1 \\ f(t) = b^t = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{b}\right)^t} \end{cases}$$

Como $\dfrac{1}{b} > 1$, temos que a função $g(t) = \left(\dfrac{1}{b}\right)^t$ é contínua em $\mathbb{R}$ (primeira parte). Logo, a função $f(t) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{b}\right)^t}$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois é o quociente de funções contínuas.

(c.q.d.)

Propriedade ℓ.13 dos limites

Da continuidade das funções exponenciais, decorre que:

$$\lim_{x \to a} g(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} b^{g(x)} = b^L, \quad \forall a, a \in \mathbb{R}.$$

Essa propriedade é uma conseqüência imediata da propriedade ℓ.10 dos limites (capítulo 24).

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 2} 3^x$;

b) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Resolução

O limite de uma função f, contínua para x tendendo a a, é igual ao valor numérico da função para $x = a$, ou seja, $f(a)$. Provamos que toda função exponencial é contínua em $\mathbb{R}$; logo, temos:

a) $\lim_{x \to 2} 3^x = 3^2 = 9$;

b) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

R.2 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 1} 2^{3x+1}$;

b) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 3^{\cos x}$;

c) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2-4}{x-2}}$

Resolução

a) Observe que $\lim_{x \to 1} (3x + 1) = 4$. Pela propriedade ℓ.13, temos: $\lim_{x \to 1} 2^{3x+1} = 2^4 = 16$.

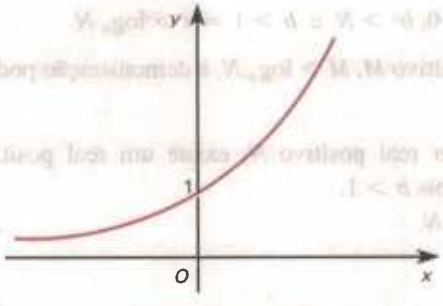
b) Como $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$, temos, pela propriedade ℓ.13, que: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 3^{\cos x} = 3^0 = 1$.

c) Temos que: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$.

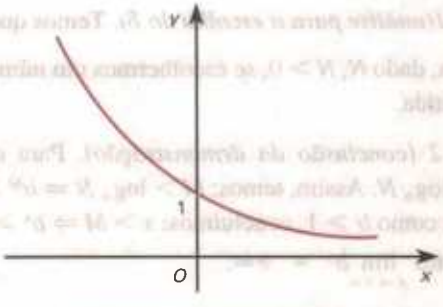
Assim, pela propriedade ℓ.13, concluímos: $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2-4}{x-2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

1.2. Cálculo dos limites de $f(x) = b^x, b > 0$ e $b \neq 1$, para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

Observando os gráficos:



$f(x) = b^x, b > 1$



$f(x) = b^x, 0 < b < 1$

percebemos, intuitivamente, que:

IE.1 $b > 1 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} b^x = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty$;

IE.2 $0 < b < 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} b^x = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} b^x = +\infty$.

Demonstração de IE.1

Primeira parte: $b > 1 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} b^x = 0$

Devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo M tal que:

$$x < -M \Rightarrow |b^x - 0| < \varepsilon, \text{ ou seja, } x < -M \Rightarrow b^x < \varepsilon, \text{ pois } b^x > 0.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ). Temos que: $b^x < \varepsilon$ e $b > 1 \Leftrightarrow x < \log_b \varepsilon = -\log_b \frac{1}{\varepsilon}$.

Assim, dado ε, $\varepsilon > 0$, se escolhermos um número positivo M, $M > \log_b \frac{1}{\varepsilon}$, a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração). Para qualquer real positivo ε, existe um real positivo M, $M > \log_b \frac{1}{\varepsilon}$.

Temos que: $M > \log_b \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow b^M > \frac{1}{\varepsilon}$, pois $b > 1$, e $b^M > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow b^{-M} < \varepsilon$.

Logo, como $b > 1$, concluímos: $x < -M \Rightarrow b^x < b^{-M} < \varepsilon$.

Portanto $\lim_{x \to -\infty} b^x = 0$.

Segunda parte: $b > 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty$

Devemos provar que, para qualquer real positivo N, existe algum real positivo M tal que:

$$x > M \Rightarrow b^x > N.$$

Fase 1(análise para a escolha do δ). Temos que: $N > 0$, $b^x > N$ e $b > 1 \Rightarrow x > \log_b N$.

Assim, dado N, $N > 0$, se escolhermos um número positivo M, $M > \log_b N$, a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração). Para qualquer real positivo N, existe um real positivo M, $M > \log_b N$. Assim, temos: $M > \log_b N \Rightarrow b^M > N$, pois $b > 1$.
Logo, como $b > 1$, concluímos: $x > M \Rightarrow b^x > b^M > N$.
Portanto $\lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty$.

(c.q.d.)

Deixamos como exercício para você a demonstração da propriedade IE.2.

Propriedades decorrentes

Decorrem de IE.1 e IE.2 as seguintes propriedades:

IE.3 Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $b > 1$, então $\lim\limits_{x \to a} b^{f(x)} = +\infty$;

IE.4 Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $0 < b < 1$, então $\lim\limits_{x \to a} b^{f(x)} = 0$;

IE.5 Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $b > 1$, então $\lim\limits_{x \to a} b^{f(x)} = 0$;

IE.6 Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $0 < b < 1$, então $\lim\limits_{x \to a} b^{f(x)} = +\infty$.

Nota: essas propriedades valem também para limites laterais e para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exercícios resolvidos

R.3 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x$.

Resolução

Pela propriedade IE.1, temos:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x = 0$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^x = +\infty$.

R.4 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Resolução

Pela propriedade IE.2, temos:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$.

R.5 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 3^{\frac{1}{x^2}}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^{x^3}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x^3}$.

Resolução

a) Observe que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Logo, pela propriedade IE.3, temos: $\lim\limits_{x \to 0} 3^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$.

b) Como $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, temos, pela propriedade IE.4: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 0$.

c) Note que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$. Assim, pela propriedade IE.5, temos: $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^3 = 0$.

d) Como $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, concluímos, pela propriedade IE.6, que: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x^3} = +\infty$.

R.6 Calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{\frac{5x^8 + 2x}{3x^7 + 1}}$.

Resolução

Temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^8 + 2x}{3x^7 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^8}{3x^7} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x}{3} = -\infty$.

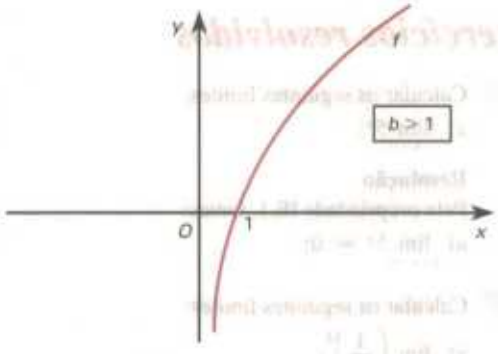
Assim, $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{\frac{5x^8 + 2x}{3x^7 + 1}} = 0$, pela propriedade IE.5.

2. Função logarítmica

Toda função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b x$, $b > 0$ e $b \neq 1$, é denominada **função logarítmica**, conforme estudamos no volume 1 desta obra.

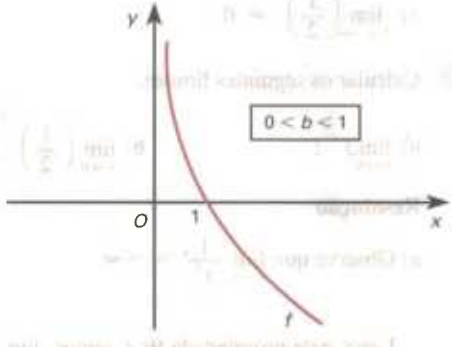
I. $f(x) = \log_b x$ é crescente se, e somente se, $b > 1$. Seu gráfico é:

- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- $Im(f) = \mathbb{R}$;
- $\log_b x > 0$, se $x > 1$;
- $\log_b x = 0$, se $x = 1$;
- $\log_b x < 0$, se $x < 1$.



II. $f(x) = \log_b x$ é decrescente se, e somente se, $0 < b < 1$. Seu gráfico é:

- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- $Im(f) = \mathbb{R}$;
- $\log_b x > 0$, se $0 < x < 1$;
- $\log_b x = 0$, se $x = 1$;
- $\log_b x < 0$, se $x > 1$.



2.1. Continuidade de funções logarítmicas

Teorema

Toda função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b x$, $b > 0$ e $b \neq 1$, é contínua em $\mathbb{R}_+^*$.

Demonstração

Primeira parte: $b > 1$

Observemos que: $f(x) = \log_b x = \log_b \frac{x}{a} + \log_b a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+^*$.

Para provar que f é contínua em a, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+^*$, devemos demonstrar que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \text{ ou seja, } \lim_{x \to a} \left[\log_b \frac{x}{a} + \log_b a \right] = \log_b a.$$

Essa última sentença será verdadeira se, e somente se, $\lim_{x \to a} \log_b \frac{x}{a} = 0$.

Portanto, o teorema estará demonstrado se provarmos que: $\lim_{x \to a} \log_b \frac{x}{a} = 0$. (I)

Fazendo em (I) a mudança de variável $\frac{x}{a} = t$, temos que t tende a 1 quando x tende a a.

Logo, temos:

$$\lim_{x \to a} \log_b \frac{x}{a} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 1} \log_b t = 0.$$

Assim, devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que:

$$0 < |t - 1| < \delta \Rightarrow |\log_b t - 0| < \varepsilon.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ). Note que: $|\log_b t| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \log_b t < \varepsilon$.

Primeira parte: sendo $b > 1$, podemos escrever:

$$b^{-\varepsilon} < t < b^{\varepsilon} \text{ ou, ainda, } b^{-\varepsilon} - 1 < t - 1 < b^{\varepsilon} - 1.$$

Como $\varepsilon > 0$ e $b > 1$, temos que $b^{\varepsilon} > 1$ e, portanto, $b^{\varepsilon} - 1 > 0$ e $b^{-\varepsilon} - 1 < 0$.

Assim, se escolhermos $\delta = \text{mín}\{b^{\varepsilon} - 1, 1 - b^{-\varepsilon}\}$, a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração). Para qualquer real positivo ε, seja o real positivo δ, $\delta = \text{mín}\{b^{\varepsilon} - 1, 1 - b^{-\varepsilon}\}$. Temos que: $b^{-\varepsilon} - 1 \leq -\delta$ e $\delta \leq b^{\varepsilon} - 1$.

Assim, temos:

$0 < |t - 1| < \delta \Rightarrow -\delta < t - 1 < \delta$;

$$\left.\begin{array}{l} -\delta < t - 1 < \delta \\ b^{-\varepsilon} - 1 \leq -\delta \\ \delta \leq b^{\varepsilon} - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow b^{-\varepsilon} - 1 < t - 1 < b^{\varepsilon} - 1;\ b^{-\varepsilon} - 1 < t - 1 < b^{\varepsilon} - 1 \Rightarrow b^{-\varepsilon} < t < b^{\varepsilon};$$

$b^{-\varepsilon} < t < b^{\varepsilon} \Rightarrow -\varepsilon < \log_b t < \varepsilon$, pois $b > 1$; $-\varepsilon < \log_b t < \varepsilon \Rightarrow |\log_b t| < \varepsilon$.

Logo, $0 < |t - 1| < \delta \Rightarrow |\log_b t - 0| < \varepsilon$, ou seja, $\lim_{t \to 1} \log_b t = 0$.

Segunda parte: $0 < b < 1$

$$0 < b < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{b} > 1 \\ f(t) = \log_b t = -\log_{\frac{1}{b}} t. \end{cases}$$

Como $\frac{1}{b} > 1$, temos que a função $g(t) = \log_{\frac{1}{b}} t$ é contínua em $\mathbb{R}_+^*$ (primeira parte). Logo, a função $f(t) = -\log_{\frac{1}{b}} t$ é contínua em $\mathbb{R}_+^*$, pois pode ser expressa como uma diferença de funções contínuas, isto é:

$$f(t) = 0 - \log_{\frac{1}{b}} t.$$

(c.q.d.)

Propriedade ℓ.14 dos limites

Da continuidade das funções logarítmicas, decorre que:

Se $\lim_{x \to a} g(x) = L, L > 0$, então:

$$\lim_{x \to a} \log_b g(x) = \log_b L, \forall a, a \in \mathbb{R}_+^*.$$

Em outras palavras, a propriedade ℓ.14 afirma que: $\lim_{x \to a} \log_b g(x) = \log_b \lim_{x \to a} g(x)$.

Essa proposição é uma conseqüência imediata da propriedade ℓ.10 dos limites (capítulo 24).

Exercícios resolvidos

R.7 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 9} \log_3 x$; b) $\lim_{x \to 4} \log_{\frac{1}{2}} x$.

Resolução

O limite de uma função f, contínua, para x tendendo a a é igual ao valor numérico da função para $x = a$, ou seja, $f(a)$. Provamos que toda função logarítmica é contínua em $\mathbb{R}_+^*$; logo, temos:

a) $\lim_{x \to 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2$; b) $\lim_{x \to 4} \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$.

R.8 Calcular $\lim_{x \to 1} \log_3 \frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1}$.

Resolução

Temos que: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+8)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x + 8) = 9$.

Assim, pela propriedade ℓ.14, concluímos: $\lim_{x \to 1} \log_3 \frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1} = \log_3 9 = 2$.

R.9 Calcular $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \log_5 \operatorname{sen} x$.

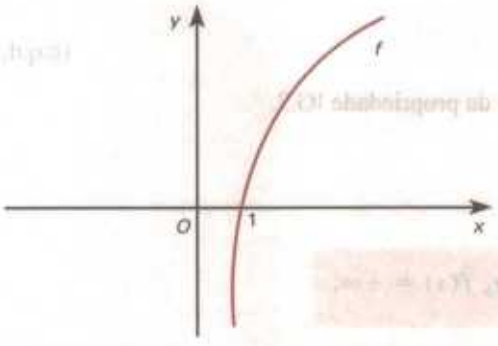
Resolução

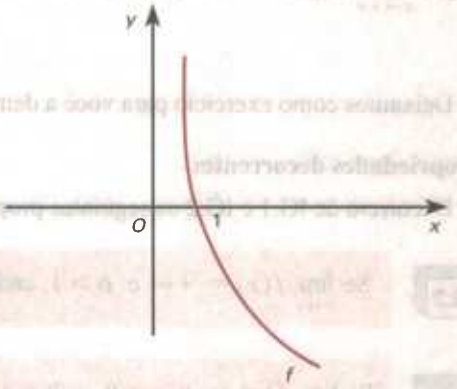
Como $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$, temos, pela propriedade ℓ.14:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \log_5 \operatorname{sen} x = \log_5 1 = 0.$$

2.2. Cálculo do limite de $f(x) = \log_b x$, $b > 0$ e $b \neq 1$, para $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ ou $x \to 0^+$

Observando os gráficos:





$f(x) = \log_b x$, $b > 1$

$f(x) = \log_b x$, $0 < b < 1$

percebemos intuitivamente que:

IG.1 $b > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \log_b x = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_b x = +\infty$;

IG.2 $0 < b < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \log_b x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_b x = -\infty$.

Demonstração de IG.1

Primeira parte: $b > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \log_b x = -\infty$

Devemos provar que, para qualquer real positivo N, existe um real positivo δ tal que:

$$0 < x < \delta \Rightarrow \log_b x < -N.$$

Fase 1 (análise para a escolha do δ). Temos que: $\log_b x < -N \Leftrightarrow x < b^{-N}$, $x > 0$, $b > 1$.
Assim, basta escolhermos $\delta = b^{-N}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração). Para qualquer real positivo N, existe o real positivo $\delta = b^{-N}$ tal que: $0 < x < b^{-N} \Rightarrow \log_b x < -N$, pois $b > 1$.

Logo, $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_b x = -\infty$, para $b > 1$.

Segunda parte: $b > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \log_b x = +\infty$

Devemos provar que, para qualquer real positivo N, existe um real positivo M tal que:

$$x > M \Rightarrow \log_b x > N.$$

Fase 1 (análise para a escolha de M). Temos que: $\log_b x > N \Leftrightarrow x > b^N, x > 0, b > 1$.
Assim, basta escolhermos $M = b^N$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração). Para qualquer real positivo N, existe o real positivo $M = b^N$ tal que: $x > b^N \Rightarrow \log_b x > N,\ b > 1$.

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_b x = +\infty$ para $b > 1$.

(c.q.d.)

Deixamos como exercício para você a demonstração da propriedade IG.2.

Propriedades decorrentes

Decorrem de IG.1 e IG.2 as seguintes propriedades:

IG.3 Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $b > 1$, então $\lim\limits_{x \to a} \log_b f(x) = +\infty$;

IG.4 Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $0 < b < 1$, então $\lim\limits_{x \to a} \log_b f(x) = -\infty$;

IG.5 Seja a função f, tal que $f(x) > 0$ para todo x de alguma vizinhança reduzida de a.
Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $b > 1$, então $\lim\limits_{x \to a} \log_b f(x) = -\infty$;

IG.6 Seja a função f, tal que $f(x) > 0$ para todo x de alguma vizinhança reduzida de a.
Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $0 < b < 1$, então $\lim\limits_{x \to a} \log_b f(x) = +\infty$.

Nota: essas propriedades valem também para limites laterais e para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Nos casos $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, as propriedades IG.5 e IG.6 devem ser adaptadas substituindo-se a "vizinhança reduzida de a" por: $]M, +\infty[$, $M > 0$; ou $]-\infty, -M[$, $M > 0$, respectivamente.

Exercícios resolvidos

R.10 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_5 x$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_5 x$.

Resolução

Pela propriedade IG.1, temos:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_5 x = -\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_5 x = +\infty$.

R.11 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$.

Resolução

Pela propriedade IG.2, temos:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty$.

R.12 Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \log_3 \frac{1}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_3 \frac{1}{x}$; d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$.

Resolução

a) Observe que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; logo, pela propriedade IG.3, temos: $\lim\limits_{x \to 0} \log_3 \frac{1}{x^2} = +\infty$.

b) Como $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, temos, pela propriedade IG.4, que: $\lim\limits_{x \to 0} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} = -\infty$.

c) Note que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e, para qualquer x, $x \in]M, +\infty[$, $M > 0$, temos $\frac{1}{x} > 0$.

Logo, pela propriedade IG.5, temos: $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_3 \frac{1}{x} = -\infty$.

d) Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ e, para qualquer x, $x \in]M, +\infty[$, $M > 0$, temos $\frac{1}{x} > 0$, concluímos, pela propriedade IG.6, que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = +\infty$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a, b, c), B.3 (a até d), B.4 (a até e), B.5 (a até e), B.6 (a, b), B.7 (a, b), B.8 (a até d), B.9 (a até f), C.1 (a, b), C.2 (a, b), C.4 (a).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2 (d, e, f), B.3 (e até h), B.4 (f até j), B.5 (f até j), B.6 (c, d), B.7 (c, d), B.8 (e até h), B.9 (g até l), C.1 (c, d), C.2 (c, d), C.3, C.4 (b).

Exercícios básicos

B.1 Lembrando que toda função exponencial é contínua em $\mathbb{R}$, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 3} 5^x$; b) $\lim\limits_{x \to -1} 2^x$; c) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{3}{2}\right)^x$; d) $\lim\limits_{x \to 0} 7^x$.

B.2 Através da propriedade $\ell.13$ calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 1} 5^{3x-1}$; c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x^2-1}{x-1}}$; e) $\lim\limits_{x \to 0} 4^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$;

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\operatorname{sen} x}$; d) $\lim\limits_{x \to 2} 2^{|x^2-3|}$; f) $\lim\limits_{x \to 1} 2^{\frac{x^2-6x+8}{x-2}}$.

B.3 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 8^x$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$; e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{2})^x$; g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 8^x$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$; f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{2})^x$; h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^x$.

B.4 Utilizando as propriedades IE.3, IE.4, IE.5 ou IE.6, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 9^{\frac{1}{x^4}}$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x^2}$; e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^4}$; g) $\lim\limits_{x \to 0} 3^{\frac{1}{x^4}}$; i) $\lim\limits_{x \to +\infty} 6^{x^2+1}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{|x|}}$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^5}$; f) $\lim\limits_{x \to 0} 3^{\frac{4}{x^2}}$; h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2}$; j) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{x^3-2}$.

B.5 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{4x^3-3x+1}{2x+4}}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{\frac{x^5-2x-6}{x^2-4x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4x^8-3x}{x^5+2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x^2+3x-1}{x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3x^4+x^2}{x^6}}$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3x^5+2x}{x^2}}$;

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3x^5+2x}{x^2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}$;

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2x^6-3}{x^3+2x}}$;

j) $\lim\limits_{x\to0} 2^{\frac{2x^2+1}{x^4}}$.

B.6 Lembrando que toda função logarítmica é contínua em $\mathbb{R}$, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to125}\log_5 x$;

b) $\lim\limits_{x\to9}\log_{\frac{1}{3}} x$;

c) $\lim\limits_{x\to3}\log_{\sqrt{3}} x$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\log_{4\sqrt{2}} x$.

B.7 Através da propriedade $\ell.14$, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to1}\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-1}{x-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\log_4\cos x$;

c) $\lim\limits_{x\to2}\log_{\frac{1}{6}}\frac{x^2+2x-8}{x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\log_3 \operatorname{tg} x$.

B.8 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to0^+}\log_2 x$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2 x$;

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\log_{\frac{1}{4}} x$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{4}} x$;

e) $\lim\limits_{x\to0^+}\log_{\sqrt{2}} x$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\sqrt{2}} x$;

g) $\lim\limits_{x\to0^+}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x$;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x$.

B.9 Utilizando as propriedades IG.3, IG.4, IG.5 e IG.6, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to0}\log_4\frac{1}{x^4}$;

b) $\lim\limits_{x\to0}\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{x^6}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_8\frac{1}{x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^3}$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_3\frac{2x^4-3x+1}{x}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\log\frac{x^3+1}{x^6}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}\log_3\frac{2}{|x|}$;

h) $\lim\limits_{x\to0}\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{x^4}$;

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2\frac{1}{x}$;

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{\frac{1}{5}}\frac{3}{x^2}$;

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_4\frac{x^3+2x-1}{2x^2+3}$;

l) $\lim\limits_{x\to0}\log_{\frac{1}{10}}\frac{2x+1}{x^3+2}$.

Exercícios complementares

C.1 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to0} 3^{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to4} 3^{\frac{4-x}{2-\sqrt{x}}}$;

c) $\lim\limits_{x\to0} 8^{\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to0} 2^{\frac{1-\cos x}{x}}$.

C.2 Encontre os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{\frac{2x^4-x}{x^4+1}}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{x^2-5}{x^3+x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{\frac{1-x^4}{1-x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2-x^6}{1+x^5}}$.

C.3 Determine os valores de:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \log_2 \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}}$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \log_5 \operatorname{tg} x$; c) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \log_{\frac{1}{2}} \operatorname{cotg} x$.

C.4 Obtenha os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log \dfrac{1}{|x|}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (UFPR) O limite $\lim\limits_{x \to 1} 3^{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}$ é igual a:

a) 2. b) 4. c) 1. d) 3. e) 9.

V.2 (UFPA) Se $f(x) = (0,8)^{\frac{x^3 + 5}{x}}$, então $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ é igual a:

a) 0. b) $+\infty$. c) $-\infty$. d) 1. e) 0,8.

V.3 (FEI-SP) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} [\log (x + 1) - \log x]$.

V.4 (Cescem) $\lim\limits_{x \to 0} \log |x|$ é igual a:

a) $+\infty$. b) $-\infty$. c) 0. d) 1. e) -1.

Capítulo 30

Limite de uma função real de variável inteira n, para $n \to +\infty$ ou $n \to -\infty$

1. Conceituação

Podemos estender o conceito de limite para funções de variável inteira n, com n tendendo a $+\infty$ ou a $-\infty$, através das seguintes definições.

Seja a função f: D $\to \mathbb{R}$ tal que D $\subset \mathbb{Z}$ e exista um inteiro a de modo que todo inteiro n, $n > a$, pertence ao domínio de f.

O limite dos valores $f(n)$ para n tendendo a $+\infty$ é L se, e somente se, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo M tal que: $n > M \Rightarrow |f(n) - L| < \varepsilon$.

Indicamos esse limite por: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = L$.

Seja a função f: D $\to \mathbb{R}$ tal que D $\subset \mathbb{Z}$ e exista um inteiro a de modo que todo inteiro n, $n < a$, pertence ao domínio de f.

O limite dos valores $f(n)$ para n tendendo a $-\infty$ é L se, e somente se, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo M tal que: $n < -M \Rightarrow |f(n) - L| < \varepsilon$.

Indicamos esse limite por: $\lim\limits_{n \to -\infty} f(n) = L$.

Exemplo

Seja a função f: $\mathbb{Z}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = \frac{1}{n}$. Provemos que: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = 0$.

Demonstração

Devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo M tal que:

$$n > M \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon, n \in \mathbb{Z}^*.$$

Fase 1 (análise para a escolha de M)

Observe que:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|n|} < \varepsilon$$

$$\therefore \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |n| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \therefore \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n < -\frac{1}{\varepsilon} \text{ ou } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Assim, basta escolhermos $M = \frac{1}{\varepsilon}$, e a demonstração poderá ser concluída.

Fase 2 (conclusão da demonstração)

Para qualquer real positivo ε, existe o real positivo $M = \frac{1}{\varepsilon}$ de modo que:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |n| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ pois } n > 0;\ |n| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon;\ \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Logo, $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, $n \in \mathbb{Z}^*$, ou seja, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(c.q.d.)

2. Um limite especial: o número *e*

Admitiremos, sem demonstração, a existência do limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Indicamos esse limite pela letra e:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Para se ter idéia sobre o valor de e, atribuem-se valores naturais não-nulos à variável n da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$n = 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2;$$

$$n = 2 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25;$$

$$n = 3 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}370370369;$$

$$n = 4 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}44140625;$$

$$\vdots$$

$$n = 10 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}59374246;$$

$$\vdots$$

$$n = 100 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}704813829;$$

$$\vdots$$

$$n = 1\,000 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}716923932;$$

$$\vdots$$

$$n = 1\,000\,000 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{1000\,000}\right)^{1000000} = 2{,}718280469;$$

$$\vdots$$

Desse modo, para n tendendo a $+\infty$, esses valores tendem ao número irracional $e = 2{,}718281828...$

Propriedades

E.1 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+c} = e$, em que $n \in \mathbb{N}^*$ e c é uma constante inteira.

Demonstração

Temos que: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+c} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{c}\right]$.

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{c} = 1$, podemos escrever:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+c} = e \cdot 1 = e.$$

(c.q.d.)

E.2 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+c} = e$, em que $n \in \mathbb{N}^*$, sendo k e c constantes inteiras.

Demonstração

Fazendo a mudança de variável $n + k = t$, temos que t tende a $+\infty$ quando n tende a $+\infty$. Assim, temos:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+c} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+k-k+c} = \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t-k+c} \overset{\text{E 1}}{=} e.$$

(c.q.d.)

E.3 $\lim\limits_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$, em que $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração

Fazendo a mudança de variável $t = -n$, temos que t tende a $+\infty$ quando n tende a $-\infty$. Assim, obtemos:

$$\lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t} \overset{\text{E.2}}{=} e.$$

(c.q.d.)

E.4 Se $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 0\}$ e a função $f: D \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, então:

I. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$;

II. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Demonstração

I. Para todo real x, existem naturais consecutivos n e $n + 1$ tais que: $n \leq x < n + 1$.

Considerando $x > 1$, temos: $n \leq x < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$.

Somando 1 a cada membro dessa desigualdade, obtemos: $1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}$.

Como $x > 1$, temos $n \geq 1$ e podemos escrever:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x,$$

ou, ainda:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Pela propriedade E.2, temos: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$.

Assim, pelo teorema do confronto, concluímos: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

(c.q.d.)

II. Demonstração análoga à de (I).

E.5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+c} = e$, em que $x \in \mathbb{R}$ e c é uma constante real.

Demonstração

Análoga à demonstração de E.1.

E.6 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+k}\right)^{x+c} = e$, em que $x \in \mathbb{R}$, sendo k e c constantes reais.

Demonstração

Análoga à demonstração de E.2.

E.7 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, em que $x \in \mathbb{R}^*$.

Demonstração

Fazendo a mudança de variável $t = \dfrac{1}{x}$, temos que t tende a $+\infty$ se x tende a zero pela direita e t tende a $-\infty$ se x tende a zero pela esquerda. Assim, temos:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \text{ e } \lim_{x \to 0^-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.1 Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$.

Resolução

Fazendo a mudança de variável $\dfrac{1}{t} = \dfrac{3}{x}$, ou seja, $x = 3t$, temos que t tende a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$.

Assim, podemos escrever:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3t} = \lim_{t \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^3 = \left[\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^3 = e^3.$$

R.2 Determinar o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{4}{x}\right)^x$.

Resolução

Fazendo a mudança de variável $\dfrac{1}{t} = -\dfrac{4}{x}$, ou seja, $x = -4t$, temos que t tende a $+\infty$ quando x tende a $-\infty$. Assim, podemos escrever:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^x = \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-4t} = \lim_{t \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-4} = \left[\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-4} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}.$$

R.3 Calcular $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{x}}$.

Resolução

Fazendo a mudança de variável $t = 5x$, ou seja, $x = \dfrac{t}{5}$, temos que t tende a zero quando x tende a zero.

Assim, podemos escrever:

$$\lim_{x \to 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{5}{t}} = \lim_{x \to 0} \left[(1 + t)^{\frac{1}{t}}\right]^5 = \left[\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}}\right]^5 = e^5.$$

(E.7)

R.4 Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{3x - 1}\right)^{3x}$.

Resolução

Fazendo a mudança de variável $\dfrac{1}{t} = \dfrac{2}{3x - 1}$, ou seja, $x = \dfrac{2t + 1}{3}$, temos que t tende a $+\infty$ quando x tende a $+\infty$. Assim, podemos escrever:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{3x - 1}\right)^{3x} = \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t + 1} = \lim_{t \to +\infty} \left\{\left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2} \left[1 + \frac{1}{t}\right]\right\} =$$

$$= \left[\lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2} \lim_{t \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e^2 \cdot 1 = e^2.$$

R.5 Obter $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x + 2}{3x - 1}\right)^{x}$.

Resolução

Podemos escrever:

$$\frac{3x + 2}{3x - 1} = \frac{(3x - 1) + 1 + 2}{3x - 1} = \frac{3x - 1}{3x - 1} + \frac{3}{3x - 1} = 1 + \frac{3}{3x - 1}.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x + 2}{3x - 1}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{3}{3x - 1}\right)^{x}$.

Fazendo a mudança de variável $\dfrac{1}{t} = \dfrac{3}{3x - 1}$, ou seja, $x = \dfrac{3t + 1}{3}$, temos que t tende a $-\infty$ quando x tende a $-\infty$. Assim, obtemos:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{3}{3x - 1}\right)^{x} = \lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{3t + 1}{3}} = \lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t + \frac{1}{3}} = \lim_{t \to -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{3}}\right] =$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} \cdot \lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{3}} = e \cdot 1 = e.$$

R.6 Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x - 2}{5x + 1}\right)^{\frac{x}{4}}$.

Resolução

Podemos escrever:

$$\frac{5x - 2}{5x + 1} = \frac{(5x + 1) - 1 - 2}{5x + 1} = \frac{5x + 1}{5x + 1} - \frac{3}{5x + 1} = 1 - \frac{3}{5x + 1}.$$

Logo, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x - 2}{5x + 1}\right)^{\frac{x}{4}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{5x + 1}\right)^{\frac{x}{4}}$.

Fazendo a mudança de variável $\dfrac{1}{t} = -\dfrac{3}{5x + 1}$, ou seja, $x = -\dfrac{3t + 1}{5}$, temos que t tende a $-\infty$ quando x tende a $+\infty$. Assim, obtemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{5x + 1}\right)^{\frac{x}{4}} = \lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{-3t - 1}{20}} = \lim_{t \to -\infty} \left\{\left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-\frac{3}{20}} \left[1 + \frac{1}{t}\right]^{-\frac{1}{20}}\right\} =$$

$$= \left[\lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-\frac{3}{20}} \left[\lim_{t \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{20}}\right] = e^{-\frac{3}{20}} \cdot 1 = e^{-\frac{3}{20}}.$$

R.7 Calcular $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{\sec x}$.

Resolução

Fazendo a mudança de variável $t = 2 \cos x$, temos que t tende a zero quando x tende a $\frac{\pi}{2}$. Assim, podemos escrever:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{\sec x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{2}{t}} = \lim_{t \to 0} \left[(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right]^2 =$$

$$= \left[\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \right]^2 \overset{\text{E.7}}{=} e^2.$$

3. Logaritmo neperiano

Dado um número real positivo a, chama-se **logaritmo neperiano de a** o número $\log_e a$, em que: $e = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

O logaritmo neperiano de um número a também é denominado **logaritmo natural de a** e pode ser indicado simplesmente por: $\ell n\, a$. Assim, temos: $\ell n\, a = x \Leftrightarrow e^x = a$.

Exercício resolvido

R.8 Calcular:

a) $\ell n\, e$; b) $\ell n\, e^4$; c) $\ell n \frac{1}{e}$.

Resolução

a) $\ell n\, e = x \Leftrightarrow e^x = e \therefore x = 1$, ou seja, $\ell n\, e = 1$.

b) $\ell n\, e^4 = 4\, \ell n\, e = 4 \cdot 1 = 4$.

c) $\ell n \frac{1}{e} = \ell n\, e^{-1} = -1\, \ell n\, e = -1 \cdot 1 = -1$.

Teorema

Se a é um número real positivo, então: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ell n\, a$.

Demonstração

- Para $a = 1$, temos: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 = \ell n\, 1$.
- Para $0 < a \neq 1$, façamos a mudança de variável $t = a^x - 1$. Temos que t tende a zero quando x tende a zero e temos ainda que: $x = \log_a (t + 1)$. Assim, podemos escrever:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a (t + 1)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \log_a (t + 1)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\log_a (t + 1)^{\frac{1}{t}}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{t \to 0} \log_a (t + 1)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a \lim\limits_{t \to 0} (t + 1)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ell n\, a.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.9 Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{x}$.

Resolução

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^5)^x - 1}{x} = \ell n\, e^5 = 5.$$

(Teorema anterior)

R.10 Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(1 + 2x)}{x}$.

Resolução

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ell n\,(1 + 2x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x}\, \ell n\,(1 + 2x)\right] = \lim_{x \to 0} \ell n\,(1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \ell n \lim_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}.$$

Fazendo a mudança de variável $t = 2x$, ou seja, $x = \dfrac{t}{2}$, temos que t tende a zero quando x tende a zero.

Assim, podemos escrever:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ell n\,(1 + 2x)}{x} = \ell n \lim_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \ell n \lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{2}{t}} = \ell n \left[\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}}\right]^2 = \ell n\, e^2 = 2.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a, b), B.3 (a, b), B.4 (a, b), B.5 (a, b), B.6 (a, b), B.7 (a, b), B.8 (a, b, c), B.9 (a, b), C.1, C.4 (a).
Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2 (c, d), B.3 (c, d), B.4 (c, d), B.5 (c, d), B.6 (c, d), B.7 (c, d), B.8 (d, e, f), B.9 (c, d), C.2, C.3, C.4 (b), C.5.

Exercícios básicos

B.1 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{7}{x}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{9}{x}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^x$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{6}{x}\right)^x$.

B.2 Determine os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 4x)^{\frac{2}{x}}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{x}}$; c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 9x)^{\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 7x)^{\frac{6}{x}}$.

B.3 Obtenha o valor de:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{6}{x + 3}\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{4}{2x - 1}\right)^x$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{5}{3x + 1}\right)^x$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{4}{2x + 5}\right)^{3x}$.

B.4 Encontre os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x - 1}{2x + 4}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{6x + 3}{6x - 2}\right)^{\frac{x}{2}}$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 5}{x - 1}\right)^{3x}$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4x + 6}{4x - 1}\right)^{5x}$.

B.5 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 5 \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cossec} x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3 \operatorname{tg} x)^{2 \operatorname{cotg} x}$;

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1 + \sec x}{\sec x} \right)^{3 \sec x}$;

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + 4|\operatorname{cotg} x|)^{|\operatorname{tg} x|}$.

B.6 Determine os seguintes logaritmos:

a) $\ell n\, e^{-2}$; b) $\ell n\, e^{5}$; c) $\ell n\, \sqrt{e}$; d) $\ell n\, \sqrt[7]{e}$.

B.7 Sabendo que $\ell n\, a = 3$ e $\ell n\, b = 4$, calcule:

a) $\ell n\, ab$; b) $\ell n\, \dfrac{a}{b}$; c) $\ell n\, \dfrac{b}{a}$; d) $\ell n\, a^b$.

B.8 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{8x} - 1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-2x} - 1}{x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{4x}}{x}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{e^x} - 1}{x}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{e^{2x}} - 1}{x}$;

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[5]{e^x}}{x}$.

B.9 Encontre os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(1 + 5x)}{x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(1 + 4x)}{2x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(1 + x)}{2x}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(1 + 3x)}{4x}$.

Exercícios complementares

C.1 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x + 1} \right)^{2x + 5}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2} \right)^{x^2}$.

C.2 Obtenha os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{x}{5} \right)^{\frac{3}{2x}}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{2x}{7} \right)^{\frac{1}{3x}}$.

C.3 Encontre os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 5}{2x + 3} \right)^{x - 2}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 - 9}{x^2} \right)^{2x^2 + 1}$.

C.4 Determine o valor de:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - e^{4x}}{x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 5^{2x}}{x}$.

C.5 Calcule o valor de:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\operatorname{sen} x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{\operatorname{sen} 2x}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem) O $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[5 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$ vale:

a) $5e$. b) e^5. c) $5 - e$. d) $5 + e$. e) 5^e.

V.2 (PUC-SP) Se $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, então, para k real não-nulo, o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{kx}$ vale:

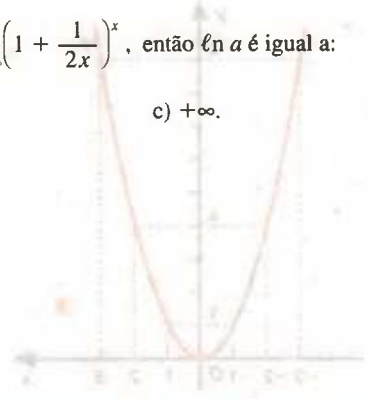
a) ke. b) e^k. c) k^e. d) $e + k$. e) $\frac{e}{k}$.

V.3 (PUC-SP) Sendo e a base dos logaritmos neperianos, o limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ vale:

a) 0. b) $+\infty$. c) -1. d) 1. e) $\frac{1}{2}$.

V.4 (Mackenzie-SP) Se $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$, então $\ell n\, a$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$. b) 5. c) $+\infty$. d) $-\infty$. e) $e^{\frac{1}{2}}$.

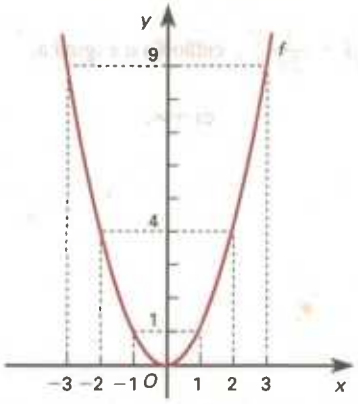


Capítulo 31

Derivada de uma função em um ponto

1. Conceituação

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, cujo gráfico é:

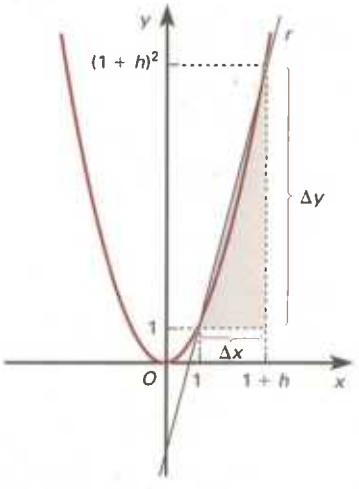


Qual é a equação da reta t tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1?

Esse é o tipo de problema que motivou o estudo das **derivadas**, ou seja, a determinação da **reta tangente** a uma curva em um ponto.

Através da equação fundamental: $y - y_0 = m(x - x_0)$, podemos obter a equação da reta t se tivermos um ponto e o coeficiente angular de t. Temos o ponto (1, 1) da reta t, mas nos falta seu coeficiente angular. Para obtê-lo, vamos utilizar o conceito de limite.

Consideremos uma variável real h e a reta r que passa pelos pontos (1, 1) e $(1 + h, (1 + h)^2)$ da parábola:



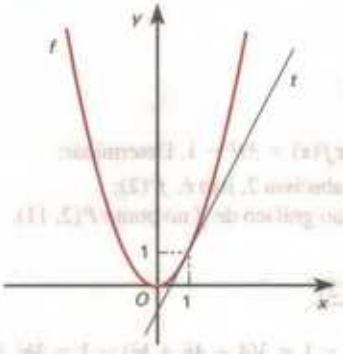
Se fizermos h tender a zero, a reta r tenderá à reta tangente t. O coeficiente angular m_r da reta r é:

$$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+h)^2 - 1}{1+h-1} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h.$$

O limite de $m_r = 2 + h$ para h tendendo a zero é o coeficiente angular m da reta tangente t, ou seja:

$$m = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2.$$

Finalmente, temos a equação da reta t: $y - 1 = 2(x - 1) \therefore y = 2x - 1$.



O coeficiente angular $m = 2$ é a **derivada** da função f no ponto de abscissa 1.

O raciocínio utilizado nesse exemplo é válido para qualquer $h \in \mathbb{R}^*$, ou seja, para h positivo ou para h negativo. A seguir, vamos generalizar o conceito de derivada.

Definição

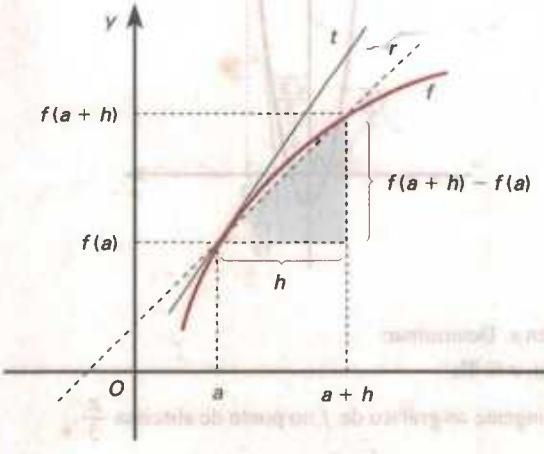
Seja f uma função real de variável real e seja a, $a \in \mathbb{R}$, tal que existe uma vizinhança completa de a contida no domínio de f.

A derivada da função f no ponto de abscissa a, que se indica por $f'(a)$, é:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se, e somente se, esse limite existe e é finito.

Observe que $f'(a)$ é o coeficiente angular da **reta tangente** ao gráfico de f no ponto de abscissa a.



Quando h tende a zero, a reta r tende à reta tangente t, cujo coeficiente angular é:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Notas

1. Dizemos que uma função f é **derivável** em um ponto de abscissa a se, e somente se, existe $f'(a)$.
2. Dizemos que uma função f é **derivável** em um intervalo aberto $]p, q[$ se, e somente se, existe $f'(a)$, $\forall a, a \in]p, q[$.

Exercícios resolvidos

R.1 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x^2 - 1$. Determinar:

a) a derivada de f no ponto de abscissa 2, isto é, $f'(2)$;

b) a equação da reta t tangente ao gráfico de f no ponto $P(2, 11)$.

Resolução

a) $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

Como $f(2+h) = 3(2+h)^2 - 1 = 3(4 + 4h + h^2) - 1 = 3h^2 + 12h + 11$ e

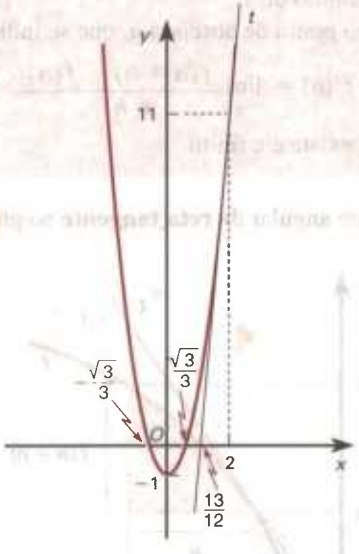
$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$, temos: $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 12h + 11 - 11}{h} = \lim_{h \to 0} (3h + 12) = 12$.

b) Temos, da reta t, o ponto $P(2, 11)$ e o coeficiente angular $m = f'(2) = 12$. Pela equação fundamental:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

obtemos a equação da reta t: $y - 11 = 12(x - 2) \therefore y = 12x - 13$.

Graficamente, temos:



R.2 Seja a função $f(x) = \operatorname{sen} x$. Determinar:

a) $f'(a)$, para qualquer a, $a \in \mathbb{R}$;

b) a equação da reta t tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{3}$.

Resolução

a) $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a}{h}$.

Lembrando a fórmula $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}$, temos:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a+h-a}{2} \cos \frac{a+h+a}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \cos \frac{2a+h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \to 0} \cos \frac{2a+h}{2} = 1 \cdot \cos \frac{2a}{2} = \cos a.$$

Logo, $f'(a) = \cos a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$.

b) Pelo item (a), temos que $f'(a) = \cos a$, para qualquer valor real de a. Assim, $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Temos ainda que o ponto do gráfico de f que possui abscissa $\dfrac{\pi}{3}$ é:

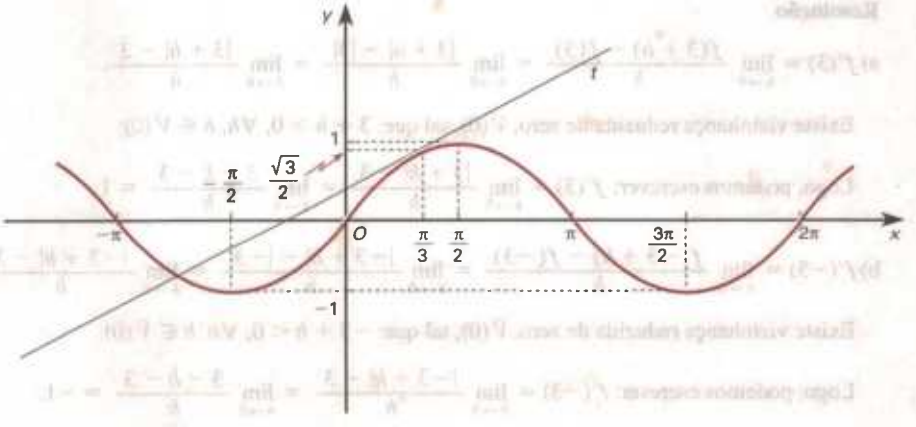
$$\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Assim, o coeficiente angular e um ponto da reta t são, respectivamente, $\dfrac{1}{2}$ e $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Através da equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$, obtemos a equação da reta t:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Graficamente, temos:



Nota: o conceito de reta tangente a uma curva em um ponto é um conceito "local", isto é, deve ser definido em uma vizinhança do ponto. Por isso, apesar de a reta t possuir mais de um ponto em comum com o gráfico de f, ela é tangente a esse gráfico no ponto de abscissa $\dfrac{\pi}{3}$.

R.3 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x + 5$. Calcular $f'(a)$, para qualquer a, $a \in \mathbb{R}$.

Resolução

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3(a+h)+5] - [3a+5]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 3 = 3.$$

Logo, $f'(a) = 3$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$.
Observe que $f'(a)$ é o coeficiente angular da reta de equação $f(x) = 3x + 5$. Podemos então entender que uma reta é tangente a si mesma por qualquer um de seus pontos.

R.4 A função $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ é derivável no intervalo $]1, 5[$?

Resolução
Para que uma função f seja derivável em um ponto de abscissa a, a definição exige que exista $f(a)$. Como $3 \notin D(f)$, temos que f não é derivável no ponto de abscissa 3 e, portanto, não é derivável no intervalo $]1, 5[$.

R.5 Mostrar que a função $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ é derivável em todo seu domínio.

Resolução

Temos que: $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \dfrac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = x + 3$, para $x \neq 3$.

Existe $f'(a)$ se, e somente se, existe e é finito o limite: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+a) - f(a)}{h}$.

Para qualquer a, $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 3$, temos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h+3) - (a+3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Como esse limite existe e é finito para todo elemento real a, $a \neq 3$, temos que f é derivável em seu domínio.

R.6 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$. Determinar:
a) $f'(3)$; b) $f'(-3)$; c) $f'(0)$.

Resolução

a) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|3+h| - |3|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|3+h| - 3}{h}$.

Existe vizinhança reduzida de zero, $\overline{V}(0)$, tal que: $3 + h > 0$, $\forall h, h \in \overline{V}(0)$.

Logo, podemos escrever: $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|3+h| - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 + h - 3}{h} = 1$.

b) $f'(-3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|-3+h| - |-3|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|-3+h| - 3}{h}$.

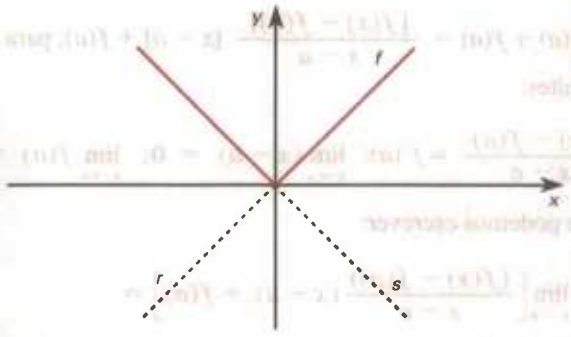
Existe vizinhança reduzida de zero, $\overline{V}(0)$, tal que: $-3 + h < 0$, $\forall h, h \in \overline{V}(0)$.

Logo, podemos escrever: $f'(-3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|-3+h| - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 - h - 3}{h} = -1$.

c) $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|0+h| - |0|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|h|}{h}$.

Observe que esse limite **não existe**, pois os limites laterais $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = 1$ e $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = -1$ são diferentes. Por isso dizemos que **não existe** $f'(0)$.

Nota: os limites laterais $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ e $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$ são as **derivadas laterais** de f à direita e à esquerda de zero, respectivamente.



Os coeficientes angulares de r e s, 1 e -1, são as derivadas laterais de f à direita e à esquerda de zero, respectivamente.

Generalizando, definimos:

Seja f uma função real de variável real e seja $[a, b]$, $a < b$, um intervalo fechado contido no domínio de f.

- A derivada de f para x tendendo a a pela direita, que se indica por $f'_+(a)$, é:

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se, e somente se, esse limite existe e é finito.

- A derivada de f para x tendendo a b pela esquerda, que se indica por $f'_-(b)$, é:

$$f'_-(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b + h) - f(b)}{h}$$

se, e somente se, esse limite existe e é finito.

Dizemos que uma função f é derivável em um intervalo fechado $[a, b]$ se f é derivável em $]a, b[$ e existem $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$.

2. Continuidade de funções

Teorema

Se f é uma função real de variável real e existe $f'(a)$, então f é contínua em a.

Demonstração

Devemos provar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Por hipótese, existe $f'(a)$. Da definição de derivada, temos: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Fazendo a mudança de variável: $x = a + h$, temos que x tende a a quando h tende a zero. Logo, podemos escrever: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Temos:

- que $f(x) = f(x) - f(a) + f(a) = \frac{[f(x) - f(a)]}{x - a} [x - a] + f(a)$, para $x \neq a$,
- e que existem os limites:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a); \quad \lim_{x \to a} (x - a) = 0; \quad \lim_{x \to a} f(a) = f(a).$$

Logo, existe $\lim_{x \to a} f(x)$, e podemos escrever:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[\frac{(f(x) - f(a))}{x - a} (x - a) + f(a) \right] =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) + \lim_{x \to a} f(a) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a). \quad \text{(c.q.d.)}$$

Exercícios resolvidos

R.7 Mostrar que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, \text{ se } x \neq 5 \\ 2, \text{ se } x = 5 \end{cases}$ não é derivável no ponto de abscissa 5.

Resolução

Podemos escrever: $f(x) = \begin{cases} \frac{(x + 5)\cancel{(x - 5)}}{\cancel{x - 5}}, \text{ se } x \neq 5 \\ 2, \text{ se } x = 5, \end{cases}$ ou, ainda, $f(x) = \begin{cases} x + 5, \text{ se } x \neq 5 \\ 2, \text{ se } x = 5. \end{cases}$

Note que $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} (x + 5) = 10$ e $f(5) = 2$.

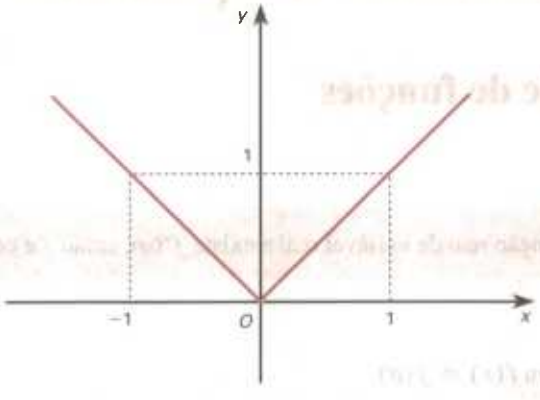
Assim, $\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$, ou seja, f é descontínua no ponto de abscissa 5.

O teorema anterior afirma que, "se uma função f é derivável em um ponto de abscissa a, então f é contínua em a". Logo, concluímos que, "se f não é contínua em a, então f não é derivável em a". A função f apresentada nesse exercício é descontínua no ponto de abscissa 5; então f não é derivável nesse ponto.

R.8 Dar um exemplo de uma função contínua em um ponto de abscissa a e não-derivável nesse ponto.

Resolução

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$, que possui o gráfico:



é contínua no ponto de abscissa zero, isto é: $\lim_{x \to 0} |x| = |0| = 0$. No entanto, f não é derivável nesse ponto, como mostramos na questão (c) do exercício R.6.

3. Função derivada

Definição

Seja a função $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, e seja D' o conjunto de todos os valores x tal que existe $f'(x)$.

Chama-se **função derivada** de f a função $f': D' \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Exercícios resolvidos

R.9 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. Obter a função derivada de f.

Resolução

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Observe que esse limite existe e é finito para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$. Assim, temos $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 2x$.

Nota: no cálculo de $\lim_{h \to 0} (2x + h)$ a variável é h, devendo-se considerar x como constante.

R.10 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$. Obtenha a função derivada de f.

Resolução

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

Esse limite existe e é finito para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$.

Assim, temos $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 3x^2$.

R.11 A função $f'(x) = 5x - 6$ é derivada de uma função f.

a) Qual é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2?

b) Qual é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1?

Resolução

a) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2 é igual a $f'(2)$, ou seja:

$$f'(2) = 5 \cdot 2 - 6 = 4.$$

b) $f'(1) = 5 \cdot 1 - 6 = -1$.

3.1. Outras notações para a função derivada

A derivada de uma função $y = f(x)$ pode também ser indicada por:

a) y' (lê-se: derivada de y);

b) y'_x (lê-se: derivada de y em relação a x);

c) $\frac{dy}{dx}$ (lê-se: derivada de y em relação a x);

d) Df (lê-se: derivada de f);

e) $\frac{df}{dx}$ (lê-se: derivada de f em relação a x).

Exemplo

No exercício R.9 vimos que a função derivada de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$. Essa função derivada pode também ser indicada por:

a) $y' = 2x$;

b) $y'_x = 2x$;

c) $\frac{dy}{dx} = 2x$;

d) $Df = 2x$;

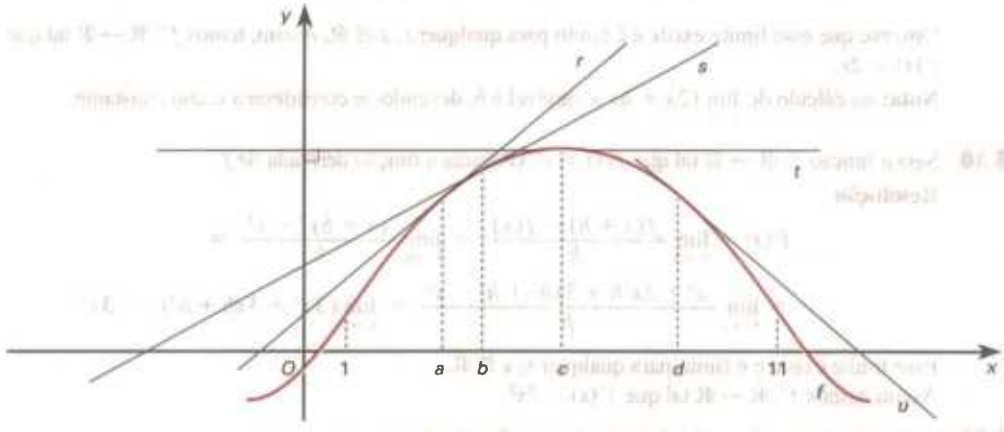
e) $\frac{df}{dx} = 2x$.

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.6, B.7, B.9, B.11, B.15 (a, b, c), C.1, C.3, C.4.
Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.8, B.10, B.12, B.13, B.14, B.15 (d, e, f), C.2, C.5.

Exercícios básicos

B.1 As retas r, s, t e u são tangentes ao gráfico da função f nos pontos de abscissas a, b, c e d, respectivamente, conforme o gráfico:



Sabendo que f é derivável no intervalo $]1, 11[$, assinale V ou F:

a) $f'(a) > f'(b)$;
b) $f'(d) > f'(a)$;
c) $f'(c) = 0$;
d) $f'(b) \cdot f'(c) > 0$;
e) $f'(a) + f'(b) > 0$;
f) $a < x < c \Rightarrow f'(x) > 0$;
g) $c < x < d \Rightarrow f'(x) < 0$.

B.2 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x^2 - 2$. Determine:

a) $f'(1)$;
b) a equação da reta t tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

B.3 Considerando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^3$, obtenha:

a) $f'(2)$;
b) a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (2, 16).

B.4 A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \cos x$. Determine:

a) $f'(a)$, para qualquer a, $a \in \mathbb{R}$;
b) a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{6}$.

Sugestão: $\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \operatorname{sen} \frac{p+q}{2}$.

B.5 Seja a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$. Encontre:

a) $f'(a)$ para todo a, $a \in \mathbb{R}_+^*$;

b) a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 4.

B.6 A função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ não é derivável no intervalo:

a) $]2, 5[$. b) $]-3, -1[$. c) $]6, 8[$. d) $]10, 11[$. e) $]-2, 5[$.

B.7 Prove que a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ é derivável em todo seu domínio.

B.8 Demonstre que a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é derivável em $\mathbb{R}^*$.

B.9 Dada a função $f(x) = |x - 3|$, calcule:

a) $f'(5)$; b) $f'(2)$; c) $f'(3)$.

B.10 Sendo $f(x) = |2x - 1|$, determine:

a) $f'(0)$; b) $f'(3)$; c) $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

B.11 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, \text{ se } x \neq 1 \\ 5, \text{ se } x = 1. \end{cases}$

a) Calcule $f(1)$.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

c) A função f é derivável no ponto de abscissa 1? Por quê?

B.12 Mostre que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 5}, \text{ se } x \neq 5 \\ 10, \text{ se } x = 5 \end{cases}$ não é derivável no ponto de abscissa 5.

B.13 Assinale a afirmação falsa:

a) Se uma função f é derivável em um ponto de abscissa a, então f é contínua em a.

b) Se uma função f é contínua em um ponto de abscissa a, então f é derivável em a.

c) Se uma função f é derivável em um ponto de abscissa a, então existe $f(a)$.

d) Se uma função f é derivável em um ponto de abscissa a, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

e) Se uma função f é derivável em um intervalo $]a, b[$, então f é contínua em $]a, b[$.

B.14 Apenas uma das alternativas seguintes apresenta uma função contínua em seu domínio e não-derivável nesse domínio. Assinale-a:

a) $f(x) = x^2$. c) $h(x) = |x - 3|$. e) $u(x) = x^3$.

b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$. d) $t(x) = x + 2$.

B.15 Obtenha a função derivada de cada uma das funções seguintes:

a) $f(x) = 5x^2$;

b) $g(x) = 4x^3$;

c) $h(x) = \text{sen } x$; **sugestão:** exercício R.2;

d) $t(x) = \dfrac{1}{x}$;

e) $u(x) = \sqrt{x}$;

f) $v(x) = \cos x$; **sugestão:** exercício B.4.

Exercícios complementares

C.1 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4$. Determine:
a) $f'(2)$;
b) a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

C.2 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + x$. Determine:
a) $f'(1)$;
b) a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (1, 2).

C.3 A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Determine a função derivada de f.

C.4 Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$. Obtenha a função derivada de $f(x) = a^x$. **Sugestão:** $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t} = \ell n\, a$.

C.5 Qual é a função derivada de $f(x) = e^x$?

C.6 Dada a função $f(x) = |x^2 - 4|$, calcule:
a) $f'(5)$; b) $f'(0)$; c) $f'(2)$.

Questões dos vestibulares

V.1 (FEI-SP) Ache a declividade da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto de coordenadas $(-2, 4)$.
Nota: declividade é o mesmo que coeficiente angular.

V.2 (Cescea) Seja $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Então, a derivada de f no ponto de abscissa $x = 1$ é:
a) 0. b) 10. c) 9. d) 6. e) 5.

V.3 (Mackenzie-SP) A equação da reta tangente à curva $y = x^3$, no ponto de abscissa $x = 1$, é:
a) $y = 6x - 4$.
b) $y = 3x$.
c) $y = 3x - 3$.
d) $y = 3x - 2$.
e) $y = 6x + 5$.

Capítulo 32

Derivadas fundamentais e regras de derivação

1. Derivadas fundamentais

1.1. Derivada da função constante

$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$, em que k é uma constante real.

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

(c.q.d.)

Exemplo

$$f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

1.2. Derivada da função potência

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, em que n é uma constante natural não-nula.

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n - \cancel{x^n}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}.$$

(c.q.d.)

Exemplos

a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$. b) $f(x) = x^9 \Rightarrow f'(x) = 9x^8$. c) $f(x) = x^1 \Rightarrow f'(x) = 1x^0 = 1$.

Nota: demonstraremos mais adiante que, quando $x > 0$, essa propriedade vale para qualquer expoente real.

Exemplo

$$f(x) = x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}.$$

1.3. Derivada da função seno

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x.$$

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\operatorname{sen}\dfrac{x+h-x}{2}\cos\dfrac{x+h+x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}\cos\dfrac{2x+h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+h}{2} =$$

$$= 1\cos\frac{2x}{2} = \cos x.$$

(c.q.d.)

1.4. Derivada da função co-seno

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}\dfrac{x+h+x}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x+h-x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}\dfrac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(-\operatorname{sen}\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} =$$

$$= -\operatorname{sen}\frac{2x}{2}\cdot 1 = -\operatorname{sen} x.$$

(c.q.d.)

1.5. Derivada da função exponencial

$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ell n\, a$, em que a é uma constante real positiva e diferente de 1.

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ell n\, a.$$

(c.q.d.)

Exemplos

a) $f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \ell n\, 3$.

b) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \ell n\, e = e^x$.

1.6. Derivada da função logarítmica natural

$$f(x) = \ell n\, x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ell n\,(x+h) - \ell n\, x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ell n \dfrac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h}\ \ell n \left(1 + \frac{h}{x}\right)\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \ell n \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ell n \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}. \quad \text{(I)}$$

Fazendo a mudança de variável $t = \dfrac{h}{x}$, ou seja, $h = tx$, temos que t tende a zero quando h tende a zero. Assim, podemos escrever:

$$\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{tx}} = \lim_{t \to 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left[\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}. \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos: $f'(x) = \ell n\, e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}\ \ell n\, e = \dfrac{1}{x}$.

(c.q.d.)

2. Regras de derivação

2.1. Derivada da soma

Sejam u e v funções deriváveis em um intervalo aberto I. Para todo x, $x \in I$, tem-se que:

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$$

(c.q.d.)

Essa propriedade pode ser estendida para qualquer soma $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x)$ de n funções deriváveis em um intervalo aberto I, ou seja:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) \Rightarrow f'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + u_3'(x) + \ldots + u_n'(x), \forall x, x \in I.$$

2.2. Derivada da diferença

Sejam u e v funções deriváveis em um intervalo aberto I. Para todo x, $x \in I$, tem-se que:

$$f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x).$$

Deixamos a demonstração dessa propriedade para você fazer como exercício.

Podemos ainda estender essa propriedade para n funções deriváveis em um intervalo aberto I, ou seja:

$$f(x) = u_1(x) - u_2(x) - u_3(x) - \ldots - u_n(x) \Rightarrow f'(x) = u_1'(x) - u_2'(x) - u_3'(x) - \ldots - u_n'(x), \forall x, x \in I.$$

Exercício resolvido

R.1 Determinar a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^4 + \operatorname{sen} x$; b) $g(x) = x^5 - x^3$; c) $h(x) = 3 - x + \cos x + \ell n\, x$.

Resolução

a) $f'(x) = 4x^3 + \cos x$; b) $g'(x) = 5x^4 - 3x^2$; c) $h'(x) = 0 - 1 - \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}$.

2.3. Derivada do produto

Sejam u e v funções deriváveis em um intervalo aberto I. Para todo x, $x \in I$, tem-se que:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)] \cdot v(x+h) + u(x) \cdot [v(x+h) - v(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \lim_{h \to 0} v(x+h) + \lim_{h \to 0} u(x) \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} =$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.2 Determinar a derivada da função $f(x) = x^5 \operatorname{sen} x$.

Resolução

Sejam: $u(x) = x^5 \Rightarrow u'(x) = 5x^4$ e $v(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow v'(x) = \cos x$.

Temos: $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \Rightarrow f'(x) = 5x^4 \operatorname{sen} x + x^5 \cos x$.

R.3 Determinar a derivada da função $f(x) = (x^4 + 8)\, \ell\mathrm{n}\, x$.

Resolução

Sejam: $u(x) = x^4 + 8 \Rightarrow u'(x) = 4x^3 + 0$ e $v(x) = \ell\mathrm{n}\, x \Rightarrow v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Temos:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \Rightarrow f'(x) = 4x^3\, \ell\mathrm{n}\, x + (x^4 + 8) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ f'(x) = 4x^3\, \ell\mathrm{n}\, x + \frac{x^4 + 8}{x}.$$

R.4 Sejam g, h e t funções deriváveis em um intervalo aberto I. Provar que:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \cdot t(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) \cdot t(x) + g(x) \cdot h'(x) \cdot t(x) + g(x) \cdot h(x) \cdot t'(x),\ \forall x,\ x \in I.$$

Resolução

Podemos escrever: $f(x) = [g(x) \cdot h(x)] \cdot t(x)$.

Sejam: $u(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow u'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$ e $v(x) = t(x) \Rightarrow v'(x) = t'(x)$.

Temos:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \ \therefore\ f'(x) = [g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)] \cdot t(x) + g(x) \cdot h(x) \cdot t'(x)$$
$$\therefore\ f'(x) = g'(x) \cdot h(x) \cdot t(x) + g(x) \cdot h'(x) \cdot t(x) + g(x) \cdot h(x) \cdot t'(x).$$

Nota: essa propriedade pode ser estendida para um produto de n funções deriváveis; por exemplo:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) \cdot z(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) \cdot z(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) \cdot z(x) +$$
$$+ u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x) \cdot z(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) \cdot z'(x).$$

R.5 Determinar a derivada da função $f(x) = x^4 \operatorname{sen} x \ln x$.

Resolução

Pela propriedade demonstrada no exercício R.4, temos:

$$f'(x) = 4x^3 \operatorname{sen} x \ln x + x^4 \cos x \ln x + x^4 \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(x) = 4x^3 \operatorname{sen} x \ln x + x^4 \cos x \ln x + x^3 \operatorname{sen} x.$$

Conseqüências da derivada do produto

(I) $f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$, em que k é uma constante real.

Demonstração

Sejam:

$$u(x) = k \Rightarrow u'(x) = 0;$$
$$v(x) = g(x) \Rightarrow v'(x) = g'(x).$$

Temos: $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 0 \cdot g(x) + k \cdot g'(x) = k \cdot g'(x)$.

(c.q.d.)

Exemplos

a) $f(x) = 5x^4 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot 4x^3 \therefore f'(x) = 20x^3$.

b) $f(x) = 3 \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = 3 \cos x$.

(II) $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$, em que a é uma constante real positiva e diferente de 1.

Demonstração

Através da fórmula de mudança de base dos logaritmos, podemos escrever:

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a}, \text{ ou seja, } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Assim, $f(x) = \log_a x \Rightarrow f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, ou, ainda, $f(x) = \dfrac{1}{\ln a} \ln x$.

Pela propriedade anterior (I), temos: $f'(x) = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x} \therefore f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

(c.q.d.)

Exemplos

a) $f(x) = \log_3 x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 3}$.

b) $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

2.4. Derivada do quociente

Sejam u e v funções deriváveis em um intervalo aberto I. Para todo x, $x \in I$ e $v(x) \neq 0$, tem-se que:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Demonstração

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+h)}{v(x+h) \cdot v(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+h) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{v(x+h) \cdot v(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)] \cdot v(x) - u(x) \cdot [v(x+h) - v(x)]}{h \cdot v(x+h) \cdot v(x)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}\right] \cdot v(x) - u(x) \cdot \left[\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]}{v(x+h) \cdot v(x)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot \lim\limits_{h \to 0} v(x) - \lim\limits_{h \to 0} u(x) \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}}{\lim\limits_{h \to 0} v(x+h) \lim\limits_{h \to 0} v(x)} =$$

$$= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.6 Determinar a derivada da função $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x^3}$.

Resolução

Sejam: $u(x) = x^2 + 8 \Rightarrow u'(x) = 2x + 0 = 2x$ e $v(x) = x^3 \Rightarrow v'(x) = 3x^2$.

Temos:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x^3 - (x^2 + 8) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^4 - 24x^2}{x^6} = \frac{-x^4 - 24x^2}{x^6} = -\frac{x^2 + 24}{x^4}.$$

R.7 Determinar a derivada da função $f(x) = \dfrac{3}{\operatorname{sen} x}$.

Resolução

Sejam:

$$u(x) = 3 \Rightarrow u'(x) = 0;$$
$$v(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow v'(x) = \cos x.$$

Temos:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \operatorname{sen} x - 3 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \therefore f'(x) = -\frac{3 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Conseqüências da derivada do quociente

(I) $f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1}$, em que k é uma constante inteira não-nula.

Provamos no item 1.2 (página 535) que essa propriedade é válida para expoente natural não-nulo. Falta, portanto, demonstrá-la para expoente negativo inteiro.

Demonstração

Sendo $k = -n$ com $n \in \mathbb{N}^*$, podemos escrever:

$$f(x) = x^k \Rightarrow f(x) = x^{-n} \therefore f(x) = \frac{1}{x^n}.$$

Pela derivada do quociente, temos:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \therefore f'(x) = \frac{0x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{[x^n]^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \therefore f'(x) = -nx^{n-1-2n} \therefore f'(x) = -nx^{-n-1}$$

Logo, $f'(x) = kx^{k-1}$. (c.q.d.)

Exemplo

$$f(x) = x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5x^{-5-1} \therefore f'(x) = -5x^{-6}.$$

(II) $f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x.$

Demonstração

$$f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Pela derivada do quociente, temos:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \therefore f'(x) = \sec^2 x.$$ (c.q.d.)

(III) $f(x) = \operatorname{cotg} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cossec}^2 x.$

(IV) $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x.$

(V) $f(x) = \operatorname{cossec} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x.$

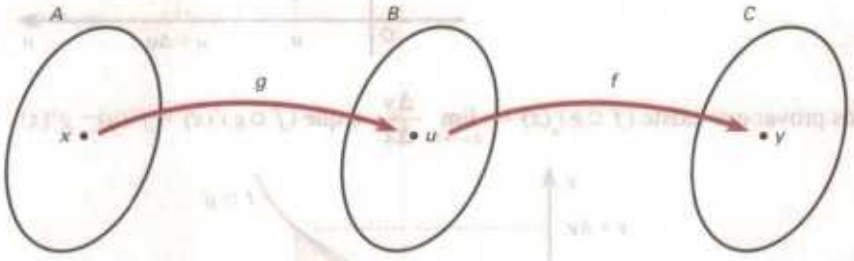
As demonstrações de (III), (IV) e (V) são análogas às anteriores (I) e (II). Faça-as como exercício.

2.5. Derivada da função composta (regra da cadeia)

Sejam $g: A \to B$ e $f: B \to C$ funções reais de variável real tais que:

- $u = g(x)$;
- $y = f(u)$;
- g é derivável no ponto de abscissa x;
- f é derivável no ponto de abscissa u.

OBS.: Derivada da "dentro" vezes a derivada da "de fora".



Nessas condições, tem-se a seguinte propriedade:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow (f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot g'(x),$$

que também pode ser apresentada sob a forma:

$$y = f(\underbrace{g(x)}_{u}) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Demonstração

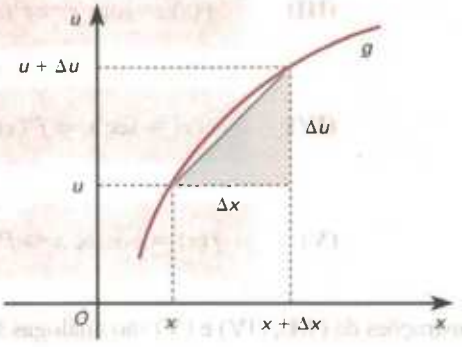
Sejam Δx, Δu e Δy acréscimos reais tais que:

$$g(x + \Delta x) = u + \Delta u \text{ e } f(u + \Delta u) = y + \Delta y.$$

Portanto $(f \circ g)(x + \Delta x) = y + \Delta y$.

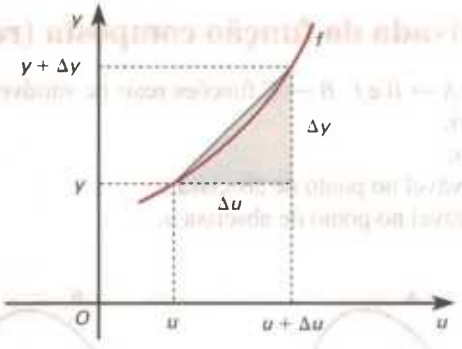
Conseqüentemente temos:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

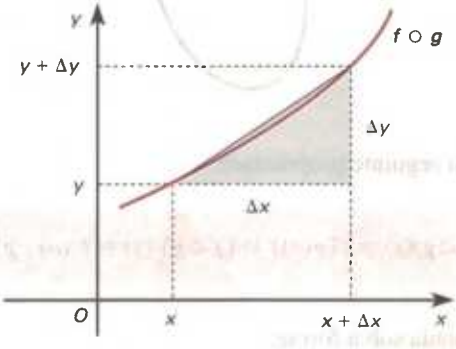


e

$$f'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$$



Devemos provar que existe $(f \circ g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e que $(f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$.



Primeiro caso: suponhamos que exista uma vizinhança de x para a qual $\Delta u \neq 0$; nessa vizinhança podemos escrever: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$.

Existem $\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$ e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = g'(x)$.

Logo, existe $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = (f \circ g)'(x)$ e podemos escrever :

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Para Δx tendendo a zero temos também que Δu tende a zero pois a função g é derivável no ponto de abscissa x e, portanto, contínua nesse ponto. Assim, temos:

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot g'(x).$$

Segundo caso: suponhamos que Δu se anule para algum valor de qualquer vizinhança de x.

Consideremos a função: $\mathscr{E}(\Delta u) = \begin{cases} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} - f'(u), \text{ se } \Delta u \neq 0 \\ 0, \text{ se } \Delta u = 0. \end{cases}$

Observemos que a sentença $\Delta y = [\mathscr{E}(\Delta u) + f'(u)]\,\Delta u$ (I) é verdadeira, mesmo quando $\Delta u = 0$. Temos ainda que $\mathscr{E}(\Delta u)$ tende a zero quando Δu tende a zero e quando Δx tende a zero.

Dividindo ambos os membros de (I) por Δx, temos: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = [\mathscr{E}(\Delta u) + f'(u)] \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$.

Assim, temos que:

$$(f \circ g)'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [\mathscr{E}(\Delta u) + f'(u)] \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot g'(x).$$

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.8 Sejam as funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4 + 5$. Obter a derivada da função composta $y = (f \circ g)(x)$.

Resolução

$$y = (f \circ g)(x) \Rightarrow y = (x^4 + 5)^3.$$

Fazendo $u = x^4 + 5$, temos $y = u^3$.

Assim, temos que: $\dfrac{du}{dx} = 4x^3 + 0 = 4x^3$ e $\dfrac{dy}{du} = 3u^2 = 3(x^4 + 5)^2$.

Pela regra da cadeia: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3(x^4 + 5)^2 \cdot 4x^3 \therefore \dfrac{dy}{dx} = 12x^3(x^4 + 5)^2$.

R.9 Determinar a derivada da função $y = \text{sen}\,(x^5)$.

Resolução

Fazendo $u = x^5$, temos $y = \text{sen}\,u$.

Assim, temos que: $\dfrac{du}{dx} = 5x^4$ e $\dfrac{dy}{du} = \cos u = \cos x^5$.

Pela regra da cadeia: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = (\cos x^5) \cdot 5x^4 \therefore \dfrac{dy}{dx} = 5x^4 \cos x^5$.

R.10 Determinar a derivada da função $y = (\text{sen}\,x)^5$.

Resolução

Fazendo $u = \text{sen}\,x$, temos $y = u^5$.

Assim, temos que: $\dfrac{du}{dx} = \cos x$ e $\dfrac{dy}{du} = 5u^4 = 5(\text{sen}\,x)^4$.

Pela regra da cadeia: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5(\text{sen}\,x)^4 \cos x$.

R.11 Obter a derivada da função $y = \ell n\,(x^6 + 3)$.

Resolução

Fazendo $u = x^6 + 3$, temos $y = \ell n\,u$.

Assim, temos que: $\frac{du}{dx} = 6x^5 + 0 = 6x^5$ e $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x^6 + 3}$.

Pela regra da cadeia: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^6 + 3} \cdot 6x^5 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6x^5}{x^6 + 3}$.

R.12 Obter a derivada da função $y = 4^{x^2 + 5}$.

Resolução

Fazendo $u = x^2 + 5$, temos $y = 4^u$.

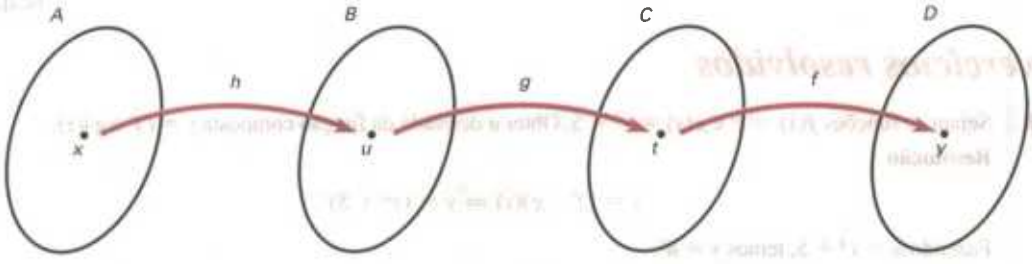
Assim, temos que: $\frac{du}{dx} = 2x + 0 = 2x$ e $\frac{dy}{du} = 4^u \ell n\, 4 = 4^{x^2 + 5} \ell n\, 4$.

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (4^{x^2 + 5})(\ell n\, 4)(2x) \therefore \frac{dy}{dx} = 2x \cdot 4^{x^2 + 5} \ell n\, 4.$$

R.13 Sejam três funções reais de variáveis reais, $h: A \to B$, $g: B \to C$ e $f: C \to D$ tal que:

- $u = h(x)$;
- $t = g(u)$;
- $y = f(t)$;
- h é derivável no ponto de abscissa x;
- g é derivável no ponto de abscissa u;
- f é derivável no ponto de abscissa t.



Provar que: $y = (f \circ g \circ t)(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Resolução

Temos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad \text{(I)}$$

e

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. (c.q.d.)

Nota: a regra da cadeia pode ser aplicada para uma função composta de n funções deriváveis, $\forall n, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

R.14 Determinar a derivada da função $y = (\cos x^4)^5$.

Resolução

Fazendo $u = x^4$, $t = \cos u$ e $y = t^5$, temos:

$$\frac{du}{dx} = 4x^3, \frac{dt}{du} = -\text{sen}\, u = -\text{sen}\, x^4 \text{ e } \frac{dy}{dt} = 5t^4 = 5(\cos u)^4 = 5(\cos x^4)^4.$$

Pela regra da cadeia, podemos escrever:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5(\cos x^4)^4(-\text{sen}\, x^4)4x^3 \therefore \frac{dy}{dx} = -20x^3(\text{sen}\, x^4)(\cos x^4)^4.$$

R.15 Encontrar a derivada da função $y = x^x$, com $x > 0$.

Resolução

Uma propriedade dos logaritmos nos garante que:

$$a = b^{\log_b a}, \text{ com } a > 0 \text{ e } 1 \neq b > 0.$$

Por isso podemos escrever: $x = e^{\ell n\, x}$, para $x > 0$.

Logo, a função $y = x^x$, $x > 0$, pode ser apresentada sob a forma: $y = (e^{\ell n\, x})^x$, ou, ainda, $y = e^{x\, \ell n\, x}$.

Fazendo $u = x\, \ell n\, x$, temos $y = e^u$.

Assim, temos que:

$$\frac{du}{dx} = 1\, \ell n\, x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ell n\, x \text{ e } \frac{dy}{du} = e^u\, \ell n\, e = e^u = e^{x\, \ell n\, x}.$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x\, \ell n\, x}(1 + \ell n\, x) \therefore \frac{dy}{dx} = (e^{\ell n\, x})^x (1 + \ell n\, x) \therefore \frac{dy}{dx} = x^x(1 + \ell n\, x).$$

Nota: para derivar funções do tipo $y = [f(x)]^{g(x)}$, com $f(x) > 0$, aplicamos o método usado no exercício R.14.

R.16 Obter a derivada da função $y = x^{\cos x}$, com $x > 0$.

Resolução

Pela propriedade dos logaritmos revista no exercício R.14, podemos escrever: $x = e^{\ell n\, x}$.

Logo, a função $y = x^{\cos x}$ pode ser apresentada sob a forma: $y = (e^{\ell n\, x})^{\cos x}$ ou, ainda, $y = e^{\cos x\, \ell n\, x}$.

Fazendo $u = \cos x\, \ell n\, x$, temos $y = e^u$. Assim, temos que:

$$\frac{du}{dx} = -\text{sen}\, x\, \ell n\, x + \cos x \cdot \frac{1}{x} = -\text{sen}\, x\, \ell n\, x + \frac{\cos x}{x}$$

e

$$\frac{dy}{du} = e^u\, \ell n\, e = e^u = e^{\cos x\, \ell n\, x}.$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\cos x\, \ell n\, x}\left(\frac{\cos x}{x} - \text{sen}\, x\, \ell n\, x\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (e^{\ell n\, x})^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \text{sen}\, x\, \ell n\, x\right) \therefore \frac{dy}{dx} = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \text{sen}\, x\, \ell n\, x\right).$$

R.17 Demonstrar que $f(x) = x^a \Rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$, em que x é variável real positiva e a é uma constante real qualquer.

Resolução

Pela propriedade dos logaritmos revista no exercício R.14, temos: $x = e^{\ell n\, x}$.

Logo, a função f pode ser apresentada sob a forma: $y = (e^{\ell n\, x})^a$, ou, ainda, $y = e^{a\, \ell n\, x}$.

Fazendo $u = a\, \ell n\, x$, temos $y = e^u$.

Assim, temos que: $\frac{du}{dx} = a \cdot \frac{1}{x} = \frac{a}{x}$ e $\frac{dy}{du} = e^u\, \ell n\, e = e^u = e^{a\, \ell n\, x}$.

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{a\, \ell n\, x} \cdot \frac{a}{x} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}(e^{\ell n\, x})^a \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} \cdot x^a \therefore \frac{dy}{dx} = ax^{a-1},$$

ou seja, $f'(x) = ax^{a-1}$. (c.q.d.)

R.18 Determinar a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, $x > 0$; b) $g(x) = \sqrt[4]{x}$, $x > 0$.

Resolução

a) Pelo exercício R.17, temos: $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^{\frac{1}{3}}}{3}$.

b) A função g pode ser apresentada sob a forma $g(x) = x^{\frac{1}{4}}$. Assim, pelo exercício R.17, temos:

$$g'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{4}.$$

3. Derivadas sucessivas

Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I.

- Se a função f' também for derivável em I, então sua derivada é a **derivada segunda** ou **derivada de ordem 2** da função f, indicada por f''.
- Se a função f'' também for derivável em I, então sua derivada é a **derivada terceira** ou **derivada de ordem 3** da função f, indicada por f'''.
- E assim por diante: se a derivada de ordem n for derivável em I, pode-se obter a derivada de ordem $n + 1$ da função f.

Exemplo

Sendo $f(x) = 2x^4 + x^3$, temos que:

$$f'(x) = 8x^3 + 3x^2;$$
$$f''(x) = 24x^2 + 6x;$$
$$f'''(x) = 48x + 6;$$
$$\text{etc.}$$

3.1. Outras notações para derivadas sucessivas

Se f é uma função derivável em um intervalo I e existem as derivadas sucessivas até ordem n, então essas derivadas podem também ser indicadas por:

$f^{(1)}(x), y^{(1)}$ ou $\frac{dy}{dx}$ (derivada primeira); $f^{(3)}(x), y^{(3)}$ ou $\frac{d^3y}{dx^3}$ (derivada terceira);

$\vdots$

$f^{(2)}(x), y^{(2)}$ ou $\frac{d^2y}{dx^2}$ (derivada segunda); $f^{(n)}(x), y^{(n)}$ ou $\frac{d^ny}{dx^n}$ (derivada de ordem n).

Exercícios resolvidos

R.19 Seja $f(x) = \text{sen } x$. Calcular:

a) $f^{(1)}(x)$; b) $f^{(2)}(x)$; c) $f^{(3)}(x)$; d) $f^{(4)}(x)$.

Resolução

a) $f^{(1)}(x) = \cos x$; b) $f^{(2)}(x) = -\text{sen } x$; c) $f^{(3)}(x) = -\cos x$; d) $f^{(4)}(x) = \text{sen } x$.

R.20 Seja $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Calcular:

a) $\frac{dy}{dx}$; b) $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Resolução

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1)\,1}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$;

b) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1)\,2x}{x^4} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$.

4. Resumo das derivadas fundamentais e das regras de derivação

Sejam u, v e w funções deriváveis em um intervalo aberto I e sejam as constantes reais k e a, $a > 0$ e $a \neq 1$. Para qualquer x, $x \in I$, vale a seguinte tabela:

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^k	kx^{k-1}
sen x	cos x
cos x	$-$sen x
tg x	sec^2 x
cotg x	$-$cossec^2 x
sec x	sec x tg x
cossec x	$-$cossec x cotg x
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x) - v(x)$	$u'(x) - v'(x)$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
$k \cdot u(x)$	$k \cdot u'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.2, B.4, B.6, B.8, B.10 (a até d), B.11, B.13, C.1 (a, b), C.2 (a, b), C.3, C.4 (a), C.5 (a).

Tarefa de casa: exercícios B.3, B.5, B.7, B.9, B.10 (e até h), B.12, B.14, C.1 (c, d), C.2 (c, d, e), C.4 (b), C.5 (b).

Exercícios básicos

B.1 Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2$;
b) $g(x) = x^5$;
c) $h(x) = \operatorname{sen} x$;
d) $t(x) = \cos x$;
e) $u(x) = \ell n\, x$;
f) $r(x) = 5^x$;
g) $v(x) = e^x$.

B.2 Sendo $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^5$, obtenha:

a) $g'(2)$;
b) a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 2.

B.3 Sendo $u: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $u(x) = \ell n\, x$, obtenha:

a) $u'(3)$;
b) a equação da reta tangente ao gráfico de u no ponto de abscissa 3.

B.4 Encontre a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $a(x) = x^5 + x^4 + 2$;
b) $b(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$;
c) $c(x) = x^5\, \ell n\, x$;
d) $d(x) = (x^3 + x) \operatorname{sen} x$;
e) $e(x) = x^5 \operatorname{sen} x \cos x$;
f) $f(x) = 9x^4$;
g) $g(x) = 12x^5 - 3x^4 + 2x + 4$;
h) $h(x) = \log_5 x$;
i) $i(x) = 6 \log_2 x$;
j) $j(x) = \dfrac{2x^3 + 4}{x^4}$;
k) $k(x) = \dfrac{5}{\cos x}$;
l) $l(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3 + \cos x}$;
m) $m(x) = \dfrac{4 \operatorname{sen} x}{x^5}$;
n) $n(x) = x^{-9}$;
o) $o(x) = 5x^{-2}$;
p) $p(x) = x^{-3} \operatorname{tg} x$;
q) $q(x) = \dfrac{\operatorname{cotg} x}{3x^2}$;
r) $r(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$;
s) $s(x) = 4 \sec x + 3 \operatorname{cossec} x$;
t) $t(x) = x \cdot 4^x$.

B.5 Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $a(x) = x^3 + x$;
b) $b(x) = \ell n\, x - \operatorname{sen} x$;
c) $c(x) = \cos x\, \ell n\, x$;
d) $d(x) = (x^2 + 3) \cos x$;
e) $e(x) = x^4 (\operatorname{sen} x)(x + \operatorname{sen} x)$;
f) $f(x) = 10x^5$;
g) $g(x) = 6x^4 - 3x^2 + 7x - 4$;
h) $h(x) = \log_7 x$;
i) $i(x) = 6 \log_4 x^3$; **sugestão:** $\log_4 x^3 = 3 \log_4 x$;
j) $j(x) = \dfrac{x^4 + x}{x^3}$;
k) $k(x) = \dfrac{6 \cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$;
l) $l(x) = 6x^{-5}$
m) $m(x) = \ell n\, x \operatorname{tg} x$;
n) $n(x) = \dfrac{1 + x}{\operatorname{cotg} x}$;
o) $o(x) = \sec x\, \ell n\, x$;
p) $p(x) = (x + \operatorname{cossec} x)\, \ell n\, x$;
q) $q(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

B.6 Dadas as funções $f(x) = 4x^5$ e $g(x) = x^3 + 2x$, encontre a derivada da função composta $(f \circ g)(x)$.

B.7 Sendo $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x^4$, determine a derivada da função composta $(f \circ g)(x)$.

B.8 Obtenha a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $y = (x^9 + 4)^3$;

b) $y = \cos x^6$;

c) $y = (\cos x)^6$;

d) $y = \ell n\,(2x^4 + 3x)$;

e) $y = 5 \operatorname{sen}(x^4 + 2x)$;

f) $y = 8^{x^3 + x}$;

g) $y = (\operatorname{sen} x^3)^6$;

h) $y = [\ell n\,(2x^4 - x)]^5$;

i) $y = x^{3x}$, com $x > 0$;

j) $y = x^{\operatorname{sen} x}$, com $x > 0$;

k) $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$, com $\operatorname{sen} x > 0$;

l) $y = x^{\frac{3}{4}}$, com $x > 0$;

m) $y = 4x^{\sqrt{2}}$, com $x > 0$;

n) $y = \sqrt{x}$, com $x > 0$;

o) $y = (x^2 - 3x)^{\frac{1}{2}}$, com $x^2 - 3x > 0$.

B.9 Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $y = (2x^3 - 3x + 2)^5$;

b) $y = \operatorname{tg}(x^4 + 3)$;

c) $y = (\sec x)^6$;

d) $y = \ell n \operatorname{sen} x$;

e) $y = 4 \cos\left(2x^3 + \frac{\pi}{7}\right)$;

f) $y = 2^{2x+1}$;

g) $y = 3^{x^2 + 2x}$;

h) $y = (\cos x^5)^4$;

i) $y = (\ell n \operatorname{sen} x)^3$;

j) $y = (3x)^x$, com $x > 0$;

k) $y = (\operatorname{sen} x)^x$, com $\operatorname{sen} x > 0$;

l) $y = x^{-\frac{3}{2}}$, com $x > 0$;

m) $y = \sqrt[6]{x^5}$, com $x > 0$;

n) $y = (x + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{3}}$, com $x + \operatorname{sen} x > 0$.

B.10 Dada a função f:

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 4$, calcule $f'(1)$;

b) $f(x) = e^x x$, calcule $f'(0)$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, calcule $f'(3)$;

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^4$, calcule $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$;

e) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x$, calcule $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$;

f) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, calcule $f'(0)$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^3}$, calcule $f'(1)$;

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 4}$, calcule $f'(2)$.

B.11 Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \dfrac{x}{x+1}$ no ponto de abscissa $x = 2$.

B.12 Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \operatorname{tg} x$ no ponto de abscissa $x = \dfrac{\pi}{6}$.

B.13 Determine $f^{(1)}(x)$; $f^{(2)}(x)$; $f^{(3)}(x)$ e $f^{(4)}(x)$ nos seguintes casos:

a) $f(x) = 2x^6 + x^3$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

c) $f(x) = e^x$;

d) $f(x) = \ell n\, x$;

e) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$;

f) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

B.14 Dada a função $f(x) = \cos x$, obtenha:

a) $f^{(49)}(x)$; b) $f^{(82)}(x)$; c) $f^{(103)}(x)$.

Exercícios complementares

C.1 Dê a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 2^x x^4$;

b) $g(x) = \dfrac{2^{x^2+1}}{\cos x}$;

c) $h(x) = 3^x \operatorname{sen} x$;

d) $t(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^4}{3^x \operatorname{sen} x}$.

C.2 Obtenha a derivada de:

a) $y = (\cos 2^x)^3$;

b) $y = e^{\operatorname{tg}(x^2 - 2x)}$;

c) $y = \operatorname{sen} \dfrac{x^2 - 3}{x}$;

d) $y = \left(\cos \dfrac{2x^3 - 1}{x}\right)^4$;

e) $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

C.3 Demonstre que $f(x) = \log_a |x| \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x \ell n\, a}$, em que $x \in \mathbb{R}^*$ e a é uma constante real positiva e diferente de 1. **Sugestão:** separe em dois casos: 1º) $x > 0$; e 2º) $x < 0$.

C.4 De acordo com a propriedade do exercício C.3, obtenha a derivada de:

a) $f(x) = \log_3 |x|, x \in \mathbb{R}^*$;

b) $g(x) = \log_2 |3 - x|, x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 3$.

C.5 Obtenha a derivada de:

a) $y = \operatorname{sen} e^{x^5}$;

b) $y = e^{\operatorname{sen} x^5}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (PUC-SP) A derivada da função $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$ no ponto de abscissa $x = 2$ é:

a) 2. b) 3. c) 4. d) 0. e) 1.

V.2 (PUC-RJ) A derivada da função $f(x) = \operatorname{tg} x$, calculada no ponto de abscissa $x = \dfrac{\pi}{4}$, vale:

a) 1. b) 2. c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. e) 0.

V.3 (FEI-SP) Sendo $f(x) = (5 - 2x)^8$, a derivada $f'(2)$ vale:

a) 0. b) 4. c) 15. d) 25. e) n.d.a.

V.4 (E. E. Lins-SP) Se $f(x) = e^{2x} \ell n\, x$, então:

a) $f'(1) = 3e^2$. c) $f'(1) = 0$. e) n.d.a.

b) $f'(1) = 2e^2$. d) $f'(1) = e^2$.

V.5 (U. Uberaba-MG) A equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 5x + 1$ no ponto de abscissa $x = 1$ é:

a) $x - y - 4 = 0$. d) $2x + y - 1 = 0$.

b) $x - y + 4 = 0$. e) $2x + y + 1 = 0$.

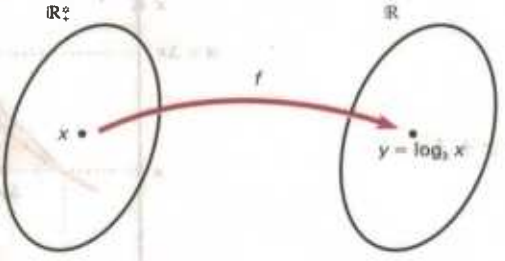
c) $x + y - 4 = 0$.

Capítulo 33

Derivadas de funções inversas e derivação implícita

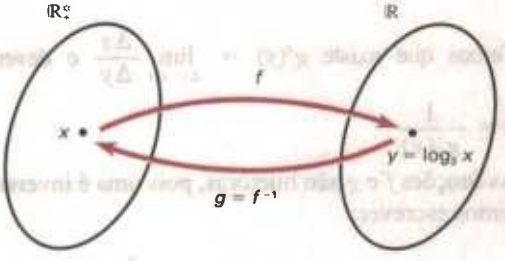
1. Derivadas de funções inversas

Consideremos a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_3 x$.



Como é bijetora, a função f admite inversa g:

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y = \log_3 x \end{cases} \text{ ou, ainda, } \begin{cases} g(y) = x \\ x = 3^y. \end{cases}$$



Logo, $g(y) = 3^y$. Observemos que: $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 3}$ e $g'(y) = 3^y \ln 3 = 3^{\log_3 x} \ln 3 = x \ln 3$. Assim, temos:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

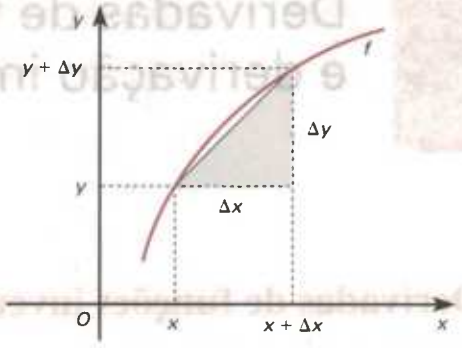
Esse resultado pode ser generalizado através do importante teorema:

> Sejam f e g funções reais de variável real, inversas entre si, ou seja, $g = f^{-1}$.
> Se f é contínua em um intervalo aberto I, com $y = f(x)$, para $x \in I$, e com $g(y) \neq 0$, g derivável em y, então:
>
> $$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}.$$

Demonstração

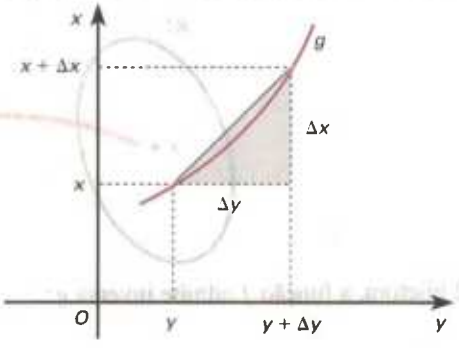
Sejam Δx e Δy acréscimos reais tais que:

$$f(x) = y \Rightarrow f(x + \Delta x) = y + \Delta y.$$



Conseqüentemente, podemos escrever:

$$g(y + \Delta y) = x + \Delta x.$$



Temos que existe $g'(y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ e devemos provar que existe $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ e que $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

As funções f e g são bijetoras, pois uma é inversa da outra. Assim, se $\Delta x \neq 0$, então $\Delta y \neq 0$. Por isso podemos escrever:

$$g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}. \quad \text{(I)}$$

Por hipótese, temos que f é contínua. Logo, Δy tende a zero se, e somente se, o correspondente Δx também tende a zero. Assim, temos que:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$g'(y) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{g'(y)}.$$

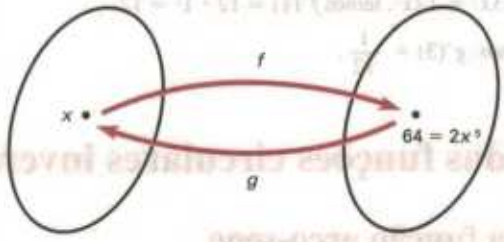
Logo, provamos que existe $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ e que $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

(c.q.d.)

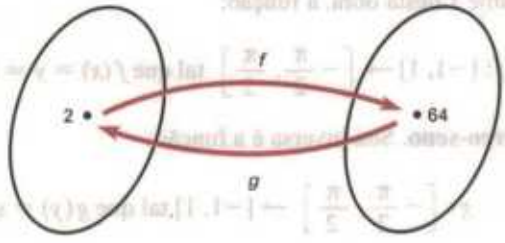
Exercícios resolvidos

R.1 Seja a função $f(x) = y = 2x^5$, cuja inversa é g. Calcular $g'(64)$.

Resolução



Observe que $2x^5 = 64 \Rightarrow x = 2$.



Temos, pelo teorema anterior, que: $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

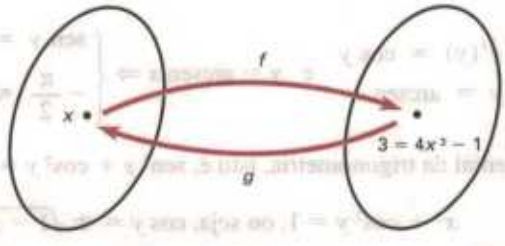
Assim, podemos escrever: $f'(2) = \dfrac{1}{g'(64)} \Rightarrow g'(64) = \dfrac{1}{f'(2)}$.

Como $f'(x) = 2 \cdot 5x^4 = 10x^4$, temos $f'(2) = 10 \cdot 2^4 = 160$.

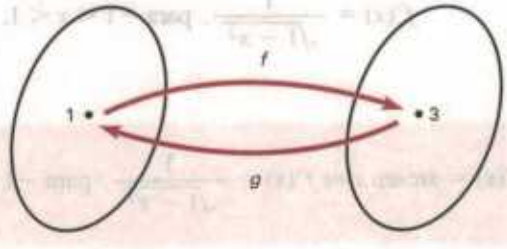
Finalmente, obtemos: $g'(64) = \dfrac{1}{160}$.

R.2 Seja a função $f(x) = 4x^3 - 1$, cuja inversa é g. Calcular $g'(3)$.

Resolução



Observe que $4x^3 - 1 = 3 \Rightarrow x = 1$.



Temos, pelo teorema das derivadas de funções inversas, que: $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

Assim, podemos escrever: $f'(1) = \dfrac{1}{g'(3)} \Rightarrow g'(3) = \dfrac{1}{f'(1)}$.

Como $f'(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$, temos $f'(1) = 12 \cdot 1^2 = 12$.

Finalmente, obtemos: $g'(3) = \dfrac{1}{12}$.

2. Derivadas das funções circulares inversas

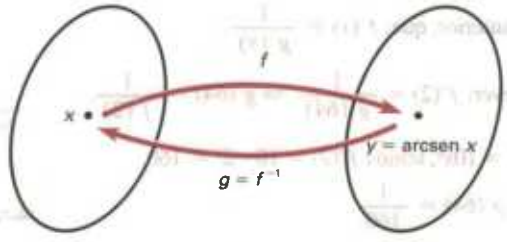
2.1. Derivada da função arco-seno

Como vimos no volume 1 desta obra, a função:

$$f: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tal que } f(x) = y = \operatorname{arcsen} x$$

é denominada **função arco-seno**. Sua inversa é a função:

$$g: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \text{ tal que } g(y) = \operatorname{sen} y.$$



Pelo teorema das derivadas de funções inversas, sabemos que: $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

Temos:

$$\begin{cases} g'(y) = \cos y \\ y = \operatorname{arcsen} x \end{cases} \text{ e } y = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} y = x \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Pela relação fundamental da trigonometria, isto é, $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, podemos escrever:

$$x^2 + \cos^2 y = 1, \text{ ou seja, } \cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Como $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, temos: $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$. Assim, $g'(y) = \sqrt{1 - x^2}$ e, portanto:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ para } -1 < x < 1.$$

Resumindo:

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ para } -1 < x < 1.$$

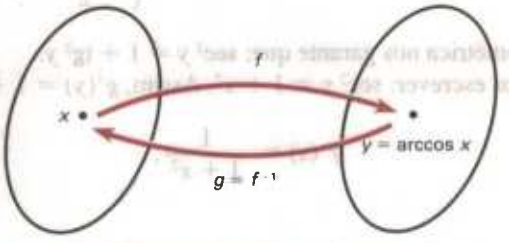
2.2. Derivada da função arco-co-seno

A função:

$$f: [-1, 1] \to [0, \pi] \text{ tal que } f(x) = y = \arccos x$$

é denominada **função arco-co-seno**. Sua inversa é a função:

$$g: [0, \pi] \to [-1, 1] \text{ tal que } g(y) = \cos y.$$



Pelo teorema das derivadas de funções inversas, sabemos que: $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

Temos: $\begin{cases} g'(y) = -\text{sen } y \\ y = \arccos x \end{cases}$ e $y = \arccos x \Rightarrow \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$

Pela relação fundamental da trigonometria, isto é, $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, podemos escrever:

$$\text{sen}^2 y + x^2 = 1, \text{ ou seja, } \text{sen } y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Como $0 \leq y \leq \pi$, temos: $\text{sen } y = \sqrt{1 - x^2}$. Assim, $g'(y) = -\sqrt{1 - x^2}$ e, portanto:

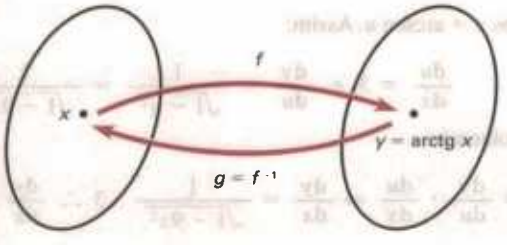
$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ para } -1 < x < 1.$$

Resumindo:

$$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ para } -1 < x < 1.$$

2.3. Derivada da função arco-tangente

A função $f: \mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tal que $f(x) = y = \text{arctg } x$ é denominada **função arco-tangente**. Sua inversa é a função $g: \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ tal que $g(y) = \text{tg } y$.



Pelo teorema das derivadas de funções inversas, sabemos que: $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

Temos:

$$\begin{cases} g'(y) = \sec^2 y \\ y = \operatorname{arctg} x \end{cases} \quad \text{e} \quad y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} y = x \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Uma identidade trigonométrica nos garante que: $\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$.
Como $\operatorname{tg} y = x$, podemos escrever: $\sec^2 y = 1 + x^2$. Assim, $g'(y) = 1 + x^2$ e, portanto:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Resumindo:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Exercícios resolvidos

R.3 Determinar a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $y = x^2 + \operatorname{arcsen} x$; b) $y = x \arccos x$; c) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Resolução

a) Pela regra da derivada da soma, temos: $y' = u'(x) + v'(x) \Rightarrow y' = 2x + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

b) Pela regra da derivada do produto, temos:

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \Rightarrow y' = 1 \arccos x + x\left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$$

$$\therefore y' = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

c) Pela regra da derivada do quociente, temos:

$$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \Rightarrow y' = \frac{\dfrac{1}{1 + x^2} \cdot x - (\operatorname{arctg} x) \cdot 1}{x^2}$$

$$\therefore y' = \frac{x - (1 + x^2) \operatorname{arctg} x}{x^2 (1 + x^2)}.$$

R.4 Obter a derivada da função $y = \operatorname{arcsen} 3x$.

Resolução

Fazendo $u = 3x$, temos $y = \operatorname{arcsen} u$. Assim:

$$\frac{du}{dx} = 3 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}}.$$

Pela regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}} \cdot 3 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}.$$

R.5 Determinar a derivada da função $y = \arccos(2x^3 + x)$.

Resolução

Fazendo $u = 2x^3 + x$, temos $y = \arccos u$. Assim:

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (2x^3 + x)^2}}.$$

Pela regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (2x^3 + x)^2}} (6x^2 + 1) \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2 + 1}{\sqrt{1 - (2x^3 + x)^2}}.$$

R.6 Seja a função $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Calcular $f'(1)$.

Resolução

Pela regra da derivada do produto, temos:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \Rightarrow f'(x) = 1 \operatorname{arctg} x + x \cdot \frac{1}{1 + x^2} \therefore f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2}.$$

Logo, $f'(1) = \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1 + 1^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi + 2}{4}$.

R.7 Encontrar a equação da reta t tangente ao gráfico da função $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ no ponto de abscissa $x = 0$.

Resolução

Temos que $f(0) = \operatorname{arcsen} 0 = 0$. Assim, o ponto de tangência é $(0, 0)$.

O coeficiente angular da reta t é $f'(0)$.

Como $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, temos que $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0^2}} = 1$.

Pela equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$, obtemos a equação da reta t:

$$y - 0 = 1(x - 0), \text{ ou seja, } y = x.$$

3. Derivação implícita

Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que: $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$.

Substituindo $f(x)$ por y podemos escrever:

$$y = \frac{3}{x^2 + 1}, \quad \text{(I)}$$

ou, de forma equivalente:

$$yx^2 + y - 3 = 0. \quad \text{(II)}$$

A equação (I), por apresentar a variável y isolada em um dos membros, é denominada "forma **explícita** da função f". A equação (II), por não apresentar a variável y isolada, é chamada de "forma **implícita** da função f".

Já aprendemos como derivar uma função na forma explícita. Vamos estudar agora a derivação na forma implícita.

• Pela regra da derivada do quociente temos que y', em (I), é:

$$y' = \frac{0(x^2 + 1) - 3(2x + 0)}{(x^2 + 1)^2} \therefore y' = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^2}.$$

• Pelas regras da derivada do produto e da soma, podemos obter y', através de (II), do seguinte modo:

$$\underbrace{y'x^2 + y \cdot 2x}_{\substack{\text{Derivada do} \\ \text{produto } yx^2}} + y' - 0 = 0 \therefore y'(x^2 + 1) = -y \cdot 2x$$

$$\therefore y' = -\frac{y \cdot 2x}{x^2 + 1}.$$

Substituindo y por $\frac{3}{x^2 + 1}$, obtemos: $y' = -\frac{\frac{3}{x^2 + 1} \cdot 2x}{x^2 + 1} \therefore y' = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$.

Note portanto que, derivando a função f na forma explícita ou na forma implícita, se chega ao mesmo resultado.

Qual é a vantagem da derivação implícita, se ela nos parece mais trabalhosa do que a forma explícita?

A grande vantagem está no fato de que, quando uma função derivável nos é dada na forma implícita, sendo difícil ou até impossível colocá-la na forma explícita, mesmo assim é possível determinar sua derivada.

Exercícios resolvidos

R.8 A função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, com $y = f(x)$ é dada na forma implícita: $2y - xy = 3$. Obter y'.

Resolução

Derivando, em relação a x, ambos os membros da igualdade: $2y - xy = 3$, obtemos:

$$2y' - \underbrace{(1 \cdot y + xy')}_{\substack{\text{Derivada do} \\ \text{produto } xy}} = 0 \therefore 2y' - y - xy' = 0 \therefore y'(2 - x) = y \therefore y' = \frac{y}{2 - x}.$$

A resposta pode ser dada simplesmente por $y' = \frac{y}{2 - x}$, ou, ainda, se for possível, podemos escrever y' em função apenas de x. Neste caso, é possível. Observe:

$$2y - xy = 3 \Rightarrow y(2 - x) = 3 \therefore y = \frac{3}{2 - x}.$$

Assim:

$$y' = \frac{y}{2 - x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{3}{2 - x}}{2 - x} \therefore y' = \frac{3}{(2 - x)^2}.$$

R.9 A função $f: [-3, 3] \to \mathbb{R}_+$, com $y = f(x)$, é dada na forma implícita $x^2 + y^2 = 9$. Determinar y'.

Resolução

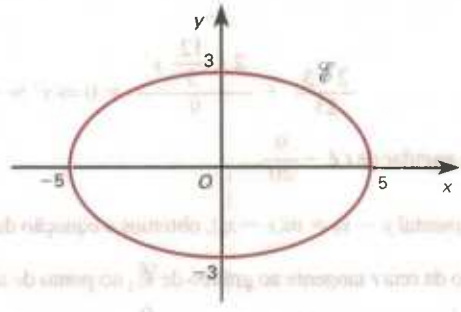
Derivando ambos os membros em relação a x, obtemos:

$$2x + 2yy' = 0 \therefore y' = -\frac{2x}{2y} \therefore y' = -\frac{x}{y}.$$

Nota: não perca de vista que y é função de x; por isso, para derivar y^2 em relação a x, aplicamos a regra da cadeia, isto é, $2yy'$.

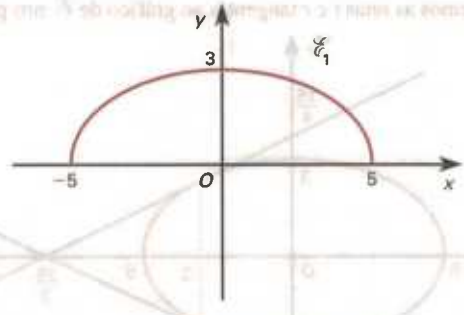
R.10 Seja a elipse $\mathscr{E}$ de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Obter as equações das retas tangentes a $\mathscr{E}$ nos pontos de abscissa 3.

Resolução
O gráfico de $\mathscr{C}$ é:

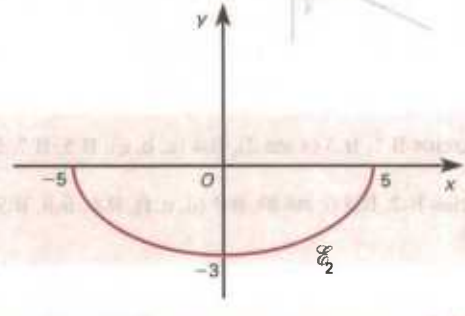


Portanto, $\mathscr{C}$ não é função. Porém, podemos considerar duas funções:

I. $\mathscr{C}_1$: $[-5, 5] \to \mathbb{R}_+$, $\mathscr{C}_1(x) = y$, tal que $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$:



II. $\mathscr{C}_2$: $[-5, 5] \to \mathbb{R}_-$, $\mathscr{C}_2(x) = y$, tal que $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$:



Para obter a reta t tangente ao gráfico de $\mathscr{C}_1$ no ponto de abscissa 3, necessitamos do ponto de tangência e do coeficiente angular de t.

- $x = 3 \Rightarrow \frac{3^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \therefore y = \pm\frac{12}{5}$.

  Como $\mathscr{C}_1$: $[-5, 5] \to \mathbb{R}_+$, concluímos que $y = \frac{12}{5}$. Assim, o ponto de tangência é $\left(3, \frac{12}{5}\right)$.

- O coeficiente angular de t é $\mathscr{C}_1'(3)$.

  Derivando, em relação a x, os dois membros da igualdade $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, obtemos:

$$\frac{2x}{25} + \frac{2yy'}{9} = 0.$$

Como o ponto de tangência é $\left(3, \frac{12}{5}\right)$, substituímos, nessa igualdade, $x = 3$ e $y = \frac{12}{5}$ para obter $\mathscr{C}_1'(3)$:

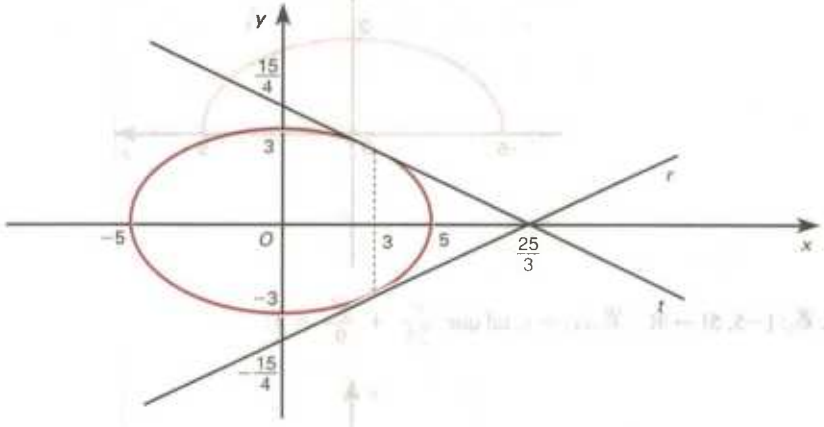
$$\frac{2 \cdot 3}{25} + \frac{2 \cdot \frac{12}{5} y'}{9} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{9}{20}.$$

Logo, o coeficiente angular de t é $-\frac{9}{20}$.

Pela equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$, obtemos a equação da reta t: $y - \frac{12}{5} = -\frac{9}{20}(x - 3)$.

Para obter a equação da reta r tangente ao gráfico de $\mathscr{C}_2$ no ponto de abscissa 3, agimos de maneira análoga, obtendo $\left(3, -\frac{12}{5}\right)$ como ponto de tangência e $\frac{9}{20}$ como coeficiente angular de r. Assim, a equação de r é: $y + \frac{12}{5} = \frac{9}{20}(x - 3)$.

Desse modo, obtivemos as retas t e r tangentes ao gráfico de $\mathscr{C}$ nos pontos de abscissa 3:



Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1, B.3 (a até d), B.4 (a, b, c), B.5, B.7, B.9 (a até e), B.10, C.4 (a, b), C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.2, B.3 (e até h), B.4 (d, e, f), B.6, B.8, B.9 (f até j), B.11, C.1, C.2, C.3, C.4 (c, d), C.6.

Exercícios básicos

B.1 Dada a função $f(x) = 5x^3$, cuja inversa é g, calcule $g'(40)$.

B.2 Sendo a função $f(x) = x^5 + 8$, cuja inversa é g, calcule $g'(9)$.

B.3 Obtenha a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $y = 3x^4 + \operatorname{arcsen} x$;

b) $y = x^2 \arccos x$;

c) $y = \frac{3 \operatorname{arctg} x}{x^4}$;

d) $y = (\operatorname{arcsen} x)^3$;

e) $y = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$;

f) $y = x^3 \operatorname{arctg} x$;

g) $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$;

h) $y = (\arccos x)^2$.

B.4 Determine a derivada de:

a) $y = \text{arcsen } 7x$;

b) $y = \arccos x^2$;

c) $y = \text{arctg } \dfrac{2+x}{x}$;

d) $y = \dfrac{3 \text{ arcsen } 5x}{4}$;

e) $y = \arccos \dfrac{x^3}{5}$;

f) $y = \sqrt{2} \text{ arctg } \dfrac{x}{x+1}$.

B.5 Sendo $f(x) = \dfrac{\text{arctg } x}{x^2}$, calcule $f'(-1)$.

B.6 Dada a função $f(x) = (\arccos x)^2$, calcule $f'(0)$.

B.7 Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \text{arctg } x$ no ponto de abscissa $x = 1$.

B.8 Sendo $f(x) = \arccos x$, obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 0$.

B.9 A seguir são dadas funções f, com $y = f(x)$, na forma implícita. Calcule, em cada caso, a derivada y':

a) $f: \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ tal que $5y + 2xy = 6$;

b) $f: [-2, 2] \to \mathbb{R}_+$ tal que $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

c) $f:]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[\to \mathbb{R}_-$ tal que $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{4} = 1$;

d) $f: [5, +\infty[\to [1, +\infty[$ tal que $y^2 - 2y = 4x - 21$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y^3 + 6y^2 + 12y = x - 8$;

f) $f: \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{3y}{2} - x^2 = xy + 2$;

g) $f: [-3, 3] \to \mathbb{R}_+$ tal que $x^2 + (y-1)^2 = 9$;

h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $\dfrac{y^2}{16} - x^2 = 1$;

i) $f:]-\infty, -1] \to [3, +\infty[$ tal que $y^2 - 6y + 6x + 15 = 0$;

j) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $8y^3 - 12y^2 + 6y = 3x + 1$.

B.10 Considere a hipérbole $\mathcal{H}$ de equação $x^2 - \dfrac{y^2}{16} = 1$. Obtenha as equações das retas tangentes a $\mathcal{H}$ nos pontos de abscissa $x = 3$.

B.11 Considere a parábola $\mathcal{P}$ de equação $y^2 - 6y = 2x - 17$. Obtenha as equações das retas tangentes a $\mathcal{P}$ nos pontos de abscissa $x = 12$.

Exercícios complementares

C.1 Dada a função $f: \mathbb{R}_+^* \to]-4, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 - 4$, cuja inversa é g, calcule $g'(-3)$.

C.2 Dada a função $f: [\sqrt{2}, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^3 - 2x$, cuja inversa é g, calcule $g'(4)$.

C.3 Seja f uma função invertível tal que $f(5) = 8$ e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 5 é igual a $\dfrac{3}{4}$. Qual é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f^{-1} no ponto $(8, 5)$?

C.4 Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $y = (\text{arcsen } x^3)^4$; **sugestão:** $u = x^3$; $v = \text{arcsen } u$; $y = v^4$; $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$;

b) $y = [2 \text{ arccos } (3x^2 - 2x)]^{-4}$;

c) $y = (\text{arcsen } \ell n\, x)^3$;

d) $y = \sqrt[3]{\text{arctg } x^2}$.

C.5 Seja a função $f: A \to B$, com $f(x) = y$, cuja forma implícita é $y = \cos(x + y)$. Obtenha y'.

C.6 Seja a função $f: A \to B$, com $f(x) = y$, cuja forma implícita é $x^y = y^x$, com $x > 0$ e $y > 0$. Obtenha y'.

Questões dos vestibulares

V.1 (E. E. Lins-SP) A derivada da função $y = \text{arctg } \sqrt{x}$ é:

a) $\frac{1}{1 + x^2}$.

b) $\frac{1}{(1 + x)\sqrt{x}}$.

c) $2x$.

d) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$.

e) nenhuma das respostas anteriores.

V.2 (PUC-SP) A derivada primeira da função $y = \text{arctg } \frac{1 - \cos x}{\text{sen } x}$ é:

a) $\cos x + \text{sen } x$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\text{sen } x - \cos x$.

d) $\cos 2x$.

e) $\frac{1}{2}$.

V.3 (UFRS) A função $f: [-4, 4] \to \mathbb{R}_+$, com $y = f(x)$, é tal que $x^2 + y^2 = 16$. A derivada de f no ponto de abscissa $x = 2$ é:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. b) $-2\sqrt{3}$. c) $\frac{1}{2}$. d) 2. e) $-\frac{1}{2}$.

V.4 (PUC-SP) A equação da reta tangente à hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$ no ponto $P(\sqrt{2}, 1)$ é:

a) $y = \sqrt{2}x$.

b) $y = \sqrt{2}x + 1$.

c) $y = -\sqrt{2}x - 1$.

d) $y = -\sqrt{2}x + 1$.

e) $y = \sqrt{2}x - 1$.

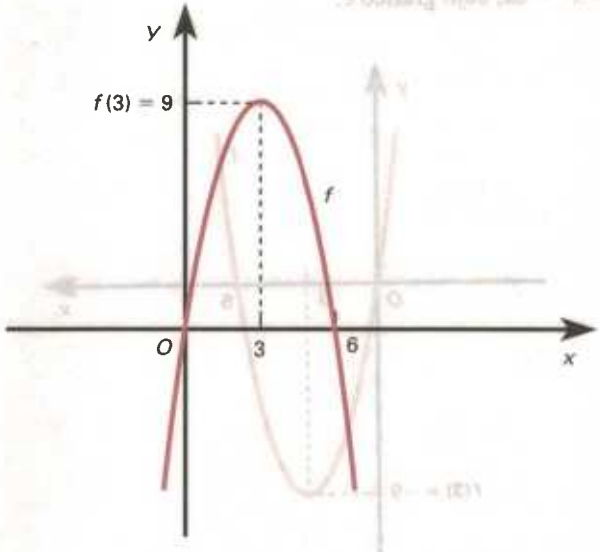
Capítulo 34

Estudo da variação de uma função através de sua derivada

1. Máximos e mínimos de uma função

1.1. Máximo absoluto

Seja a função $f(x) = -x^2 + 6x$, cujo gráfico é:



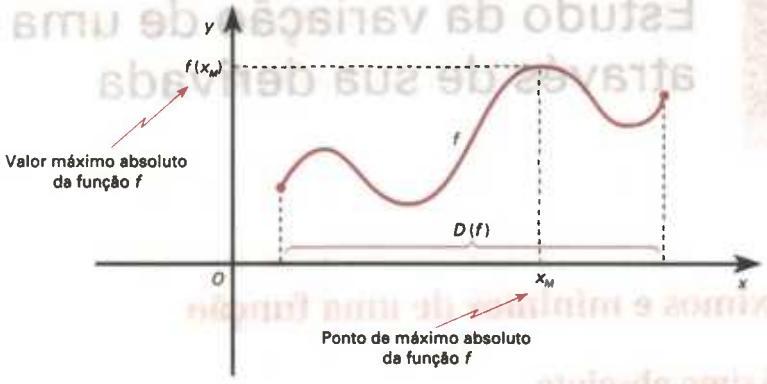
Note que $f(3) \geqslant f(x)$, $\forall x, x \in D(f)$. Por isso dizemos que:

- $f(3) = 9$ é o **valor máximo absoluto** da função f;
- 3 é o **ponto de máximo absoluto** da função f.

Definição

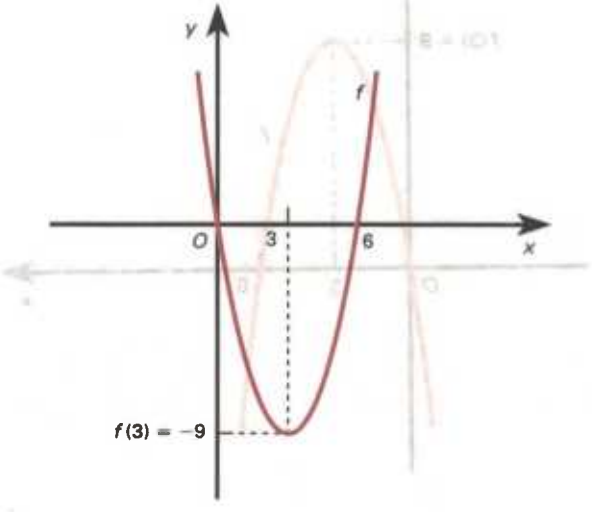
Seja f uma função real de variável real. A função f admite **valor máximo absoluto** se, e somente se, existe x_M, $x_M \in D(f)$, tal que: $f(x_M) \geqslant f(x)$, $\forall x, x \in D(f)$.
O número $f(x_M)$ é chamado de **valor máximo absoluto da função** f.
O número x_M é chamado de **ponto de máximo absoluto da função** f.

Graficamente, temos:



1.2. Mínimo absoluto

Seja a função $f(x) = x^2 - 6x$, cujo gráfico é:



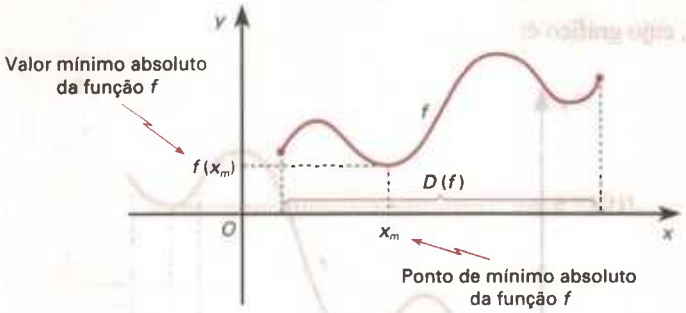
Note que $f(3) \leq f(x)$, $\forall x, x \in D(f)$. Por isso dizemos que:

- $f(3) = -9$ é o **valor mínimo absoluto** da função f;
- 3 é o **ponto de mínimo absoluto** da função f.

Definição

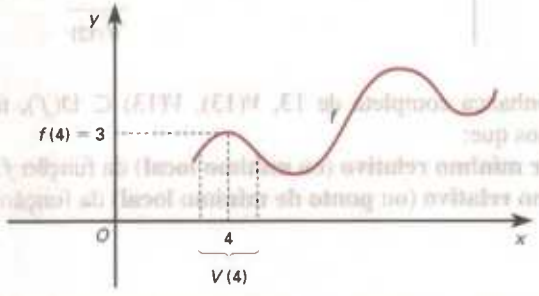
Seja f uma função real de variável real. A função f admite **valor mínimo absoluto** se, e somente se, existe x_m, $x_m \in D(f)$, tal que: $f(x_m) \leq f(x)$, $\forall x, x \in D(f)$.
O número $f(x_m)$ é chamado de **valor mínimo absoluto da função** f.
O número x_m é chamado de **ponto de mínimo absoluto da função** f.

Graficamente, temos:



1.3. Máximo relativo

Seja a função f, cujo gráfico é:



Note que existe uma vizinhança completa de 4, $V(4)$, $V(4) \subset D(f)$, tal que: $f(4) \geq f(x)$, $\forall x, x \in V(4)$. Por isso dizemos que:

- $f(4) = 3$ é um **valor máximo relativo** (ou **máximo local**) da função f;
- 4 é um **ponto de máximo relativo** (ou **ponto de máximo local**) da função f.

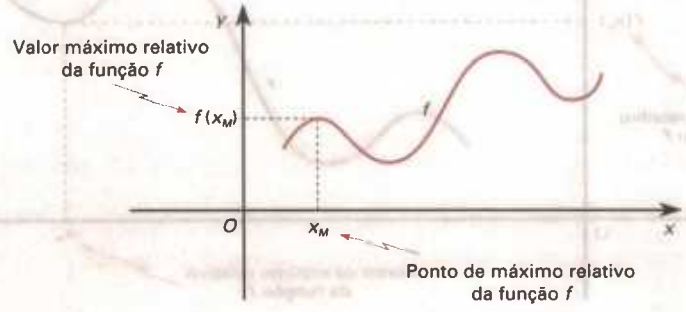
Definição

Seja f uma função real de variável real. A função f admite **valor máximo relativo** (ou **valor máximo local**) se, e somente se, para algum número x_M, existe uma vizinhança completa de x_M, $V(x_M)$, $V(x_M) \subset D(f)$, tal que: $f(x_M) \geq f(x)$, $\forall x, x \in V(x_M)$.

O número $f(x_M)$ é chamado de **valor máximo relativo** (ou **valor máximo local**) **da função** f.

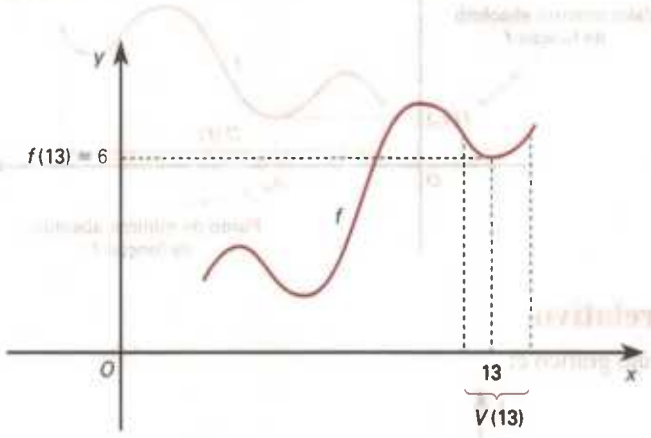
O número x_M é chamado de **ponto de máximo relativo** (ou **ponto de máximo local**) **da função** f.

Graficamente, tem-se:



1.4. Mínimo relativo

Seja a função f, cujo gráfico é:



Note que existe uma vizinhança completa de 13, $V(13)$, $V(13) \subset D(f)$, tal que: $f(13) \leq f(x)$, $\forall x$, $x \in V(13)$. Por isso dizemos que:

- $f(13) = 6$ é um **valor mínimo relativo** (ou **mínimo local**) da função f;
- 13 é **ponto de mínimo relativo** (ou **ponto de mínimo local**) da função f.

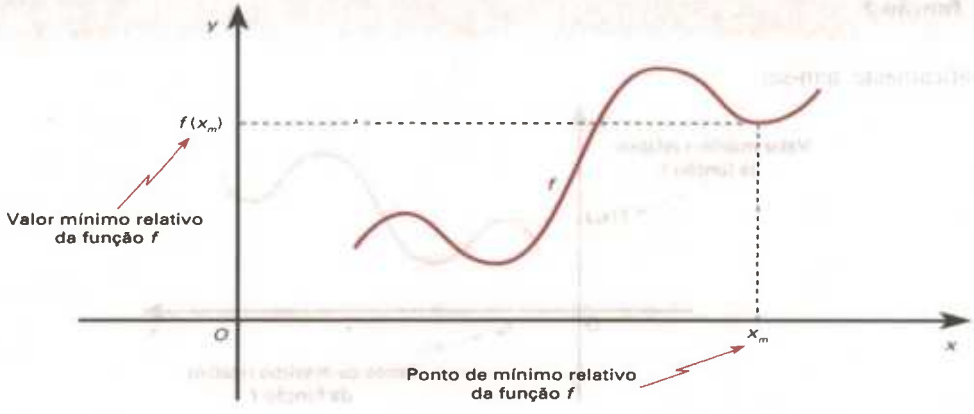
Definição

Seja f uma função real de variável real. A função f admite **valor mínimo relativo** (ou **valor mínimo local**) se, e somente se, para algum número x_m, existe uma vizinhança completa de x_m, $V(x_m)$, $V(x_m) \subset D(f)$, tal que: $f(x_m) \leq f(x)$, $\forall x$, $x \in V(x_m)$.

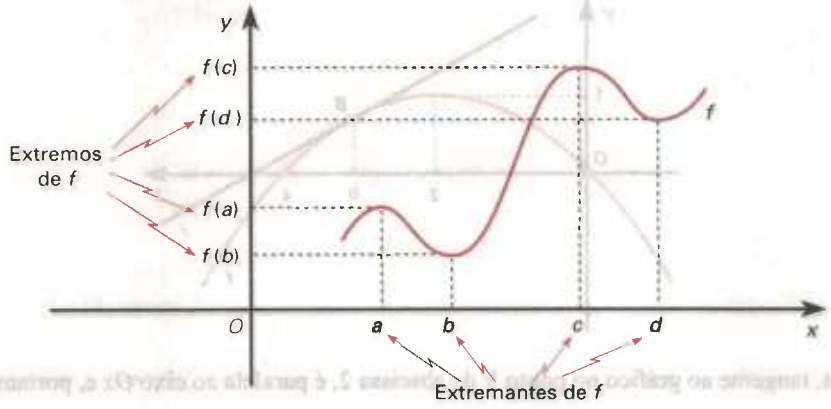
O número $f(x_m)$ é chamado de **valor mínimo relativo** (ou **valor mínimo local**) **da função** f.

O número x_m é chamado de **ponto de mínimo relativo** (ou **ponto de mínimo local**) **da função** f.

Graficamente, tem-se:

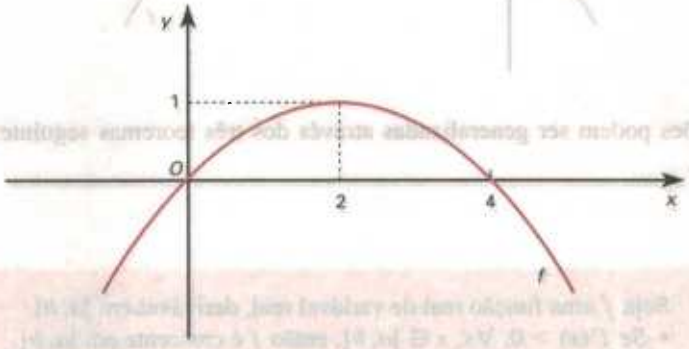


Nota: se a é ponto de mínimo ou de máximo (absoluto ou local) de uma função f, então o número a é chamado de **extremante de f**, e o valor mínimo ou máximo $f(a)$ é chamado de **extremo de f**.

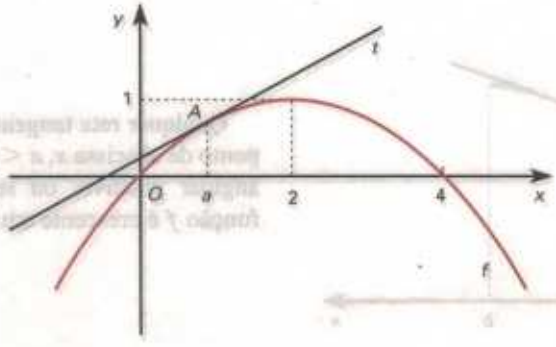


2. Relação entre o sinal da derivada e a variação de uma função f

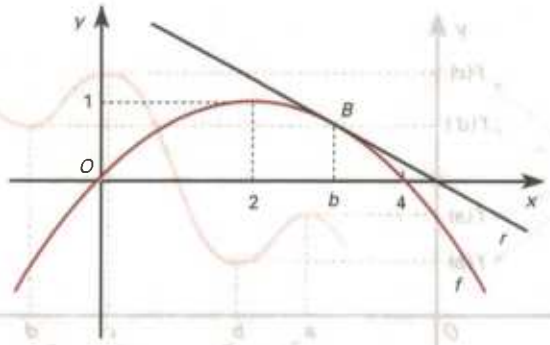
Consideremos a função $f(x) = -\frac{x^2}{4} + x$, cujo gráfico é:



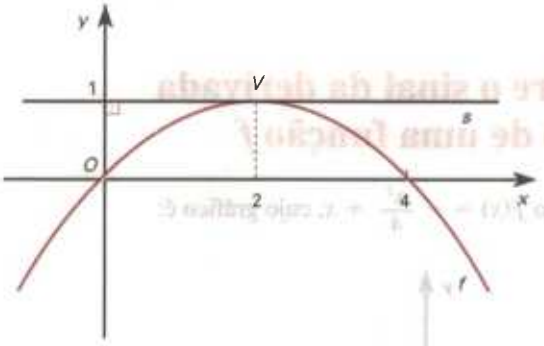
• Para qualquer ponto A de f com abscissa a, $a < 2$, a reta t tangente ao gráfico em A, possui coeficiente angular positivo. Ou seja, $f'(a) > 0$:



• Para qualquer ponto B de f com abscissa b, $b > 2$, a reta r tangente ao gráfico em B possui coeficiente angular negativo. Ou seja, $f'(b) < 0$:



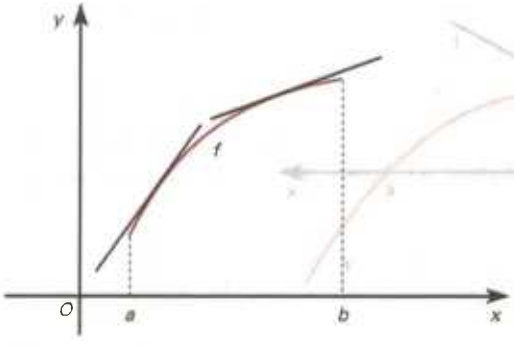
• A reta s, tangente ao gráfico no ponto V de abscissa 2, é paralela ao eixo Ox e, portanto, $f'(2) = 0$:



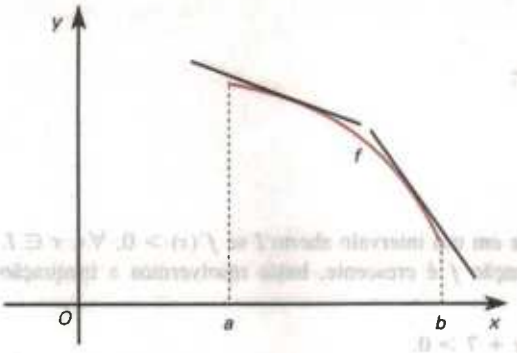
Essas observações podem ser generalizadas através dos três teoremas seguintes, que admitiremos sem demonstração.

Teorema 1

Seja f uma função real de variável real, derivável em $]a, b[$.
• Se $f'(x) > 0$, $\forall x, x \in]a, b[$, então f é crescente em $]a, b[$.
• Se $f'(x) < 0$, $\forall x, x \in]a, b[$, então f é decrescente em $]a, b[$.



Qualquer reta tangente ao gráfico de f em um ponto de abscissa x, $a < x < b$, possui coeficiente angular positivo, ou seja, $f'(x) > 0$. Logo, a função f é crescente em $]a, b[$.

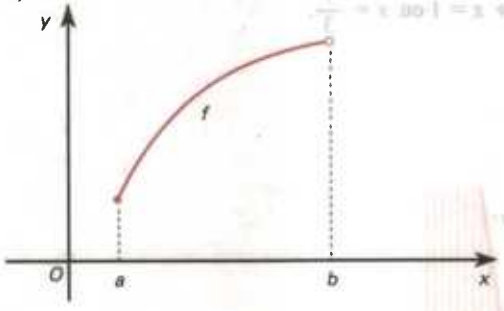


Qualquer reta tangente ao gráfico de f em um ponto de abscissa x, $a < x < b$, possui coeficiente angular negativo, ou seja, $f'(x) < 0$. Logo, a função f é decrescente em $]a, b[$.

Nota: se nesse teorema a função f, além de derivável em $]a, b[$, é contínua em um dos extremos a ou b, então acrescentamos esse extremo ao intervalo $]a, b[$, onde f é crescente ou decrescente.

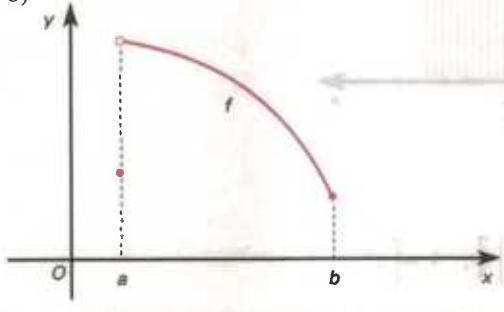
Exemplos

a)



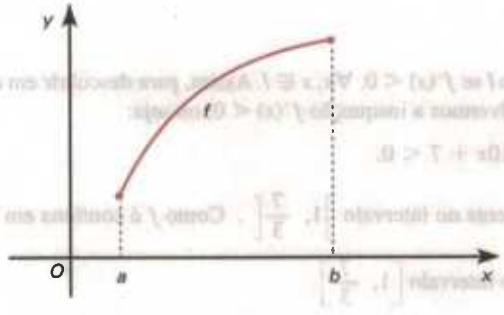
$f'(x) > 0$, $\forall x, x \in]a, b[$, e f é contínua em a e não está definida em b. Por isso, dizemos que f é crescente em $[a, b[$.

b)



$f'(x) < 0$, $\forall x, x \in]a, b[$, e f é descontínua em a e contínua em b. Por isso, dizemos que f é decrescente em $]a, b]$.

c)



$f'(x) > 0$, $\forall x, x \in]a, b[$, e f é contínua em a e em b. Por isso, dizemos que f é crescente em $[a, b]$.

Exercício resolvido

R.1 Seja a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 8$. Determinar:

a) o(s) intervalo(s) em que f é crescente;

b) o(s) intervalo(s) em que f é decrescente.

Resolução

Temos que $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$.

a) Note que f é derivável em $\mathbb{R}$; logo, f é crescente em um intervalo aberto I se $f'(x) > 0$, $\forall x, x \in I$. Assim, para descobrir em que intervalo(s) a função f é crescente, basta resolvermos a inequação $f'(x) > 0$, ou seja:

$$3x^2 - 10x + 7 > 0.$$

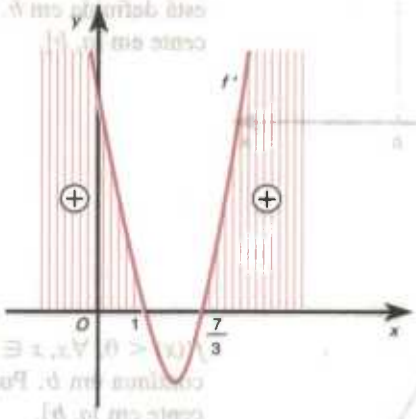
- Raízes de f'

$$3x^2 - 10x + 7 = 0$$

$$\therefore \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 16$$

$$\therefore x = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{6} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{7}{3}.$$

- Gráfico de f'



Assim, f é crescente nos intervalos $]-\infty, 1[$ e $\left]\frac{7}{3}, +\infty\right[$.

Como f é contínua em 1 e em $\frac{7}{3}$, podemos dizer que ela é crescente nos intervalos $]-\infty, 1]$ e $\left[\frac{7}{3}, +\infty\right[$.

b) A função f é decrescente em um intervalo aberto I se $f'(x) < 0$, $\forall x, x \in I$. Assim, para descobrir em que intervalo(s) a função f é decrescente, basta resolvermos a inequação $f'(x) < 0$, ou seja:

$$3x^2 - 10x + 7 < 0.$$

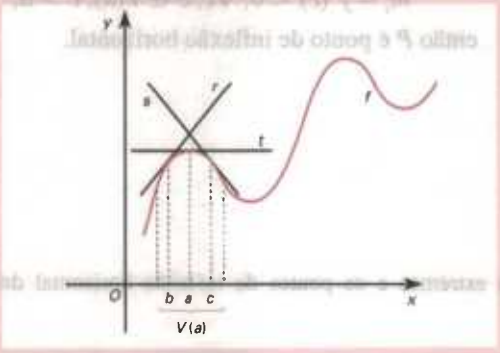
Pelo gráfico de f', percebemos que f é decrescente no intervalo $\left]1, \frac{7}{3}\right[$. Como f é contínua em 1 e em $\frac{7}{3}$, podemos dizer que ela é decrescente no intervalo $\left[1, \frac{7}{3}\right]$.

Teorema 2

Seja f uma função real de variável real, derivável em uma vizinhança completa de a, $V(a)$.

- Se $f'(a) = 0$, com: $\begin{cases} f'(x) > 0, \text{ para todo } x,\ x \in V(a) \text{ e } x < a \\ f'(x) < 0, \text{ para todo } x,\ x \in V(a) \text{ e } x > a, \end{cases}$

então a é ponto de máximo relativo de f, e $f(a)$ é valor máximo relativo de f.

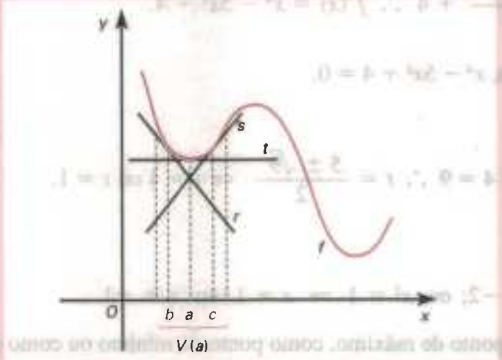


$m_r = f'(b) > 0,$
$m_t = f'(a) = 0$
e
$m_s = f'(c) < 0,$

em que m_r, m_s e m_t são, respectivamente, os coeficientes angulares das retas r, s e t.

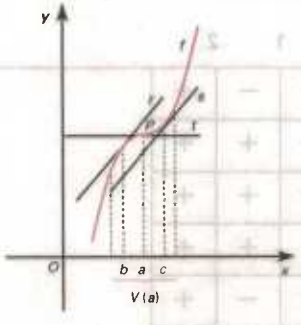
- Se $f'(a) = 0$, com $\begin{cases} f'(x) < 0, \text{ para todo } x,\ x \in V(a) \text{ e } x < a \\ f'(x) > 0, \text{ para todo } x,\ x \in V(a) \text{ e } x > a, \end{cases}$

então a é ponto de mínimo relativo de f, e $f(a)$ é valor mínimo relativo de f.

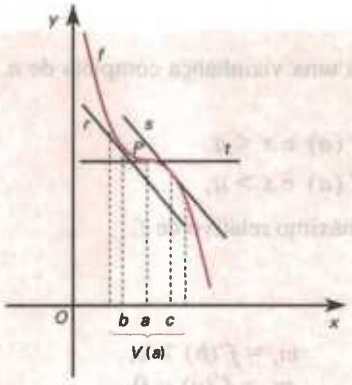


$m_r = f'(b) < 0,$
$m_t = f'(a) = 0$
e
$m_s = f'(c) > 0.$

Nota: se tivermos $f'(a) = 0$ e, para alguma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, $f'(x)$ não mudar de sinal, $\forall x,\ x \in \overline{V}(a)$, então o ponto $P(a, f(a))$ é chamado de **ponto de inflexão horizontal de f**.



Se temos:
$m_r = f'(b) > 0,\ \forall b,\ b \in \overline{V}(a),\ b < a,$
$m_t = f'(a) = 0$
e
$m_s = f'(c) > 0,\ \forall c,\ c \in \overline{V}(a),\ c > a,$
então P é ponto de inflexão horizontal.



Se temos:

$m_r = f'(b) < 0, \forall b, b \in \overline{V}(a), b < a,$

$m_t = f'(a) = 0$

e

$m_s = f'(c) < 0, \forall c, c \in \overline{V}(a), c > a,$

então P é ponto de inflexão horizontal.

Exercícios resolvidos

R.2 Determinar, se existirem, os extremantes, os extremos e os pontos de inflexão horizontal da função $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x$.

Resolução

A função f é derivável em $\mathbb{R}$.

Logo, se f tiver máximo, mínimo ou ponto de inflexão horizontal para alguma abscissa x_0, então $f'(x_0) = 0$.

Temos que:

$$f'(x) = \frac{5x^4}{5} - \frac{5 \cdot 3x^2}{3} + 4 \therefore f'(x) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Devemos resolver a equação $f'(x) = 0$, ou seja, $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Fazendo $x^2 = t$, obtemos:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \therefore \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 \therefore t = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow t = 4 \text{ ou } t = 1.$$

Retornando à variável original, temos:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2; \text{ ou } x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Para classificar cada uma dessas raízes como ponto de máximo, como ponto de mínimo ou como abscissa de um ponto de inflexão horizontal, devemos estudar a variação de sinal de $f'(x)$.

Podemos escrever: $f'(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$.

Estudando o sinal de f', temos:

	-2	-1	1	2
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f'(x) > 0, \text{ para } x < -2 \\ f'(x) < 0, \text{ para } -2 < x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \text{ é ponto de máximo relativo de } f; \\ \text{e } f(-2) = \dfrac{(-2)^5}{5} - \dfrac{5(-2)^3}{3} + 4(-2) = -\dfrac{16}{15} \\ \text{é valor máximo relativo de } f; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } -2 < x < -1 \\ f'(x) > 0, \text{ para } -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \text{ é ponto de mínimo relativo de } f; \\ \text{e } f(-1) = \dfrac{(-1)^5}{5} - \dfrac{5(-1)^3}{3} + 4(-1) = -\dfrac{38}{15} \\ \text{é valor mínimo relativo de } f; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(x) > 0, \text{ para } -1 < x < 1 \\ f'(x) < 0, \text{ para } 1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \text{ é ponto de máximo relativo de } f; \\ \text{e } f(1) = \dfrac{1^5}{5} - \dfrac{5 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1 = \dfrac{38}{15} \\ \text{é valor máximo relativo de } f; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(2) = 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } 1 < x < 2 \\ f'(x) > 0, \text{ para } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ é ponto de mínimo relativo de } f; \\ \text{e } f(2) = \dfrac{2^5}{5} - \dfrac{5 \cdot 2^3}{3} + 4 \cdot 2 = \dfrac{16}{15} \\ \text{é valor de mínimo relativo de } f. \end{cases}$$

Note que o gráfico de f não tem ponto de inflexão.

R.3 Determinar, se existirem, os extremantes, os extremos e os pontos de inflexão horizontal da função $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$.

Resolução

A função f é derivável em $\mathbb{R}$. Logo, se f tiver máximo, mínimo ou ponto de inflexão horizontal para alguma abscissa x_0, então $f'(x_0) = 0$.

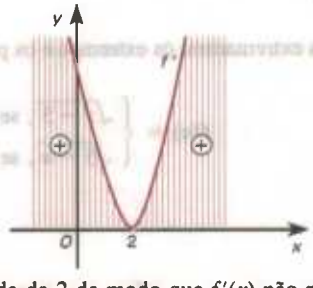
Temos: $f'(x) = \dfrac{3x^2}{3} - 2 \cdot 2x + 4 \therefore f'(x) = x^2 - 4x + 4$.

Devemos resolver a equação $f'(x) = 0$, ou seja:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow x = 2.$$

Para classificar essa raiz como ponto de máximo, como ponto de mínimo ou como abscissa de um ponto de inflexão horizontal, devemos estudar a variação de sinal de $f'(x)$.

- Gráfico de f'



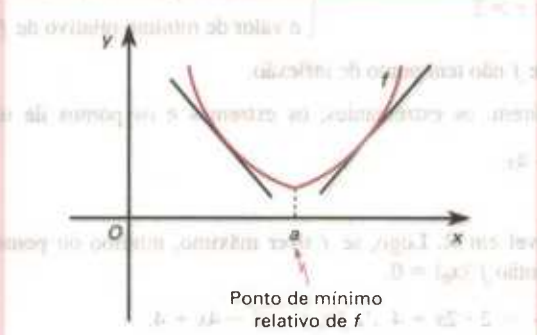
Note que existe vizinhança reduzida de 2 de modo que $f'(x)$ não muda de sinal para qualquer x dessa vizinhança. Por isso, concluímos que $(2, f(2))$, ou seja, $\left(2, \dfrac{8}{3}\right)$ é ponto de inflexão horizontal da função f. Note também que f não possui ponto de máximo nem de mínimo.

Teorema 3

Seja f uma função real de variável real, contínua em a e derivável em uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo x, $x \in \overline{V}(a)$ com $x < a$, e $f'(x) < 0$, para todo x, $x \in \overline{V}(a)$, com $x > a$, então a é ponto de máximo relativo de f.

- Se $f'(x) < 0$ para todo x, $x \in \overline{V}(a)$ com $x < a$, e $f'(x) > 0$, para todo x, $x \in \overline{V}(a)$, com $x > a$, então a é ponto de mínimo relativo de f.



Nota: a diferença entre esse teorema e o teorema 2 é que aquele exige que f seja derivável em a e esse só exige que f seja contínua em a e derivável em alguma vizinhança reduzida de a.

Exercício resolvido

R.4 Determinar, se existirem, os extremantes, os extremos e os pontos de inflexão horizontal da função:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5}\,, \text{ se } x \geqslant 5 \\ \sqrt{5-x}\,, \text{ se } x < 5. \end{cases}$$

Resolução

Podemos escrever:

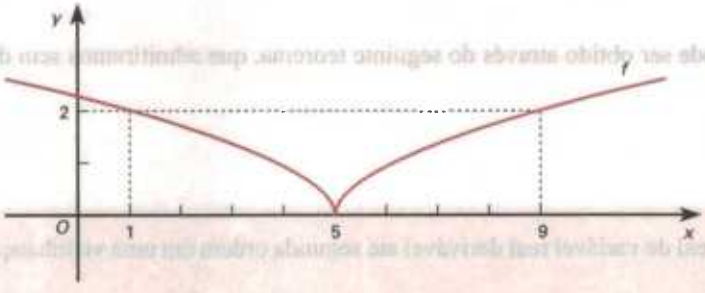
$$f(x) = \begin{cases} (x-5)^{\frac{1}{2}}\,, \text{ se } x \geqslant 5 \\ (5-x)^{\frac{1}{2}}\,, \text{ se } x < 5. \end{cases}$$

Temos que:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-5)^{\frac{1}{2}-1}, \text{ se } x > 5 & \text{(excluímos o 5 porque o expoente de } x-5 \text{ é negativo)} \\ \frac{1}{2}(5-x)^{\frac{1}{2}-1}(-1), \text{ se } x < 5 \end{cases}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-5)^{-\frac{1}{2}}, \text{ se } x > 5 \\ -\frac{1}{2}(5-x)^{-\frac{1}{2}}, \text{ se } x < 5 \end{cases} \qquad \therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x-5}}, \text{ se } x > 5 \\ -\frac{1}{2\sqrt{5-x}}, \text{ se } x < 5. \end{cases}$$

Note que $f'(x)$ nunca se anula. Isso significa que qualquer abscissa x, $x \neq 5$, não é ponto de mínimo, nem de máximo nem de um ponto de inflexão horizontal. Resta analisar o que ocorre para a abscissa $x = 5$. Observemos que, para $x < 5$, a derivada f' assume valores negativos; e, para $x > 5$, f' assume valores positivos. Por isso e pelo fato de f ser contínua em 5, concluímos, através do teorema 3, que 5 é ponto de mínimo local de f. Assim, $f(5) = \sqrt{5-5} = 0$ é um valor mínimo local de f. Graficamente, temos:



Note que 5 é ponto de mínimo absoluto de f, pois $f(5) \leq f(x)$, $\forall x, x \in D(f)$. Logo, $f(5) = 0$ é valor mínimo absoluto de f.

3. Concavidade

No estudo das funções do 2º grau, vimos intuitivamente o conceito de concavidade. Agora vamos estudar formalmente esse conceito.

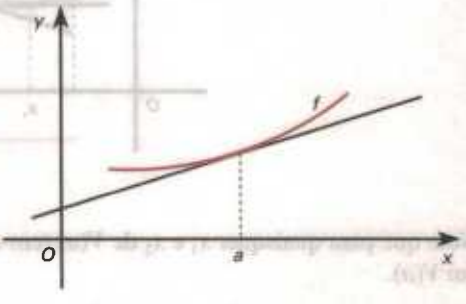
Definição

Seja f uma função real de variável real contínua no intervalo $[c, d]$ e derivável no ponto de abscissa a, $a \in]c, d[$. Seja $g(x) = mx + q$ a equação da reta t tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a.

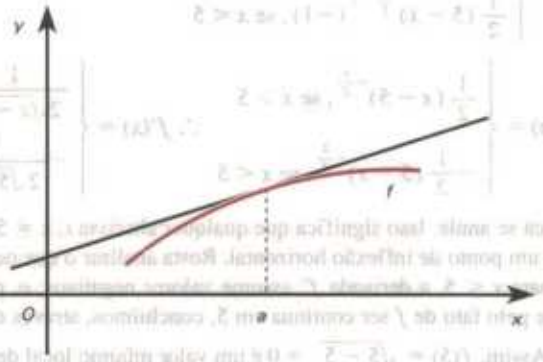
- A concavidade do gráfico de f é positiva em a se, e somente se, existe uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, tal que $f(x) > g(x)$, $\forall x, x \in \overline{V}(a)$.
- A concavidade do gráfico é negativa em a se, e somente se, existe uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, tal que $f(x) < g(x)$, $\forall x, x \in \overline{V}(a)$.

Em outras palavras, a definição nos diz que:

- a concavidade de f é positiva em a se, e somente se, existe uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, de modo que todo ponto do gráfico de f, com abscissa x, $x \in \overline{V}(a)$, se localiza "acima" da reta tangente a esse gráfico no ponto $(a, f(a))$;



• a concavidade de f é negativa em a se, e somente se, existe uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$, de modo que todo ponto do gráfico de f, com abscissa x, $x \in \overline{V}(a)$, se localiza "abaixo" da reta tangente a esse gráfico no ponto $(a, f(a))$.



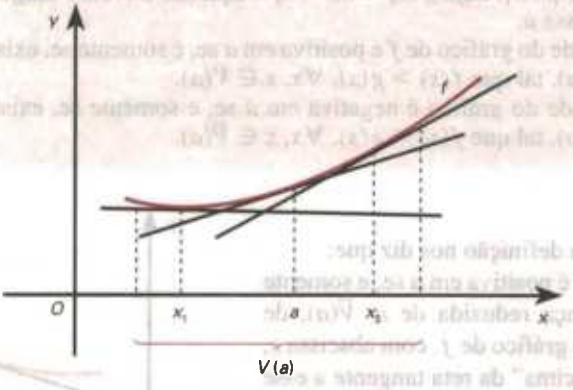
O sinal da concavidade pode ser obtido através do seguinte teorema, que admitiremos sem demonstração.

Teorema 4

Seja f uma função real de variável real derivável até segunda ordem em uma vizinhança completa de a.

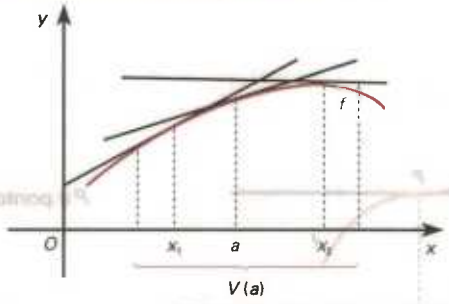
- Se $f''(a) > 0$, então o gráfico de f tem concavidade positiva em a.
- Se $f''(a) < 0$, então o gráfico de f tem concavidade negativa em a.

Para entender o porquê desse teorema, observe que, sendo $f''(x) > 0$, para todo x de uma vizinhança completa de a, $V(a)$, tem-se que $f'(x)$ é crescente em $V(a)$. Isso só pode acontecer quando a concavidade de f é positiva em a.



Note que para quaisquer x_1 e x_2 de $V(a)$ tem-se que: $x_2 > x_1 \Rightarrow f'(x_2) > f'(x_1)$, ou seja, f' é crescente em $V(a)$.

Sendo $f''(x) < 0$, para todo x de uma vizinhança $V(a)$, tem-se que $f'(x)$ é decrescente em $V(a)$. Isso só pode acontecer quando a concavidade de f é negativa em a.



Note que para quaisquer x_1 e x_2 de $V(a)$ tem-se que: $x_2 > x_1 \Rightarrow f'(x_2) < f'(x_1)$, ou seja, f' é decrescente em a.

Exercício resolvido

R.5 Seja a função $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + x^2$.

a) Obter o sinal da concavidade do gráfico de f para $x = 6$.

b) Obter o sinal da concavidade do gráfico de f para $x = \frac{3}{2}$.

Resolução

A derivada primeira de f é: $f'(x) = \frac{4x^3}{12} - \frac{3x^2}{2} + 2x \therefore f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$.

A derivada segunda de f é: $f''(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{3 \cdot 2x}{2} + 2 \therefore f''(x) = x^2 - 3x + 2$.

Pelo teorema 4, temos que o sinal da concavidade do gráfico de f para $x = a$ é o mesmo sinal de $f''(a)$.

a) $f''(6) = 6^2 - 3 \cdot 6 + 2 = 20 \Rightarrow f''(6) > 0$.

Logo, a concavidade do gráfico de f para $x = 6$ é positiva.

b) $f''\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow f''\left(\frac{3}{2}\right) < 0$.

Logo, a concavidade do gráfico de f para $x = \frac{3}{2}$ **é negativa.**

4. Ponto de inflexão

Vimos, na nota do teorema 2, o conceito de ponto de inflexão horizontal. Vamos agora dar a definição genérica de ponto de inflexão: horizontal, vertical ou oblíqua.

Definição

> Seja f uma função contínua em a e derivável em uma vizinhança reduzida de a, $\overline{V}(a)$.
> O ponto $(a, f(a))$ é ponto de inflexão do gráfico de f se, e somente se, para todo $\{x_1, x_2\} \subset \overline{V}(a)$, $x_1 < a$ e $x_2 > a$, tem-se que a concavidade do gráfico de f em x_1 e x_2 tem sinais contrários.

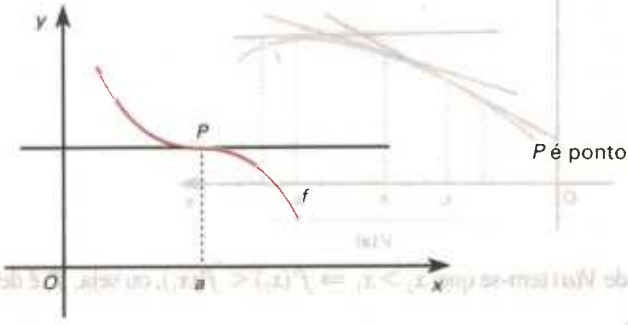
Em palavras mais simples, a definição nos diz que, ao passar pelo ponto de abscissa a, o gráfico de f inverte o sinal da concavidade.

Notas

1. Se uma função f, derivável em a, satisfaz essa definição e:
   - $f'(a) = 0$, então $(a, f(a))$ é chamado ponto de inflexão horizontal;
   - $f'(a) \neq 0$, então $(a, f(a))$ é chamado ponto de inflexão oblíqua.
2. Se uma função f, não derivável em a, satisfaz essa definição, então $(a, f(a))$ é chamado ponto de inflexão vertical.

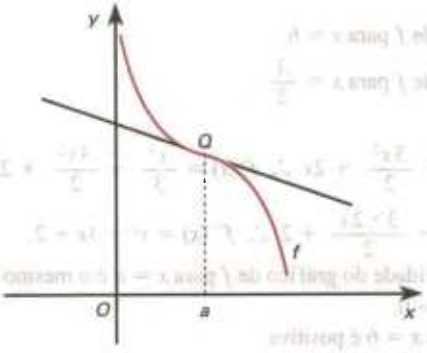
Exemplos

a)



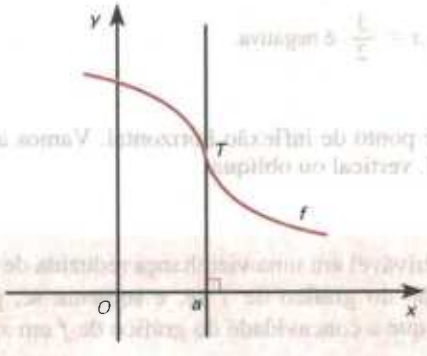
P é ponto de inflexão horizontal.

b)



Q é ponto de inflexão oblíqua.

c)



T é ponto de inflexão vertical.

Exercícios resolvidos

R.6 Determinar, se existirem, os pontos de inflexão do gráfico da função $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$.

Resolução

A função f é derivável em $\mathbb{R}$. Logo, não existem pontos de inflexão vertical.

Como f é derivável até a segunda ordem em $\mathbb{R}$, devemos, para determinar os pontos de inflexão, estudar o sinal de $f''(x)$.

Temos que:

$$f'(x) = \frac{4x^3}{12} - \frac{2 \cdot 3x^2}{3} + \frac{3 \cdot 2x}{2} \therefore f'(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$$

e

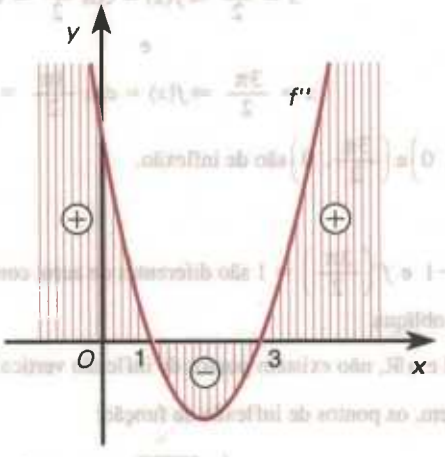
$$f''(x) = \frac{3x^2}{3} - 2 \cdot 2x + 3 \therefore f''(x) = x^2 - 4x + 3.$$

- Raízes de f''

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

$$\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1.$$

- Gráfico de f''



Pelo teorema 4, temos que o sinal da concavidade do gráfico de f em a é o mesmo sinal de $f''(a)$. Como f'' muda de sinal ao passar pelos pontos de abscissas 1 e 3, temos, pela definição, que esses números são abscissas dos pontos de inflexão de f.
Temos que:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^4}{12} - \frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} = \frac{11}{12}$$

e

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{3^4}{12} - \frac{2 \cdot 3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} = \frac{9}{4}.$$

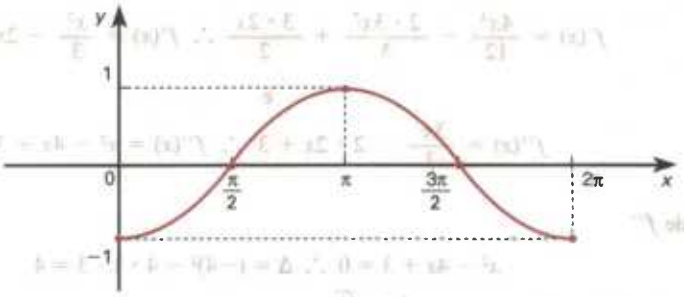
Logo, os pontos de inflexão de f são $\left(1, \frac{11}{12}\right)$ e $\left(3, \frac{9}{4}\right)$.

Nota: temos que $f'(1) = \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = \frac{4}{3}$ e $f'(3) = \frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 = 0$. Como $f'(1) \neq 0$ e $f'(3) = 0$, concluímos que $\left(1, \frac{11}{12}\right)$ e $\left(3, \frac{9}{4}\right)$ são pontos de inflexão oblíqua e horizontal, respectivamente.

R.7 Seja a função $f(x) = \cos x$. Obter, se existirem, seus pontos de inflexão para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Resolução
Temos: $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ e $f''(x) = -\cos x$.

O gráfico de f'' para $0 \leq x \leq 2\pi$ é:



Observe que f'' muda de sinal na passagem pelos pontos de abscissa $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Essas abscissas são pontos de inflexão de f.

Temos:

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

e

$$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0.$$

Logo, os pontos $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right)$ são de inflexão.

Notas

1. Como $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ e $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$ são diferentes de zero, concluímos que $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{2},\ 0\right)$ são pontos de inflexão oblíqua.

2. Como f é derivável em $\mathbb{R}$, não existem pontos de inflexão vertical.

R.8 Determinar, se existirem, os pontos de inflexão da função:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}\text{, para } x \geq 1 \\ -\sqrt{1-x}\text{, para } x < 1. \end{cases}$$

Resolução

Podemos escrever:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{\frac{1}{2}}\text{, para } x \geq 1 \\ -(1-x)^{\frac{1}{2}}\text{, para } x < 1. \end{cases}$$

Temos:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}-1}\text{, se } x > 1 & \textbf{(excluímos o 1 porque o expoente de } x-1 \textbf{ é negativo)} \\ -\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-1)\text{, se } x < 1 \end{cases}$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\text{, se } x > 1 \\ \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\text{, se } x < 1. \end{cases}$$

Temos, ainda:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)^{-\frac{1}{2}-1}, & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (-1), & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \therefore f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-1)^{-\frac{3}{2}}, & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\therefore f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\sqrt{(x-1)^3}}, & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \therefore f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4 \cdot |x-1| \cdot \sqrt{x-1}}, & \text{para } x > 1 \\ \frac{1}{4 \cdot |1-x| \cdot \sqrt{1-x}}, & \text{para } x < 1. \end{cases}$$

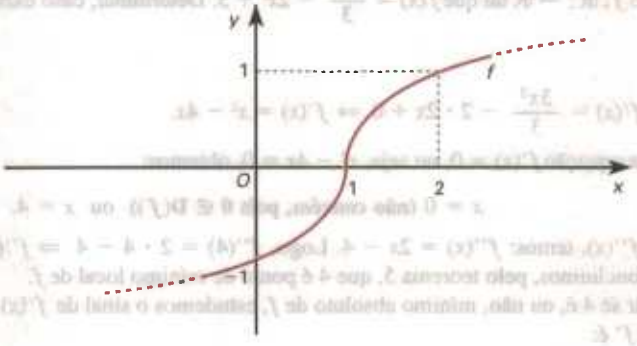
Observe que $f''(x)$ é negativa para $x > 1$ e positiva para $x < 1$, ou seja, a concavidade do gráfico de f muda de sinal na passagem pelo ponto de abscissa 1. Logo, 1 é abscissa de um ponto de inflexão.

Temos: $x = 1 \Rightarrow f(1) = \sqrt{1-1} = 0$.

Assim, o ponto de inflexão do gráfico de f é $(1, 0)$.

Nota: como $(1, 0)$ é ponto de inflexão de f, f é contínua em 1 e não derivável em 1, concluímos que $(1, 0)$ é ponto de inflexão **vertical** de f.

Graficamente, temos:



5. Determinação de extremantes, extremos e pontos de inflexão de uma função através de derivadas sucessivas

Vimos, pelos teoremas 2 e 3, que os valores máximos, os valores mínimos ou os pontos de inflexão de uma função f podem ser determinados através do estudo do sinal da primeira derivada de f. Com o objetivo de simplificar esse estudo, enunciamos o teorema seguinte, que admitiremos sem demonstração.

Teorema 5

Seja f uma função derivável até a ordem n em uma vizinhança completa de um número real a, $V(a)$.

Se a é raiz de todas as derivadas de f até a ordem $n - 1$ e $f^{(n)} \neq 0$, então:

- para n par e $f^{(n)}(a) < 0$, a é ponto de máximo local de f;
- para n par e $f^{(n)}(a) > 0$, a é ponto de mínimo local de f;
- para n ímpar, a é abscissa de um ponto de inflexão horizontal do gráfico de f.

Exercícios resolvidos

R.9 Seja a função $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 2x$.

a) Mostrar que $x = 2$ é ponto de mínimo local de f.
b) Calcular o valor mínimo local da função f, para $x = 2$.

Resolução

a) Temos que: $f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{4 \cdot 3x^2}{3} + \frac{5 \cdot 2x}{2} - 2 \therefore f'(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Pelo teorema 5, temos que o número 2 será ponto de mínimo local de f se for raiz de todas as derivadas de f até a ordem $n - 1$ e $f^{(n)}(2) > 0$, com n par.
Calculando $f'(2)$, temos: $f'(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 2 \Rightarrow f'(2) = 0$.
A derivada segunda de f é: $f''(x) = 3x^2 - 8x + 5$.
Calculando $f''(2)$, temos: $f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 5 \Rightarrow f''(2) = 1$.
Como $f'(2) = 0$ e $f''(2) > 0$, o teorema 5 nos garante que 2 é ponto de mínimo local de f.

b) $f(2) = \frac{2^4}{4} - \frac{4 \cdot 2^3}{3} + \frac{5 \cdot 2^2}{2} - 2 \cdot 2 \therefore f(2) = 4 - \frac{32}{3} + 10 - 4 \Rightarrow f(2) = -\frac{2}{3}$.

Logo, o valor mínimo local de f para $x = 2$ é $f(2) = -\frac{2}{3}$.

R.10 Seja a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5$. Determinar, caso exista, o valor mínimo absoluto de f.

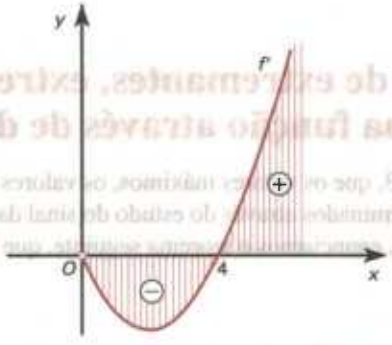
Resolução

Temos que: $f'(x) = \frac{3x^2}{3} - 2 \cdot 2x + 0 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x$.

Resolvendo a equação $f'(x) = 0$, ou seja, $x^2 - 4x = 0$, obtemos:

$$x = 0 \text{ (não convém, pois } 0 \notin D(f)) \text{ ou } x = 4.$$

Calculando $f''(x)$, temos: $f''(x) = 2x - 4$. Logo, $f''(4) = 2 \cdot 4 - 4 \Rightarrow f''(4) = 4$. Como $f'(4) = 0$ e $f''(4) > 0$, concluímos, pelo teorema 5, que 4 é ponto de mínimo local de f.
Para verificar se 4 é, ou não, mínimo absoluto de f, estudemos o sinal de $f'(x) = x^2 - 4x$.
O gráfico de f' é:



Observando:
- que $f'(x) < 0$, para todo x, $x \in D(f)$ e $x < 4$,
- que $f'(x) > 0$, para todo x, $x \in D(f)$ e $x > 4$,
- e que existe $f'(4)$,

concluímos que f é decrescente em $]0, 4]$ e crescente em $[4, +\infty[$.
Portanto 4 é ponto de mínimo absoluto de f.

O valor mínimo absoluto de f é: $f(4) = \frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2 + 5 \Rightarrow f(4) = -\frac{17}{3}$.

R.11 Mostrar que a função $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ não possui extremantes.

Resolução

Pela regra da derivada do quociente, temos que: $f'(x) = \dfrac{1(x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} \therefore f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Note que a equação $f'(x) = 0$, ou seja, $\dfrac{1}{(x+1)^2} = 0$, não possui raízes. Logo, a função f não possui extremantes.

R.12 Obter os extremantes e os valores extremos da função: $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

Resolução

Temos que: $f'(x) = \dfrac{2x(x+2) - x^2 \cdot 1}{(x+2)^2} \therefore f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$.

Resolvendo a equação $f'(x) = 0$, temos: $\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x = 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \therefore x = 0$ ou $x = -4$.

Calculando $f''(x)$, temos: $f''(x) = \dfrac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x) \cdot 2(x+2) \cdot 1}{[(x+2)^2]^2}$.

Simplificando, obtemos: $f''(x) = \dfrac{8}{(x+2)^3}$.

Calculando $f''(0)$ e $f''(-4)$, obtemos: $f''(0) = \dfrac{8}{(0+2)^3} = 1$ e $f''(-4) = \dfrac{8}{(-4+2)^3} = -1$.

Pelo teorema 5, concluímos que:

$$f'(0) = 0 \text{ e } f''(0) > 0 \Rightarrow 0 \text{ é ponto de mínimo local de } f$$

e

$$f'(-4) = 0 \text{ e } f''(-4) < 0 \Rightarrow -4 \text{ é ponto de máximo local de } f.$$

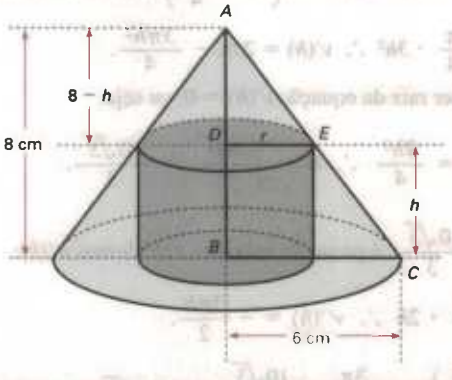
O valor mínimo local e o valor máximo local de f são $f(0)$ e $f(-4)$, respectivamente, ou seja:

$$f(0) = \frac{0^2}{0+2} = 0 \quad \text{e} \quad f(-4) = \frac{(-4)^2}{-4+2} = -8.$$

R.13 Qual é o raio do cilindro circular reto de volume máximo, inscrito em um cone circular reto de altura 8 cm e raio da base 6 cm?

Resolução

Sejam r e h as medidas do raio da base e da altura do cilindro, respectivamente, conforme a figura abaixo.



Da semelhança entre os triângulos ABC e ADE, obtemos: $\dfrac{8}{8-h} = \dfrac{6}{r}$.

Logo, $8r = 6(8-h) \Rightarrow h = 8 - \dfrac{4r}{3}$.

Sendo $v(r)$ o volume do cilindro, temos: $v(r) = \pi r^2 h \Rightarrow v(r) = \pi r^2\left(8 - \dfrac{4r}{3}\right) \therefore v(r) = 8\pi r^2 - \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Temos que a derivada primeira de $v(r)$ é: $v'(r) = 8\pi \cdot 2r - \frac{4\pi}{3} \cdot 3r^2 \therefore v'(r) = 16\pi r - 4\pi r^2$.

O valor de r, para que $v(r)$ seja máximo, deve ser raiz da equação $v'(r) = 0$, ou seja:

$$16\pi r - 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow 16r - 4r^2 = 0.$$

Logo, temos: $r = 0$ **(não convém)** ou $r = 4$.

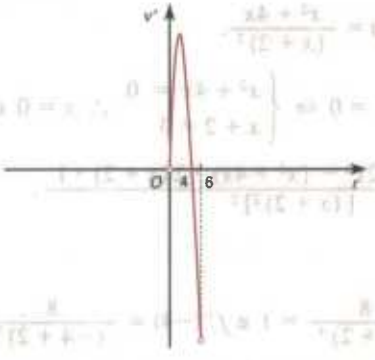
Para nos certificarmos de que realmente $r = 4$ é ponto de máximo, calculemos $v''(r)$:

$$v''(r) = 16\pi - 4\pi \cdot 2r \therefore v''(r) = 16\pi - 8\pi r.$$

Calculando $v''(4)$, obtemos: $v''(4) = 16\pi - 8\pi \cdot 4 \Rightarrow v''(4) = -16\pi$.

Como $v'(4) = 0$ e $v''(4) < 0$, temos que 4 é ponto de máximo local de v.

Para verificar se 4 é, ou não, ponto de máximo absoluto, estudemos o sinal de $v'(r) = 16\pi r - 4\pi r^2$. O gráfico de v' é:



Para que exista o cilindro inscrito no cone, devemos ter $0 < r < 6$. Por isso, o domínio da função v' é $]0, 6[$.

Observando:

- que $v'(r) > 0$, para $0 < r < 4$,
- que $v'(r) < 0$, para $4 < r < 6$,
- e que existe $v'(4)$,

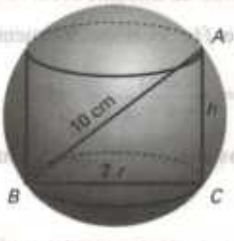
concluímos que 4 é ponto de máximo absoluto de v.

Logo, o raio procurado mede $r = 4$ cm.

R.14 Um cilindro circular reto de volume máximo está inscrito em uma esfera de raio 5 m. Obter o volume do cilindro.

Resolução

Sejam r e h as medidas do raio da base e da altura do cilindro, respectivamente, conforme a figura abaixo.



Aplicando Pitágoras no triângulo ABC, obtemos:

$$h^2 + 4r^2 = 100 \therefore r^2 = \frac{100 - h^2}{4}$$

$$\therefore r = \sqrt{25 - \frac{h^2}{4}}.$$

Sendo $v(h)$ o volume do cilindro, temos: $v(h) = \pi r^2 h \Rightarrow v(h) = \pi\left(25 - \frac{h^2}{4}\right)h \therefore v(h) = 25\pi h - \frac{\pi h^3}{4}$.

A derivada primeira de $v(h)$ é: $v'(h) = 25\pi - \frac{\pi}{4} \cdot 3h^2 \therefore v'(h) = 25\pi - \frac{3\pi h^2}{4}$.

O valor de h, para que $v(h)$ seja máximo, deve ser raiz da equação $v'(h) = 0$, ou seja:

$$25\pi - \frac{3\pi h^2}{4} = 0 \Rightarrow 25 = \frac{3h^2}{4} \therefore h = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Para nos certificarmos de que realmente $h = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máximo, calculemos $v''(h)$:

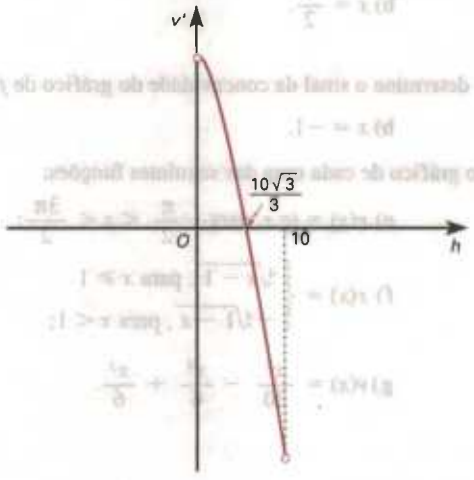
$$v''(h) = 0 - \frac{3\pi}{4} \cdot 2h \therefore v''(h) = -\frac{3\pi h}{2}.$$

Calculando $v''\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$, obtemos: $v''\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} = -5\pi\sqrt{3}$.

Como $v'\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) = 0$ e $v''\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) < 0$, temos que $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máximo local de v.

Para verificar se $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máximo absoluto, estudemos o sinal de $v'(h) = 25\pi - \frac{3\pi h^2}{4}$.

O gráfico de v' é:



Para que exista o cilindro inscrito na esfera, devemos ter $0 < h < 10$. Por isso, o domínio da função v' é $]0, 10[$.

Observando:

- que $v'(h) > 0$, para $0 < h < \frac{10\sqrt{3}}{3}$,
- que $v'(h) < 0$, para $\frac{10\sqrt{3}}{3} < h < 10$,
- e que existe $v'\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$,

concluímos que $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ é ponto de máximo absoluto de v.

O volume máximo é $v\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$, ou seja:

$$v\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) = 25\pi \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^3 \therefore v\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{500\pi\sqrt{3}}{9}\ \text{m}^3.$$

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a, b), B.3, B.5, B.7 (a, b, c) B.8, B.10, B.12 (a, b), B.13, C.1, C.5.
Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2 (c, d), B.4, B.6, B.7 (d, e, f), B.9, B.11, B.12 (c, d), B.14, C.2, C.3, C.4, C.6, C.7, C.8.

Exercícios básicos

B.1 Determine o(s) intervalo(s) em que cada uma das funções a seguir é crescente ou decrescente:

a) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x + 2$;

b) $g(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^3 + 7x^2 + 6$;

c) $h(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 9$;

d) $t(x) = \frac{x^2}{1+x}$.

B.2 Pesquise a existência de extremantes e de pontos de inflexão horizontal de cada uma das seguintes funções, calculando os extremos, se existirem:

a) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 9x + 6$;

b) $g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 4x^2 - 4x + 9$;

c) $h(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 1$;

d) $t(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$.

B.3 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} + 3, \text{ se } x \geq 2 \\ \sqrt{2-x} + 3, \text{ se } x < 2. \end{cases}$

Obtenha, se existirem, os valores extremos de f.

B.4 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que: $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x-1} + 5, \text{ se } x \geq 1 \\ -\sqrt{1-x} + 5, \text{ se } x < 1. \end{cases}$

Determine, se existirem, os valores extremos de f.

B.5 Dada a função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, obtenha o sinal da concavidade do gráfico de f para:

a) $x = 2$; b) $x = \frac{1}{2}$.

B.6 Sendo $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x}{x-1}$, determine o sinal da concavidade do gráfico de f para:

a) $x = 2$; b) $x = -1$.

B.7 Determine, se existirem, os pontos de inflexão do gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{7x}{6} - 3$;

b) $g(x) = \text{sen } x$, para $0 < x < 2\pi$;

c) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} + 1, \text{ para } x \geq 4 \\ -\sqrt{4-x} + 1, \text{ para } x < 4; \end{cases}$

d) $t(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + 8$;

e) $r(x) = \text{tg } x$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$;

f) $s(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x-1}, \text{ para } x \geq 1 \\ -\sqrt[4]{1-x}, \text{ para } x < 1; \end{cases}$

g) $v(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6}$.

B.8 Seja a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 2$.

a) Mostre que $x = 3$ é ponto de mínimo local de f.
b) Calcule o valor mínimo local de f para $x = 3$.

B.9 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$.

a) Mostre que $x = \frac{\pi}{6}$ é ponto de máximo local de f.

b) Calcule o máximo local de f para $x = \frac{\pi}{6}$.

B.10 Mostre que a função $f(x) = \frac{x^2}{x^2+5}$ não possui extremantes.

B.11 Verifique se a função $f(x) = 3x + \cos x$ possui extremantes.

B.12 Determine, se existirem, os extremantes e os valores extremos de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

b) $g(x) = \text{sen}^3 x \cos x$, para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$, para $x > 0$;

d) $t(x) = xe^x$.

B.13 Qual é o volume máximo possível de um cilindro circular reto inscrito em um cone circular reto de altura 12 cm e raio da base 6 cm?

B.14 Qual é o raio da base e a altura de um cilindro circular reto de volume máximo, inscrito em uma esfera de raio 2 cm?

Exercícios complementares

C.1 Dada a função $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (\text{sen } x)^3$, determine o(s) intervalo(s) em que:
a) f é crescente.
b) f é decrescente.

C.2 Obtenha, se existirem, os extremantes e os valores extremos da função $f(x) = x^x$.

C.3 Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Mostre que a concavidade de f é negativa para todo x, $x \in \mathbb{R}$.

C.4 Determine, se existirem, os pontos de inflexão da função: $f(x) = e^x \text{ sen } x$, para $0 \leq x < 2\pi$.

C.5 Qual é o mínimo volume possível de um cone circular reto circunscrito a uma esfera de raio 4 cm?

C.6 O preço da produção de n unidades de baterias para rádios é dado pela função $f(n) = 30 + 20n$. Se o preço de venda de cada bateria é $60 - \frac{n}{1\,000}$, para $n < 50\,000$, determine o número de baterias que devem ser fabricadas e vendidas para que o lucro seja máximo.

C.7 Um paralelepípedo reto retângulo tem o comprimento igual ao quádruplo da largura. Se o volume desse sólido é 32 cm³, calcule suas dimensões sabendo que sua área total é mínima.

C.8 Um novo refrigerante será lançado no mercado. Para isso, foi feito um contrato com uma indústria de embalagens, que deve fabricar recipientes cilíndricos em alumínio com capacidade de 400 cm³. Qual deve ser o raio R da base e altura H de cada um desses recipientes cilíndricos de modo que a quantidade de alumínio utilizada para sua fabricação seja mínima?

Questões dos vestibulares

V.1 (FEI-SP) Se a derivada da função $f(x)$ é $f'(x) = \frac{x+1}{x-1}$, então f é crescente nos intervalos:

a) $]-1, 0[$ e $]0, 1[$.
b) $]-\infty, -1[$ e $]-1, 1[$.
c) $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$.
d) $]-1, 1[$ e $]1, +\infty[$.
e) n.d.a.

V.2 (PUC-SP) Uma função $y = f(x)$, real de variável real, cuja derivada primeira é $y' = -\frac{1}{x^2}$, para todo $x \neq 0$, possui a seguinte propriedade:

a) y tem valor máximo, para $x = 1$.
b) y tem valor mínimo, para $x = 1$.
c) é sempre crescente, $\forall x, x \in \mathbb{R}^*$.
d) é sempre decrescente, $\forall x, x \in \mathbb{R}^*$.
e) é crescente se $x > 0$ e decrescente, se $x < 0$.

V.3 (PUC-SP) A função $y = x^3$:

a) tem valor máximo para $x = 0$.
b) tem valor mínimo para $x = 0$.
c) tem um extremo em $x = 0$.
d) não tem máximo nem mínimo.
e) não tem derivada para $x = 0$.

V.4 (Fuvest) A função $y = \frac{1}{1+x^2}$:

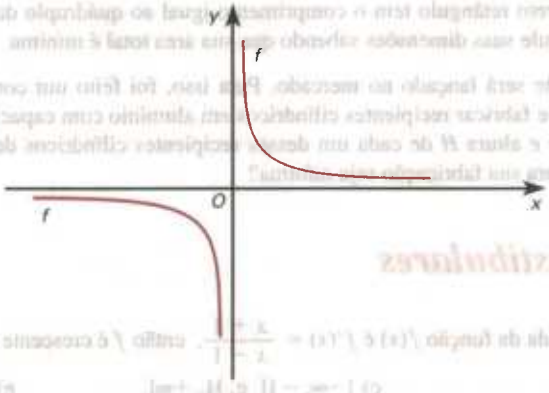
a) tem máximo para $x = 0$.
b) tem mínimo para $x = 0$.
c) não tem máximo nem mínimo.
d) tem máximo e mínimo.
e) nenhuma das afirmações anteriores é correta.

Capítulo 35

Construção de gráficos e aplicação de derivadas ao estudo do movimento retilíneo

1. Assíntota de um gráfico

Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x}$, cujo gráfico é a hipérbole:

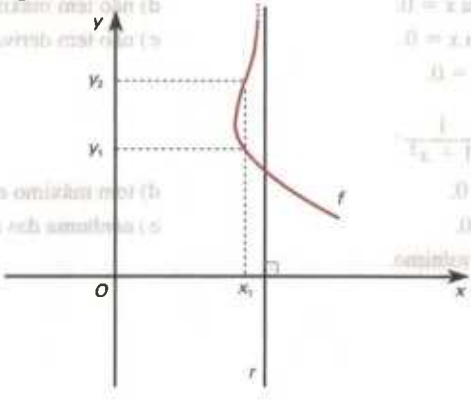


Para x tendendo a $+\infty$ (ou a $-\infty$) as distâncias entre os pontos do gráfico de f e o eixo Ox tendem a zero. Por isso dizemos que o eixo das abscissas é uma **assíntota** desse gráfico.

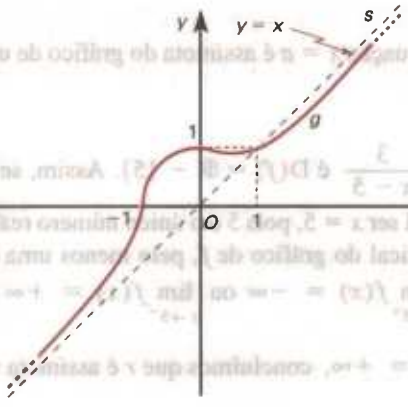
Analogamente, para y tendendo a $+\infty$ (ou a $-\infty$) as distâncias entre os pontos do gráfico de f e o eixo Oy tendem a zero. Por isso, dizemos que o eixo das ordenadas é uma **assíntota** desse gráfico.

Intuitivamente, uma reta r é assíntota do gráfico de uma função f se, ao "percorrermos" esse gráfico, nos afastando indefinidamente da origem do sistema, as distâncias entre os pontos do gráfico e a reta r tendem a zero.

A intersecção do gráfico de uma função f com uma assíntota **vertical** r é sempre o conjunto vazio. Caso contrário teríamos, para algum x do domínio de f, mais do que uma imagem e, portanto, f não seria função, como mostra a figura:



Note, porém, que o gráfico de uma função g pode ter ponto em comum com uma assíntota **não-vertical** s, como no gráfico da função $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$:



Apesar de a reta s: $y = x$ possuir o ponto (1, 1) em comum com o gráfico de g, ela é assíntota desse gráfico, pois para x tendendo a $+\infty$ (ou a $-\infty$) as distâncias entre os pontos do gráfico e a reta s tendem a zero.

Podemos formalizar o conceito de assíntota através das duas definições dadas a seguir.

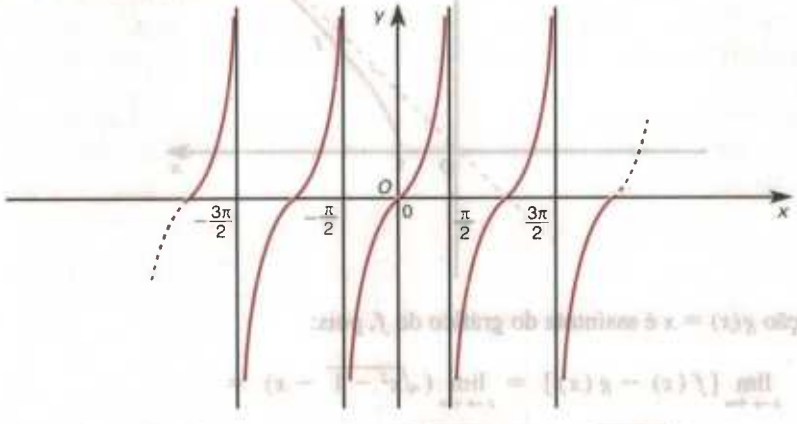
Definição 1

A reta **vertical** r, de equação $x = a$, é assíntota do gráfico de uma função $y = f(x)$ se, e somente se:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

Exemplo

Seja a função $f(x) = \text{tg } x$, cujo gráfico é:



A reta de equação $x = \dfrac{\pi}{2}$ é uma assíntota vertical do gráfico de f, pois:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \text{tg } x = +\infty.$$

Analogamente, são assíntotas verticais do gráfico as retas de equações $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, etc.

Nota: se uma reta vertical de equação $x = a$ é assíntota do gráfico de uma função f, então $a \notin D(f)$.

Exemplo

O domínio da função $f(x) = \frac{3}{x-5}$ é $D(f) = \mathbb{R} - \{5\}$. Assim, se o gráfico de f tiver assíntota **vertical** r, a equação de r só poderá ser $x = 5$, pois 5 é o único número real que não pertence ao domínio de f. Para que r seja assíntota vertical do gráfico de f, pelo menos uma das condições seguintes deve ocorrer: $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$.

Observando que $\lim\limits_{x \to 5^+} \frac{3}{x-5} = +\infty$, concluímos que r é assíntota vertical do gráfico de f.

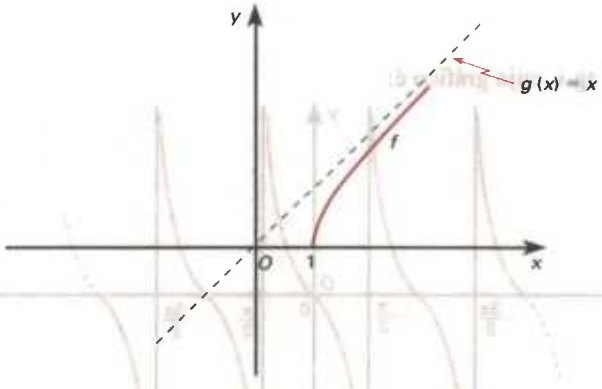
Definição 2

A reta **não-vertical** r, de equação $g(x) = mx + q$, $\{m, q\} \subset \mathbb{R}$, é assíntota do gráfico de uma função $y = f(x)$ se, e somente se:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Exemplo

Seja a função $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, com $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, cujo gráfico é:



A reta de equação $g(x) = x$ é assíntota do gráfico de f, pois:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} \right) = 0.$$

Exercícios resolvidos

R.1 Mostrar que a reta r de equação $x = 3$ é assíntota do gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$.

Resolução

Como r **é vertical**, aplicamos a definição 1, isto é, r é assíntota se pelo menos um dos limites, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, for igual a $+\infty$ ou $-\infty$.

Temos que: $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$. Logo, a reta r é assíntota vertical do gráfico de f.

R.2 Mostrar que a reta horizontal r de equação $g(x) = 1$ é assíntota do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

Resolução

Como r **não é vertical**, aplicamos a definição 2, isto é, r é assíntota se:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Temos que: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1} - 1 \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0.$

Logo, a reta r é assíntota horizontal do gráfico de f.

R.3 Mostrar que a reta r de equação $g(x) = 2x$ é assíntota do gráfico da função $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3}$.

Resolução

Como r não é vertical, aplicamos a definição 2, isto é, r é assíntota se:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 3} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 3} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2 + 3} + 2x} = 0.$$

Logo, a reta r é assíntota oblíqua do gráfico de f.

Nota: assíntota oblíqua é toda assíntota **não-vertical** e **não-horizontal**.

R.4 Determinar, se existirem, as assíntotas verticais do gráfico da função $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$.

Resolução

O domínio da função f é $D(f) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$. Logo, se existir assíntota vertical, sua equação será $x = 2$ ou $x = -2$. Como $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3}{x^2 - 4} = +\infty$, concluímos que a reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical do gráfico de f. Analogamente, como $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{3}{x^2 - 4} = -\infty$, temos que a reta de equação $x = -2$ também é assíntota vertical do gráfico de f.

2. Determinação de assíntotas não-verticais

As assíntotas **verticais** do gráfico de uma função f, se existirem, são fáceis de determinar, pois suas equações são do tipo $x = a$, em que $a \notin D(f)$ e um dos limites $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ é igual a $+\infty$ ou $-\infty$. As assíntotas **não-verticais** não são tão simples, e por isso mostraremos um teorema para facilitar esse estudo.

Teorema

Se a reta r de equação $g(x) = mx + q$, $\{m, q\} \subset \mathbb{R}$, é assíntota do gráfico de uma função $f(x)$, então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \text{ (I)}$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q. \text{ (II)}$$

Demonstração

• A reta r é assíntota do gráfico de f. Logo, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

• Ocorrendo $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$, podemos escrever:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0, \text{ ou, ainda:}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left\{ x \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} \right] \right\} = 0, \text{ com } \{m, q\} \subset \mathbb{R}.$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, concluímos que: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} \right] = 0$.

Observando os limites $\lim\limits_{x \to +\infty} m = m$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{q}{x} = 0$, pois m e q são constantes, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Conhecendo o valor de m, obtemos q do seguinte modo:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0 \Rightarrow \lim [f(x) - mx] = q.$$

• Ocorrendo $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$, o raciocínio é análogo.

(c.q.d.)

Exercícios resolvidos

R.5 Determinar, se existirem, as assíntotas não-verticais do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x}$.

Resolução

Pelo teorema anterior, temos que, se $g(x) = mx + q$ é assíntota não-vertical do gráfico de f, então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \quad \textbf{(I)}$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q. \quad \textbf{(II)}$$

Temos:

I.

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2 + 3x - 1}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1} = 1; \text{ logo, } m = 1;$$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x} - 1x \right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1 - x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1} = 3; \text{ logo, } q = 3.$$

Assim, uma assíntota não-vertical do gráfico de f é a reta de equação $g(x) = 1x + 3$, ou seja, $y = x + 3$.

Temos ainda:

II.

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2 + 3x - 1}{x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2} =$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1} = 1; \text{ logo, } m = 1;$$

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x} - 1x \right) =$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 3x - 1 - x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1} = 3; \text{ logo, } q = 3.$$

Note que em (II) obtivemos a mesma assíntota de (I), ou seja, $y = x + 3$. Concluímos, então, que o gráfico de f possui uma única assíntota não-vertical: $y = x + 3$.

R.6 Mostrar que o gráfico da função $f(x) = x^3$ não possui assíntotas.

Resolução

- Como f é definida para todo x, $x \in \mathbb{R}$, concluímos que o gráfico não possui assíntotas verticais.
- Se o gráfico de f possuir assíntota não-vertical, então sua equação será da forma $g(x) = mx + q$, com:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \quad \text{(I)}$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q. \quad \text{(II)}$$

Temos:

I. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$;

II. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

Como nenhum dos limites, (I) ou (II), é finito, concluímos que não existe m e que, portanto, não existe assíntota não-vertical no gráfico de f. Logo, concluímos que o gráfico de f não possui assíntota.

3. Esboço do gráfico de uma função

Podemos obter um esboço do gráfico de uma função f através das seguintes informações:

1. domínio de f;
2. raízes de f;
3. intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas;
4. intervalos onde f é crescente ou decrescente;
5. extremantes e extremos de f;
6. concavidade e pontos de inflexão;
7. assíntotas;
8. limites laterais, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, para cada assíntota vertical de equação $x = a$;
9. limites no infinito, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Exercícios resolvidos

R.7 Esboçar o gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Resolução

1. Domínio de f: $D(f) = \mathbb{R}$

2. Raízes de f: $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0$
   Portanto temos: $x = 0$ ou $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.
   Logo, o conjunto das raízes de f é $\{0, 1\}$.

3. Intersecção do gráfico de f com o eixo Oy
   Basta fazer $x = 0$, ou seja, $f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 \Rightarrow f(0) = 0$.
   Logo, o ponto de intersecção de f com o eixo das ordenadas é $(0, 0)$.

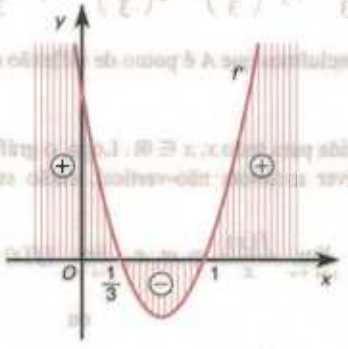
4. Intervalos onde f é crescente ou decrescente

Temos que: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

• Raízes de f'

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 \therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{3}.$$

• Gráfico de f'



Temos então que f é crescente em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ e $[1, +\infty[$ e é decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

5. Extremantes e extremos de f

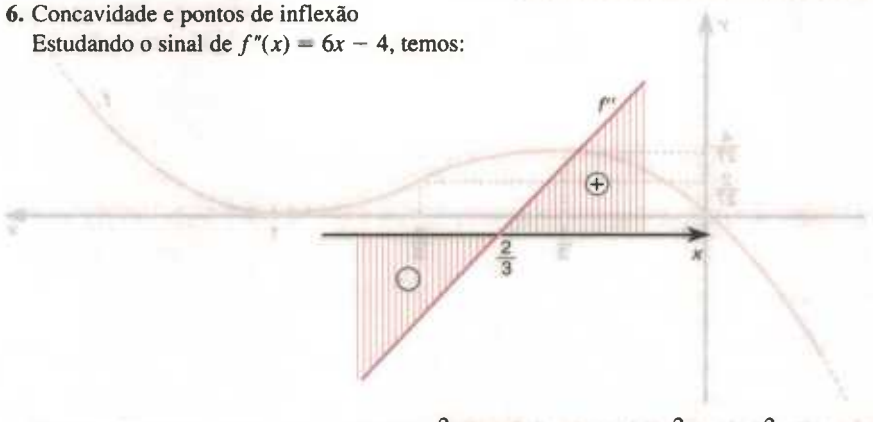
Observando a variação de sinal de f', obtida em (4), temos:

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \\ f'(x) > 0, \text{ para } x < \frac{1}{3} \\ f'(x) < 0, \text{ para } \frac{1}{3} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ é ponto de máximo local de } f; \\ \text{e } f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \\ \text{é máximo local de } f; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } \frac{1}{3} < x < 1 \\ f'(x) > 0, \text{ para } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \text{ é ponto de mínimo local de } f; \\ \text{e } f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0 \\ \text{é mínimo local de } f. \end{cases}$$

6. Concavidade e pontos de inflexão

Estudando o sinal de $f''(x) = 6x - 4$, temos:



A concavidade de f é negativa para $x < \frac{2}{3}$ e positiva para $x > \frac{2}{3}$ com $\frac{2}{3} \in D(f)$. Portanto $\frac{2}{3}$ é abscissa de um ponto de inflexão do gráfico de f.

Temos: $x = \frac{2}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$.

Desse modo, temos o ponto de inflexão $A\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$.

Temos ainda que: $x = \frac{2}{3} \Rightarrow f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$.

Como $f'\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0$, concluímos que A é ponto de inflexão **oblíqua**.

7. Assíntotas

- A função f está definida para todo x, $x \in \mathbb{R}$. Logo, o gráfico não possui assíntotas verticais.
- Se o gráfico de f tiver assíntota não-vertical, então sua equação será do tipo $g(x) = mx + q$, $\{m, q\} \subset \mathbb{R}$, com:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \quad \text{(I)}$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q. \quad \text{(II)}$$

Temos:

I. $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$;

II. $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x} = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

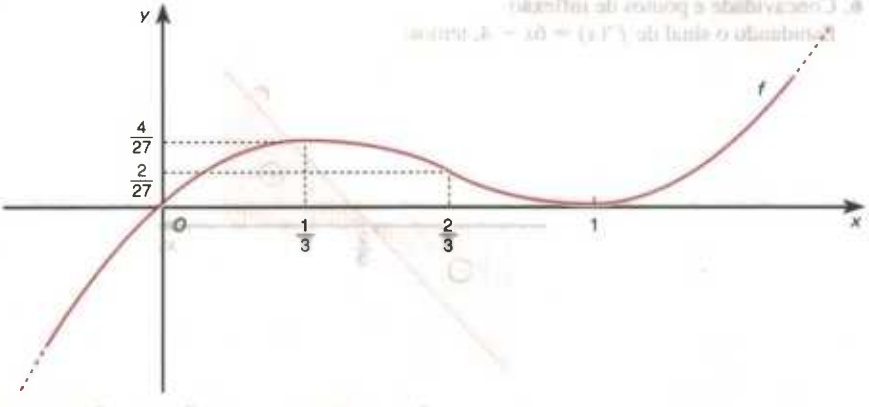
Como nenhum dos limites, (I) ou (II), é finito, concluímos que não existe m e, portanto, não existe assíntota não-vertical no gráfico de f.

8. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ para cada assíntota vertical de equação $x = a$

O gráfico não possui assíntotas verticais.

9. Limites no infinito: $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = -\infty$

Finalmente, podemos esboçar o gráfico de f:



R.8 Esboçar o gráfico da função $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Resolução

1. Domínio de f: $D(f) = \mathbb{R}$

2. Raízes de f: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
Fazendo $x^2 = t$, temos:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \therefore \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 \therefore t = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow t = 4 \text{ ou } t = 1.$$

Retornando à variável original, obtemos:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2; \text{ ou } x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Logo, o conjunto das raízes de f é $\{1, -1, 2, -2\}$.

3. Intersecção do gráfico com o eixo Oy
Basta fazer $x = 0$, ou seja, $f(0) = 0^4 - 5 \cdot 0^2 + 4 \Rightarrow f(0) = 4$.
Logo, o ponto de intersecção de f com o eixo das ordenadas é $(0, 4)$.

4. Intervalos onde f é crescente ou decrescente
Temos que: $f'(x) = 4x^3 - 10x$.

- Raízes de f': $4x^3 - 10x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 10) = 0$.

  Logo, temos que: $x = 0$ ou $4x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{10}{4}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}$.

- Variação de sinal de f'

	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{10}}{2}$
x	$-$	$-$		$+$	$+$
$4x^2 - 10$	$+$	$-$		$-$	$+$
$f'(x) = x(4x^2 - 10)$	$-$	$+$		$-$	$+$

Logo, f é decrescente nos intervalos $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ e $\left[0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ e crescente nos intervalos $\left[-\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right]$ e $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, +\infty\right[$.

5. Extremantes e extremos de f
Observando a variação de sinal de f', obtida em (4), temos:

$$\begin{cases} f'\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } x < -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ f'(x) > 0, \text{ para } -\frac{\sqrt{10}}{2} < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ é ponto de mínimo local de } f; \text{ e} \\ f\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^4 - 5\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + 4 = \\ = -\frac{9}{4} \text{ é mínimo local de } f; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(x) > 0, \text{ para } -\frac{\sqrt{10}}{2} < x < 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } 0 < x < \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{0} \text{ é ponto de máximo local de } f; \\ \text{e } f(\mathbf{0}) = 0^4 - 5 \cdot 0^2 + 4 = 4 \\ \text{é máximo local de } f; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 0 \\ f'(x) < 0, \text{ para } 0 < x < \frac{\sqrt{10}}{2} \\ f'(x) > 0, \text{ para } x > \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ é ponto de mínimo local de } f; \text{ e} \\ f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^4 - 5\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{9}{4} \\ \text{é mínimo local de } f. \end{cases}$$

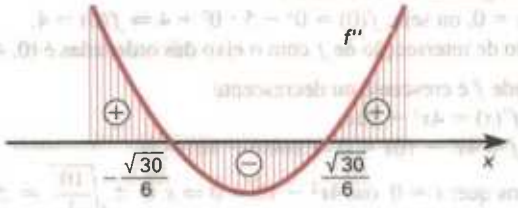
6. Concavidade e ponto de inflexão

Temos que $f''(x) = 12x^2 - 10$.

- Raízes de f''

$$12x^2 - 10 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{10}{12}} = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

- Variação de sinal de f''



Logo, a concavidade de f é positiva para $x < -\frac{\sqrt{30}}{6}$ e $x > \frac{\sqrt{30}}{6}$, e é negativa para $-\frac{\sqrt{30}}{6} < x < \frac{\sqrt{30}}{6}$.

Como f'' muda de sinal na passagem pelos pontos de abscissas $-\frac{\sqrt{30}}{6}$ e $\frac{\sqrt{30}}{6}$ e $\left\{-\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{6}\right\} \subset D(f)$, temos que esses números são abscissas dos pontos de inflexão de f.

Temos:

- $x = -\frac{\sqrt{30}}{6} \Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^4 - 5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^2 + 4 = \frac{19}{36}$;
- $x = \frac{\sqrt{30}}{6} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^4 - 5\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^2 + 4 = \frac{19}{36}$.

Desse modo, obtemos como pontos de inflexão:

$$A\left(-\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{19}{36}\right) \text{ e } B\left(\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{19}{6}\right).$$

Temos ainda:

- $x = -\frac{\sqrt{30}}{6} \Rightarrow f'\left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^3 - 10\left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right) = \frac{10\sqrt{30}}{9}$;
- $x = \frac{\sqrt{30}}{6} \Rightarrow f'\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^3 - 10\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right) = -\frac{10\sqrt{30}}{9}$.

Como $f'\left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\right) \neq 0$ e $f'\left(\frac{\sqrt{30}}{6}\right) \neq 0$, concluímos que A e B são pontos de inflexão oblíqua.

7. Assíntotas

- A função f está definida para todo x, $x \in \mathbb{R}$. Logo, seu gráfico não tem assíntotas verticais.

- Se o gráfico de f tiver assíntota não-vertical, então sua equação será do tipo $g(x) = mx + q$, $\{m, q\} \subset \mathbb{R}$, com:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \quad \text{(I)}$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q. \quad \text{(II)}$$

Temos:

I. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4\left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{x^4}\right) = +\infty;$

II. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4\left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{x^4}\right) = -\infty.$

Como nenhum dos limites, (I) ou (II), é finito, conclui-se que não existe m e que, portanto, não existe assíntota não-vertical no gráfico de f.

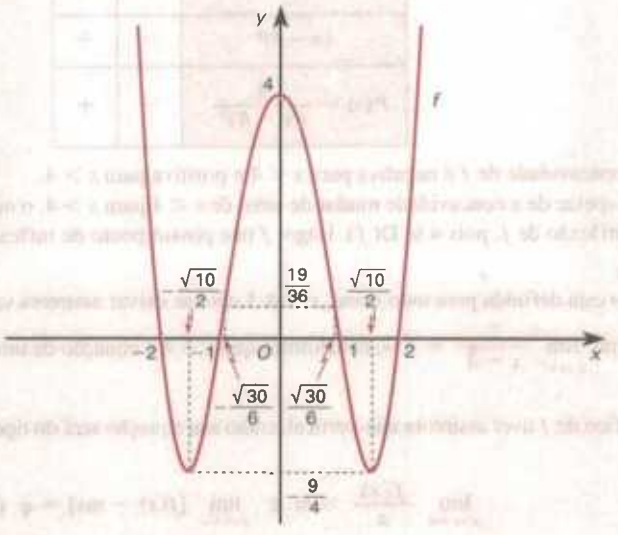
8. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, para cada assíntota vertical de equação $x = a$

O gráfico não possui assíntotas.

9. Limites no infinito

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 - 5x^2 + 4) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty;$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 5x^2 + 4) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty.$

Finalmente, podemos esboçar o gráfico de f:



Nota: temos que: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ e $f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4$, ou seja, $f(x) = f(-x)$, para todo x, $x \in D(f)$; isso significa que o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo Oy.

R.9 Esboçar o gráfico da função $f(x) = \frac{2}{x-4}$.

Resolução

1. Domínio de f: $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$

2. Raízes de f: f não tem raízes, ou seja, a equação $\frac{2}{x-4} = 0$ é impossível.

3. Intersecção do gráfico de f com o eixo Oy

Basta fazer $x = 0$, ou seja, $f(0) = \frac{2}{0-4} = -\frac{1}{2}$.

Logo, o gráfico de f intercepta o eixo Oy no ponto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

4. Intervalos onde f é crescente ou decrescente

Temos que: $f'(x) = \frac{0(x-4) - 2 \cdot 1}{(x-4)^2} \therefore f'(x) = -\frac{2}{(x-4)^2}$.

Como f' é negativa para todo real x, $x \neq 4$, concluímos que f é decrescente nos intervalos $]-\infty, 4[$ e $]4, +\infty[$.

5. Extremantes e extremos de f

A equação $f'(x) = 0$, ou seja, $-\frac{2}{(x-4)^2} = 0$, não tem raízes. Logo, a função f não possui extremantes e, portanto, também não possui extremos.

6. Concavidade e pontos de inflexão

Temos que:

$$f''(x) = -\frac{0 \cdot (x-4)^2 - 2 \cdot 2(x-4) \cdot 1}{[(x-4)^2]^2} \therefore f''(x) = \frac{4(x-4)}{(x-4)^4} \therefore f''(x) = \frac{4}{(x-4)^3}.$$

- Raízes de f'' a equação $\frac{4}{(x-4)^3} = 0$ é impossível. Logo, f'' não tem raízes.
- Variação de sinal de f''

	4	
4	+	+
$(x-4)^3$	−	+
$f''(x) = \frac{4}{(x-4)^3}$	−	+

Assim, a concavidade de f é negativa para $x < 4$ e positiva para $x > 4$.
Note que, apesar de a concavidade mudar de sinal de $x < 4$ para $x > 4$, o número 4 não é abscissa de um ponto de inflexão de f, pois $4 \notin D(f)$. Logo, f não possui ponto de inflexão.

7. Assíntotas

- A função está definida para todo x real, $x \neq 4$. Logo, se existir assíntota vertical, sua equação deverá ser $x = 4$. Como $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{2}{x-4} = +\infty$, concluímos que $x = 4$ é equação de uma assíntota vertical do gráfico de f.
- Se o gráfico de f tiver assíntota não-vertical, então sua equação será do tipo $g(x) = mx + q$, $\{m, q\} \subset \mathbb{R}$, com:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q \quad \textbf{(I)}$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q. \quad \textbf{(II)}$$

Temos:

I.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x-4}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2 - 4x} = 0$; logo, $m = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x-4} - 0x \right) = 0$; logo, $q = 0$.

Assim, uma assíntota não-vertical de f é a reta de equação $g(x) = 0x + 0$, ou seja, $y = 0$.

Temos ainda:

II.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x-4}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x^2 - 4x} = 0$; logo, $m = 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2}{x^2 - 4} - 0x \right) = 0$; logo, $q = 0$.

Note que em (II) obtivemos a mesma assíntota de (I), ou seja, $y = 0$. Concluímos, então, que existe apenas uma assíntota não-vertical no gráfico de f: $y = 0$.

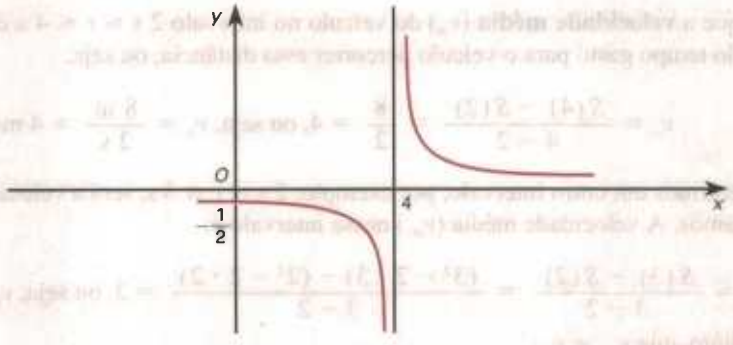
8. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ para cada assíntota vertical de equação $x = a$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{2}{x-4} = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 4^-} \frac{2}{x-4} = -\infty.$$

9. Limites no infinito

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-4} = 0 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x-4} = 0.$$

Finalmente, podemos esboçar o gráfico de f:



Nota: nesse gráfico obtivemos poucos valores numéricos; se você tiver dúvida quanto ao traçado, poderá atribuir mais valores a x e determinar mais alguns pontos do gráfico, como, foi feito, por exemplo, na tabela ao lado.

x	$f(x) = \dfrac{2}{x-4}$
-1	$-\dfrac{2}{5}$
1	$-\dfrac{2}{3}$
2	-1
6	1

4. Aplicação de derivadas ao estudo do movimento retilíneo

4.1. Velocidade instantânea

Um automóvel percorre uma estrada reta. Associemos a essa estrada um sistema de abscissas, tomando como unidade o metro e adotando como origem um determinado ponto O da rodovia. A abscissa S, de cada ponto em que se encontra o automóvel, após o início da marcação do tempo t, em segundos, é dada pela equação $S(t) = t^2 - 2t$, denominada **equação horária do movimento**. A abscissa S também pode ser chamada de **espaço**.

Exemplos

a) A abscissa (ou o espaço) do ponto em que se encontra o veículo após 5 s do início da marcação de tempo é:

$$S(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 = 15, \text{ ou seja, } S(5) = 15 \text{ m}.$$

b) A distância percorrida pelo veículo no intervalo $2 \text{ s} \leq t \leq 4 \text{ s}$ é dada por:

$$S(4) - S(2) = (4^2 - 2 \cdot 4) - (2^2 - 2 \cdot 2) = 8, \text{ ou seja, } S(4) - S(2) = 8 \text{ m}.$$

Dizemos que a **velocidade média** (v_m) do veículo no intervalo $2 \text{ s} \leq t \leq 4 \text{ s}$ é a razão da distância percorrida pelo tempo gasto para o veículo percorrer essa distância, ou seja:

$$v_m = \frac{S(4) - S(2)}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4, \text{ ou seja, } v_m = \frac{8 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 4 \text{ m/s}.$$

Se considerarmos um outro intervalo, por exemplo, $2 \text{ s} \leq t \leq 3 \text{ s}$, será a velocidade média a mesma anterior? Vejamos. A velocidade média (v_{m_1}) nesse intervalo é:

$$v_{m_1} = \frac{S(3) - S(2)}{3 - 2} = \frac{(3^2 - 2 \cdot 3) - (2^2 - 2 \cdot 2)}{3 - 2} = 3, \text{ ou seja, } v_{m_1} = 3 \text{ m/s}.$$

Note, portanto, que $v_{m_1} \neq v_m$.

Quanto mais diminuirmos o intervalo $2 \text{ s} \leq t \leq (2 + h) \text{ s}$ para $h > 0$, ou o intervalo $(2 + h) \text{ s} \leq t \leq 2 \text{ s}$ para $h < 0$, mais nos aproximaremos da velocidade exata no instante 2 s. Essa velocidade é denominada "**velocidade instantânea** no instante $t = 2$ s". Para determinar essa velocidade, basta fazermos o acréscimo h tender a zero, calculando o limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(2 + h) - S(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(2 + h)^2 - 2(2 + h)] - [2^2 - 2 \cdot 2]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4} - 2h - \cancel{4} + \cancel{4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(4 + h - 2)}{\cancel{h}} = 4 - 2 = 2,$$

ou seja, a velocidade instantânea para $t = 2$ s é 2 m/s.

Note que esse limite é exatamente a derivada da função $S(t)$ no ponto de abscissa 2.

Generalizando, temos:

> Se o movimento de um ponto material, ao longo de uma reta, é descrito pela equação horária $S = S(t)$, e S é derivável em t_0, então a velocidade instantânea do ponto material no instante t_0 é $v(t_0) = S'(t_0)$.

Exercícios resolvidos

R.10 Uma partícula se move em linha reta, de modo que seu espaço S, em metros, é dado em função do tempo t, em segundos, pela equação $S(t) = \frac{t^3}{2} + 5t$. Calcular a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 4$ s.

Resolução

A velocidade instantânea da partícula para $t = 4$ s é: $v(4) = S'(4)$.

Temos que: $S'(t) = \frac{3t^2}{2} + 5$

Logo, $S'(4) = \frac{3 \cdot 4^2}{2} + 5 = 29$, ou seja, $v(4) = 29$ m/s.

R.11 Um ponto material move-se sobre uma linha reta, com equação horária $S(t) = t^3 - 2t^2 + t$, sendo S em quilômetros e t em horas.

a) Obter a equação horária da velocidade instantânea do ponto material.

b) Obter a velocidade instantânea no instante $t = 2$ h.

Resolução

a) A equação horária da velocidade instantânea é:

$$v(t) = S'(t) = 3t^2 - 2 \cdot 2t + 1 \quad \therefore \quad v(t) = 3t^2 - 4t + 1$$

b) $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 5$, ou seja, $v(2) = 5$ km/h.

4.2. Aceleração instantânea

No item 4.1 (página anterior), a equação $S(t) = t^2 - 2t$ descreve o movimento do automóvel ao longo de uma trajetória reta, com S em metros e t em segundos. A equação horária da velocidade instantânea é:

$$v(t) = S'(t), \text{ ou seja, } v(t) = 2t - 2.$$

De acordo com essa equação temos, por exemplo, que a variação da velocidade do veículo no intervalo $3 \text{ s} \leqslant t \leqslant 5$ s é dada por:

$$v(5) - v(3) = (2 \cdot 5 - 2) - (2 \cdot 3 - 2) = 4,$$

ou seja, a variação é de 4 m/s.

Dizemos que a **aceleração média** (a_m) do veículo nesse intervalo é a razão da variação da velocidade pelo tempo necessário para que ocorra essa variação, ou seja:

$$a_m = \frac{v(5) - v(3)}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2,$$

ou seja, $a_m = \frac{4 \text{ m/s}}{2 \text{ s}} = 2 \text{ m/s}^2$.

Quanto mais diminuirmos o intervalo $3\text{ s} \leq t \leq (3 + h)\text{ s}$ para $h > 0$, ou, $(3 + h)\text{ s} \leq t \leq 3\text{ s}$ para $h < 0$, mais nos aproximaremos da aceleração exata no instante 3 s. Essa aceleração é denominada **aceleração instantânea** no instante $t = 3$ s. Para determinarmos essa aceleração, basta fazer o acréscimo h tender a zero, calculando o limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(3 + h) - v(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[2(3 + h) - 2] - (2 \cdot 3 - 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{6} + 2h - \cancel{2} - \cancel{6} + \cancel{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2,$$

ou seja, a aceleração instantânea para $t = 3$ s é 2 m/s².

Note que esse limite é a derivada da função $v(t)$ no ponto de abscissa 3.

Generalizando, temos:

Se a equação horária da velocidade instantânea de um ponto material que se move em linha reta é $v = v(t)$, e v é derivável em t_0, então a aceleração instantânea do ponto material em t_0 é $a(t_0) = v'(t_0)$.

Exercícios resolvidos

R.12 Uma partícula move-se em linha reta. A equação horária do espaço S é $S(t) = t^3 + 4t^2$, com S em metros e t em segundos.

a) Obter a velocidade instantânea da partícula para $t = 1$ s.

b) Obter a aceleração instantânea da partícula para $t = 1$ s.

Resolução

a) Temos que $v(t) = S'(t) = 3t^2 + 8t$.

A velocidade instantânea da partícula para $t = 1$ s é: $v(1) = S'(1) = 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 11$, ou seja, 11 m/s.

b) Temos que $a(t) = v'(t) = S''(t) = 6t + 8$.

A aceleração instantânea da partícula para $t = 1$ s é $a(1) = v'(1) = 6 \cdot 1 + 8 = 14$, ou seja, 14 m/s².

R.13 Um corpo se desloca sobre uma linha reta, de modo que a equação horária do espaço S é $S(t) = 6t^3 - 2t + 3$, com S em quilômetros e t em horas.

a) Qual é a equação horária da aceleração instantânea desse corpo?

b) Qual é a aceleração instantânea desse corpo no instante $t = 2$ h?

Resolução

a) A equação horária da aceleração instantânea do corpo é: $a(t) = S''(t)$.

Temos:

$$S'(t) = 18t^2 - 2 \quad \text{e} \quad S''(t) = 36t.$$

Logo, $a(t) = 36t$.

b) $a(2) = 36 \cdot 2 = 72$, ou seja, $a(2) = 72$ km/h².

Sugestões

Tarefa de classe: exercícios B.1 (a, b), B.2 (a, b), B.3 (a, b), B.4 (a, b), B.5, B.7 (a até e), B.8, C.1 (a), C.2 (a, b).

Tarefa de casa: exercícios B.1 (c, d), B.2 (c, d), B.3 (c, d), B.4 (c, d), B.6, B.7 (f até j), B.9, C.1 (b), C.2 (c, d).

Exercícios básicos

B.1 Prove que a reta r é assíntota vertical do gráfico da função f em cada um dos seguintes casos:

a) $r: x = 5$ e $f(x) = \dfrac{3}{x-5}$;

b) $r: x = 1$ e $f(x) = \dfrac{8}{x^2-1}$;

c) $r: x = 0$ e $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$;

d) $r: x = 2$ e $f(x) = \dfrac{1}{x^3-8}$.

B.2 Prove que a reta r é assíntota não-vertical do gráfico de f em cada um dos seguintes casos:

a) $r: g(x) = 3$ e $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$;

b) $r: g(x) = 2x$ e $f(x) = \sqrt{4x^2+1}$;

c) $r: g(x) = 1$ e $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+5}$;

d) $r: g(x) = 3x$ e $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x}$.

B.3 Determine, se existirem, as assíntotas verticais do gráfico da função f em cada um dos seguintes casos:

a) $f(x) = \dfrac{9}{x-4}$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$.

B.4 Determine, se existirem, as assíntotas não-verticais do gráfico da função f em cada um dos seguintes casos:

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2+9}$;

c) $f(x) = \dfrac{5x-1}{2x-3}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^4+2}{x^3}$.

B.5 Apenas uma das alternativas a seguir apresenta uma função cujo gráfico não possui assíntota. Assinale-a:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$;

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-9}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$;

d) $f(x) = x^4$;

e) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

B.6 Prove que o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^2+1}$ não possui assíntota.

B.7 Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2$;

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$;

c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$;

d) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$;

f) $f(x) = (x^2-1)^2$;

g) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$;

h) $f(x) = x^4 - 4x^2$;

i) $f(x) = \dfrac{5}{x-4}$;

j) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-12}$.

B.8 Um ponto material move-se em uma trajetória reta de modo que a equação horária do espaço S é $S(t) = t^3 - 2t^2 + t - 1$, com S em metros e t em segundos.

a) Determine a equação horária da velocidade instantânea do ponto material.
b) Determine a velocidade instantânea do ponto material no instante $t = 3$ s.
c) Determine a equação horária da aceleração instantânea do ponto material.
d) Determine a aceleração instantânea do ponto material no instante $t = 2$ s.

B.9 Uma partícula descreve uma trajetória reta segundo a equação horária $S(t) = 2t^4 + 3t - 4$, com S em quilômetros e t em horas.

a) Determine a equação horária da velocidade instantânea da partícula.
b) Determine a velocidade instantânea da partícula para $t = 1$ h.
c) Determine a equação horária da aceleração instantânea da partícula.
d) Determine a aceleração instantânea da partícula no instante $t = 2$ h.

Exercícios complementares

C.1 Determine, se existirem, as assíntotas do gráfico da função em cada um dos seguintes casos:

a) $f(x) = \dfrac{\ell n\, x}{x}$;

b) $f(x) = \ell n\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

C.2 Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 1}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1 + x)^2}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Questões dos vestibulares

V.1 (Cescem) O gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$:

a) possui apenas uma assíntota vertical.
b) possui uma assíntota horizontal.
c) não possui assíntota.
d) possui uma assíntota com inclinação de 45°.
e) possui duas assíntotas não-verticais.

V.2 (PUC-SP) Na função $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$, as coordenadas do ponto de inflexão são:

a) $(1, -10)$. b) $(2, 10)$. c) $(-1, 20)$. d) $(-1, -10)$. e) $(2, -10)$.

V.3 (Epusp-SP) No intervalo $-1 \leq x \leq 1$, a função $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$:

a) tem ponto de mínimo e ponto de máximo.
b) tem ponto de mínimo mas não de máximo.
c) tem ponto de máximo mas não de mínimo.
d) tem ponto de inflexão horizontal.
e) nenhuma das anteriores está correta.

Respostas

Capítulo 1

Exercícios básicos

B.1

a)

$\overline{AB} = 3$;

b)

$\overline{BA} = -3$;

c)

$\overline{CA} = 8$;

d)

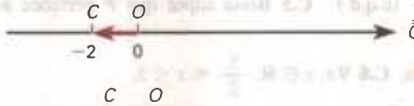
$\overline{AC} = -8$;

e)

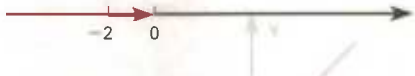
$\overline{OA} = 6$;

f)

$\overline{AO} = -6$;

g) 

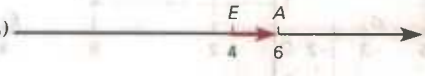
$\overline{OC} = -2$;

h) 

$\overline{CO} = 2$;

i)

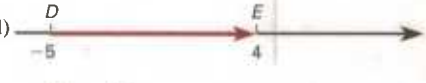
$\overline{AE} = -2$;

j) 

$\overline{EA} = 2$;

k)

$\overline{ED} = -9$;

l) 

$\overline{DE} = 9$;

m)

$\overline{CD} = -3$;

n)

$\overline{OE} = 4$;

o)

$\overline{EO} = -4$;

p)

$\overline{OD} = -5$.

B.2 $B(13)$. **B.3** $B(-1)$. **B.4** a) $\frac{1}{2}$; b) 2. **B.5** a) -3; b) $-\frac{1}{3}$. **B.6** a) $\frac{1}{3}$; b) 3; c) 1; d) 1; e) $-\frac{4}{3}$; f) $-\frac{3}{4}$; g) 0; h) não existe.

B.7 a) $C(50)$; b) $C(114)$; c) $C(10)$; d) $C(2)$. **B.8** a) $C(23)$; b) $C(50)$; c) $C\left(-\frac{2}{5}\right)$; d) $C(-4)$. **B.9** $P(3)$, $Q\left(\frac{11}{2}\right)$ e $T(8)$.

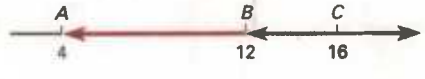
B.10 $C\left(\frac{7}{5}\right)$, $D\left(\frac{19}{5}\right)$, $E\left(\frac{31}{5}\right)$ e $F\left(\frac{43}{5}\right)$. **B.11** a) $M(10)$; b) $M(4)$; c) $M(1)$; d) $M\left(-\frac{3}{2}\right)$; e) $M\left(\frac{5}{6}\right)$; f) $M(5)$; g) $M(-4)$; h) $M\left(-\frac{15}{2}\right)$; i) $M\left(\frac{4}{15}\right)$. **B.12** $A'(13)$. **B.13** $A'\left(-\frac{12}{5}\right)$. **B.14** a) $AB = 5$; b) $BA = 5$; c) $AB = 5$; d) $AC = 8$; e) $CB = 13$; f) $BC = 13$. **B.15** a) $AB = \frac{13}{2}$; b) $BA = \frac{13}{2}$; c) $AB = \frac{13}{2}$; d) $AC = \frac{5}{2}$; e) $CA = \frac{5}{2}$; f) $AC = \frac{5}{2}$. **B.16** $B(15)$ ou $B(3)$.

B.17 $B\left(\frac{13}{2}\right)$ ou $B\left(-\frac{19}{2}\right)$.

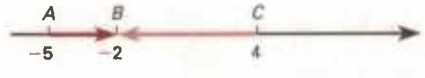
B.18

a)

$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 2$ e $\frac{AB}{BC} = 2$;

b) 

$\frac{\overline{BA}}{\overline{CB}} = 2$ e $\frac{BA}{CB} = 2$.

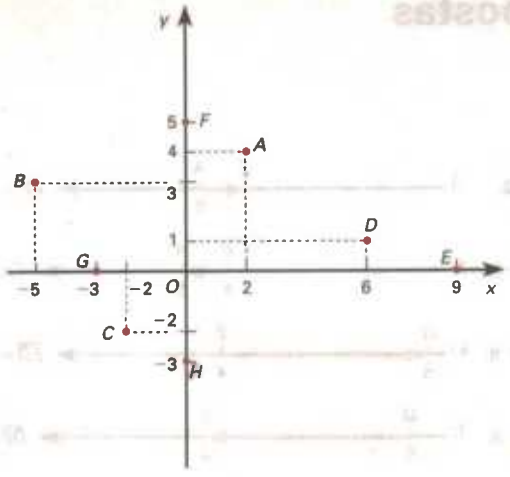
B.19 a) 

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = -\frac{1}{2}$ e $-\frac{AB}{CB} = -\frac{1}{2}$;

b)

$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = -\frac{1}{2}$ e $-\frac{BA}{BC} = -\frac{1}{2}$.

B.20



B.21 $\forall x, x \in \mathbb{R}, 2 < x < 3$.

B.22 $\forall x, x \in \mathbb{R}, \frac{16}{3} < x < 6$.

B.23 $k = \frac{1}{4}$.

B.24 $k = 0$ ou $k = 3$.

B.25 $k = 1$ ou $k = -\frac{1}{2}$.

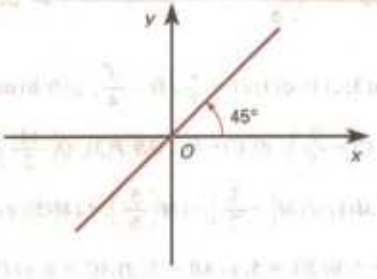
B.26 $k = 1$ ou $k = 0$.

Exercícios complementares

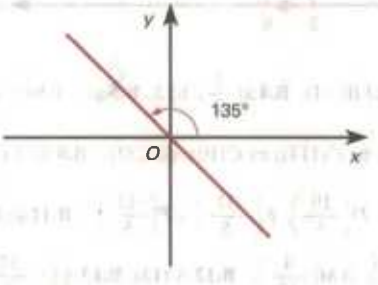
C.1 $x = 1$ ou $x = 6$. **C.2** $P\left(\frac{17}{4}\right)$. **C.3** $k = -\frac{5}{3}$. **C.4** $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} < 0$, pois $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ têm sentidos opostos. Logo, $-\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} > 0$

$\therefore \left|\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right| = -\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \therefore \frac{\left|\overline{AC}\right|}{\left|\overline{CB}\right|} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \therefore \frac{AC}{CB} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ (c.q.d.). **C.5** Basta supor que P pertence ao quarto quadrante e mostrar que não existe x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaça essa condição. **C.6** $\forall x, x \in \mathbb{R}, \frac{5}{2} < x < 3$.

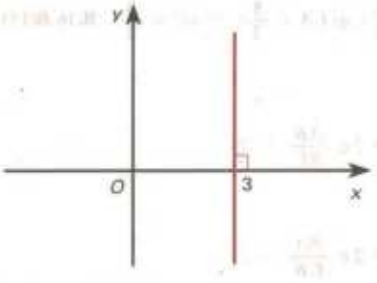
C.7 a)



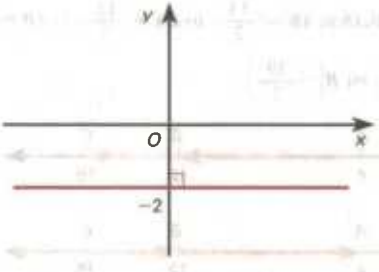
b)



c)



d)



Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** d. **V.3** a.

Capítulo 2

Exercícios básicos

B.1 a) $AB = 5$; b) $AB = 10$; c) $AB = 2\sqrt{5}$; d) $AB = 13$; e) $AB = 5$; f) $AB = \sqrt{2}$. **B.2** a) $6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$; b) basta mostrar que o quadrado da medida do maior lado é **igual** à soma dos quadrados das medidas dos outros lados.

B.3 a) $4\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$; b) basta mostrar que o quadrado da medida do maior lado é **maior** do que a soma dos quadrados das medidas dos outros lados. **B.4** Há dois pontos possíveis: $P(0, 3)$ e $P'(0, -13)$. **B.5** Há dois pontos possíveis: $P(4, 0)$ e $P'(-20, 0)$. **B.6** Há dois pontos possíveis: $P(0, 0)$ e $P'(3, -3)$. **B.7** Há duas possibilidades: $P(3, 3)$ e $Q(7, 0)$ ou $P(-3, -3)$ e $Q(1, 0)$. **B.8** a) $\frac{1}{3}$; b) $-\frac{4}{3}$; c) $-\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $-\frac{3}{2}$; f) $-\frac{1}{4}$. **B.9** a) $C\left(3, \frac{20}{3}\right)$; b) $C(5, 7)$; c) $C(2, 0)$; d) $C\left(\frac{28}{5}, \frac{101}{5}\right)$; e) $C\left(2, \frac{19}{2}\right)$; f) $C(9, -6)$. **B.10** $P\left(6, \frac{7}{3}\right)$ e $Q\left(8, \frac{11}{3}\right)$. **B.11** $P(0, 3)$, $Q(3, 4)$ e $T(6, 5)$. **B.12** a) $M(6, 8)$; b) $M(1, -3)$; c) $M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{5}\right)$; d) $M(8, 5)$; e) $M(2, -2)$; f) $M\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{6}\right)$. **B.13** a) $A'(-7, -6)$; b) $A'(6, 4)$. **B.14** $C(6, 9)$ e $D(3, 8)$. **B.15** a) 5; b) 13. **B.16** a) $G(6, 1)$; b) $G\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. **B.17** $C(-4, 7)$. **B.18** $A\left(-2, \frac{6}{7}\right)$, $B\left(1, \frac{12}{7}\right)$ e $C\left(4, \frac{24}{7}\right)$.

Exercícios complementares

C.1 $x = 0$ ou $x = 1$. **C.2** $C\left(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right)$ ou $C\left(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\right)$. **C.3** $(13, -3)$. **C.4** $(0, 0)$. **C.5** $(0, 7)$ e $(4, 7)$. **C.6** Há duas possibilidades: $C(5, 4)$ e $D(3, 2)$ ou $C(1, 8)$ e $D(-1, 6)$. **C.7** $36 + 2\sqrt{82}$. **C.8** $4\sqrt{2}$.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** d. **V.3** a. **V.4** d. **V.5** e (a abscissa de C é 2).

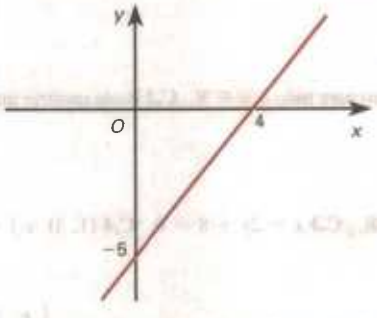
Capítulo 3

Exercícios básicos

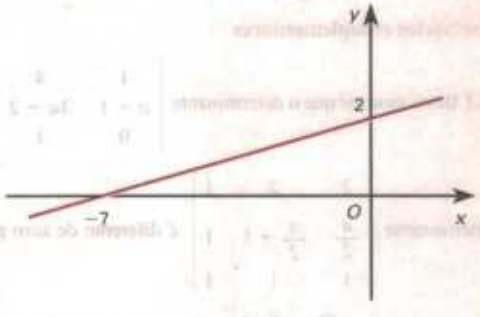
B.1 a) são colineares; b) não são colineares; c) são colineares; d) não são colineares. **B.2** Sim, pois o determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$ é igual a zero. **B.3** $p = 9$ ou $p = 1$. **B.4** $a = 0$ ou $a = -2$. **B.5** $\forall h, h \in \mathbb{R}, h \neq 2$. **B.6** a) $3x - 2y + 2 = 0$; b) $5x - 3y - 1 = 0$; c) $x - 3y + 3 = 0$; d) $x - 2y - 1 = 0$. **B.7** $3x - y - 6 = 0$. **B.8** $x - 2y + 4 = 0$. **B.9** $x = 0$.

B.10 $r: x - 5 = 0$; $s: y - 5 = 0$.

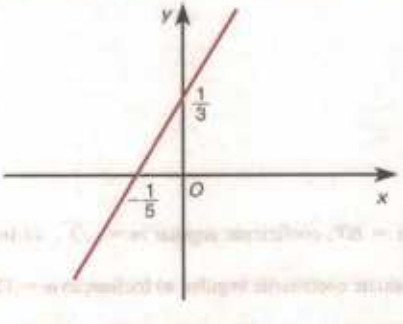
B.11 a)



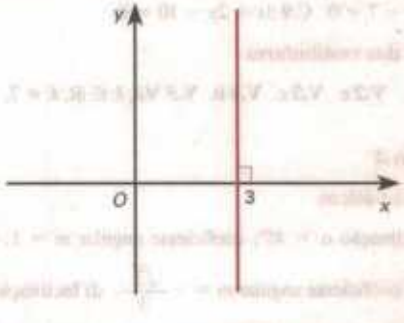
b)



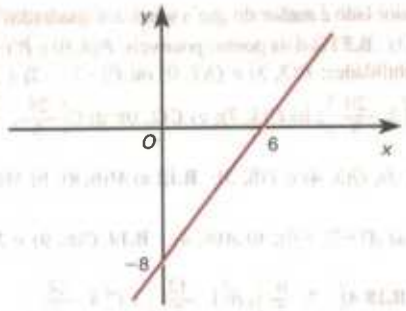
c)



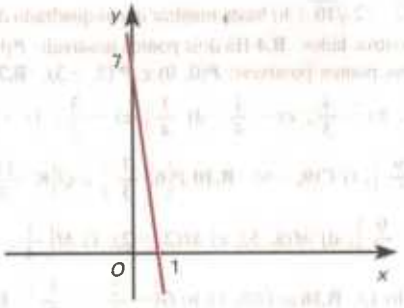
d)



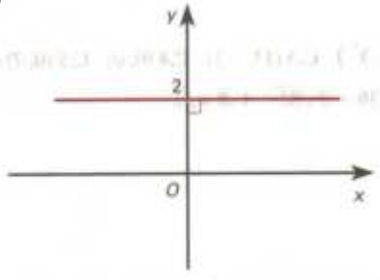
e)



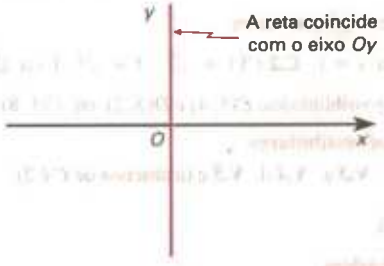
f)



g)



h)



B.12 $D = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$. Como $D \neq 0$, temos que r e s são concorrentes e que $r \cap s = \{(1, 1)\}$. **B.13** As retas são concorrentes e $r \cap s = \{(5, -4)\}$. **B.14** $\forall a,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 6$. **B.15** $\forall a,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 2$ e $a \neq -2$. **B.16** $r \cap s = \left\{\left(\frac{9}{11}, \frac{23}{11}\right)\right\}$. **B.17** $r \cap Oy = \left\{\left(0, \frac{5}{2}\right)\right\}$. **B.18** $r \cap s = \{(-3, 4)\}$. **B.19** $r \cap s = \{(-1, -1)\}$.

Exercícios complementares

C.1 Basta mostrar que o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a-1 & 3a-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ é igual a zero para todo a, $a \in \mathbb{R}$. **C.2** Basta mostrar que o determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2}+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ é diferente de zero para todo a, $a \in \mathbb{R}$. **C.3** $x - 2y + 8 = 0$. **C.4** $(1, 3)$ e $(-1, -1)$. **C.5** $(1, -2)$ e $\left(-\frac{22}{5}, \frac{71}{5}\right)$. **C.6** $8(\sqrt{5} + 1)$. **C.7** Obtenha os vértices do triângulo resolvendo os sistemas $\begin{cases} r \\ s, \end{cases} \begin{cases} r \\ t, \end{cases} \begin{cases} s \\ t. \end{cases}$ A seguir, mostre que o quadrado da medida do maior lado é **igual** à soma dos quadrados das medidas dos outros dois. **C.8** $x + y - 7 = 0$. **C.9** $3x + 2y - 10 = 0$.

Questões dos vestibulares

V.1 $2\sqrt{5}$. **V.2** e. **V.3** c. **V.4** b. **V.5** $\forall k,\ k \in \mathbb{R},\ k \neq 7$.

Capítulo 4

Exercícios básicos

B.1 a) Inclinação $\alpha = 45°$; coeficiente angular $m = 1$. b) Inclinação $\alpha = 60°$; coeficiente angular $m = \sqrt{3}$. c) Inclinação $\alpha = 150°$; coeficiente angular $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. d) Inclinação $\alpha = 90°$; não existe coeficiente angular. e) Inclinação $\alpha = 120°$; coeficiente angular $m = -\sqrt{3}$. f) Inclinação $\alpha = 0°$; coeficiente angular $m = 0$. g) Inclinação $\alpha = 45°$; coeficiente angular $m = 1$.

B.2 a) $m = 4$; b) $m = -3$; c) $m = -\frac{3}{2}$; d) $m = 0$; e) não existe; f) $m = \frac{4}{3}$; g) $m = -\frac{1}{2}$; h) $m = -\frac{3}{2}$; i) $m = 0$; j) não existe. **B.3** $\alpha = 45°$. **B.4** $\alpha = 60°$. **B.5** $a = \sqrt{3} + 3$. **B.6** $a = \sqrt{3} + 3$. **B.7** a) são colineares; b) são colineares; c) são colineares; d) não são colineares; e) são colineares; f) são colineares; g) são colineares; h) não são colineares. **B.8** a) $3x + y - 10 = 0$; b) $2x - y + 8 = 0$; c) $x + 2y - 4 = 0$; d) $6x + 15y - 19 = 0$; e) $4x + y + 1 = 0$; f) $6x - 2y + 7 = 0$; g) $3x + y + 3 = 0$; h) $6x - y = 0$. **B.9** a) $x - y - 2 = 0$; b) $\sqrt{3}x + 3y - 6 - \sqrt{3} = 0$; c) $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$; d) $x + y - 3 = 0$; e) $\sqrt{3}x - y = 0$. **B.10** a) r: $y = 4$; b) s: $x = 4$. **B.11** a) $x - y + 5 = 0$; b) $2x + y - 10 = 0$; c) $3x - y + 21 = 0$; d) $5x + 2y - 17 = 0$. **B.12** a) $y - 2 = m(x - 5)$, $m \in \mathbb{R}$ ou $x = 5$; b) $y - 1 = m(x + 3)$, $m \in \mathbb{R}$ ou $x = -3$; c) $y = m(x - 4)$, $m \in \mathbb{R}$ ou $x = 4$; d) $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ ou $x = 0$. **B.13** $x - y - 1 = 0$. **B.14** $5x + 4y - 25 = 0$. **B.15** $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3)$. **B.16** $y = 8$. **B.17** $x = -8$.

Exercícios complementares

C.1 $\sqrt{3}x + 3y - 5\sqrt{3} = 0$. **C.2** $3x + y - 12 = 0$. **C.3** $x + y - 8 = 0$. **C.4** Há duas retas possíveis, r: $8x - y - 4 = 0$ e s: $2x - y + 2 = 0$. **C.5** Há duas retas possíveis, t: $3x - y - 1 = 0$ e t': $x + y - 3 = 0$. **C.6** Há duas retas possíveis, t: $2x - y + 1 = 0$ e t': $x - 2y + 2 = 0$. **C.7** Há duas retas possíveis, t: $3x + y - 18 = 0$ e t': $3x - y - 6 = 0$.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** e. **V.3** $m = 20$. **V.4** d.

Capítulo 5

Exercícios básicos

B.1 a) $y = -8x + 36$ e $8x + y - 36 = 0$; b) $y = \frac{3x}{2} + 3$ e $3x - 2y + 6 = 0$; c) $y = 0$ e $y = 0$; d) $y = -4x + 1$ e $4x + y - 1 = 0$; e) $y = x$ e $x - y = 0$; f) $y = 3$ e $y - 3 = 0$. **B.2** a) coeficiente angular $m = 3$ e coeficiente linear $q = -\frac{5}{2}$; b) $m = -\frac{3}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$; c) $m = -4$ e $q = 0$; d) $m = -\frac{2}{5}$ e $q = \frac{1}{5}$; e) $m = 0$ e $q = 5$. **B.3** a) $m = 3$ e $q = -6$; b) $m = -\frac{2}{3}$ e $q = \frac{7}{3}$; c) não existe m e não existe q; d) $m = \frac{1}{9}$ e $q = 1$; e) $m = -4$ e $q = 3$; f) $m = 0$ e $q = 3$. **B.4** a) paralelas distintas; b) paralelas coincidentes; c) concorrentes; d) paralelas distintas; e) concorrentes. **B.5** $a = \frac{1}{2}$. **B.6** $\forall a$, $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq \frac{3}{8}$. **B.7** a) $a = 0$; b) paralelas distintas. **B.8** não existe a. **B.9** $\forall a$, $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq -\frac{1}{3}$. **B.10** $x - y + 4 = 0$. **B.11** $\sqrt{3}x - y = 0$. **B.12** a) $3x + y = 0$; b) $2x + y - 3 = 0$; c) $2x - 3y + 2 = 0$; d) $x - y + 3 = 0$; e) $4x + 2y + 9 = 0$; f) $6x + 15y - 13 = 0$. **B.13** $3x + 4y - 11 = 0$. **B.14** $3x + y - 8 = 0$. **B.15** a) são perpendiculares; b) são perpendiculares; c) não são perpendiculares; d) não são perpendiculares; e) são perpendiculares; f) são perpendiculares. **B.16** $y = -x - 3$. **B.17** a) $x + 2y - 7 = 0$; b) $5x + y - 44 = 0$; c) $3x + 4y - 9 = 0$; d) $x + 6y - 5 = 0$; e) $6x + y - 1 = 0$; f) $4x + 6y - 7 = 0$. **B.18** a) $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$; b) $y = x$; c) $y = \frac{x}{3} - 3$; d) $y = \frac{3x}{4} - \frac{7}{8}$; e) $y = 5$. **B.19** a) $P'(-2, 14)$; b) $P'(4, -4)$; c) $P'(1, 12)$; d) $P'(7, 4)$.

Exercícios complementares

C.1 $y = 2x - 4$. **C.2** $4x + y - 30 = 0$. **C.3** (3, 9), (5, 15) e (6, 17). **C.4** $q = 4$ ou $q = -4$. **C.5** Há quatro losangos possíveis: um de vértices (0, 0), (6, 1), (1, 6) e (7, 7); um de vértices (0, 0), (−6, −1), (−1, −6) e (−7, −7); outro de vértices (0, 0), (1, 6), (−5, 5) e (6, −1); e o quarto com vértices (0, 0), (−1, −6), (5, −5) e (6, 1). **C.6** $x - 3y - 3 = 0$. **C.7** Há dois quadrados possíveis: o de vértices (0, 0), (3, −1), (4, 2) e (1, 3); e o de vértices (0, 0), (3, −1), (2, −4) e (−1, −3). **C.8** a) mediatriz de $\overline{AB}$: $3x + 4y - 11 = 0$; mediatriz de $\overline{BC}$: $14x + 2y - 18 = 0$; b) basta obter a intersecção das mediatrizes do item (a): $C(1, 2)$. **C.9** a) $x + 4y + 32 = 0$; b) $x - y + 2 = 0$; c) $(-8, -6)$.

Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** $ax - a^2y = 0$. **V.3** e. **V.4** b. **V.5** e. **V.6** d.

Capítulo 6

Exercícios básicos

B.1 a) 3; b) 2; c) $\frac{13\sqrt{5}}{5}$; d) 3; e) $\frac{17}{10}$; f) 1; g) $\frac{4}{5}$; h) 3. **B.2** a) 1; b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; c) 2; d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.3** a) $\frac{47}{13}$; b) $3\sqrt{2}$. **B.4** a) 4; b) 3; c) $\frac{3}{2}$. **B.5** 27. **B.6** 6. **B.7** $\frac{39}{2}$. **B.8** 1. **B.9** 24. **B.10** 12.

Exercícios complementares

C.1 $(-5, 0)$ e $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$. **C.2** $(0, -6)$ e $(0, -8)$. **C.3** $(1, 4)$ e $\left(-\frac{71}{7}, -\frac{50}{7}\right)$. **C.4** $\frac{1}{10}$. **C.5** $2x + 5y + 3 = 0$. **C.6** $t: x + y - 4 = 0$ e $u: 5x - 5y - 2 = 0$. **C.7** Há dois losangos possíveis. Em um deles as retas que contêm as diagonais são $u: x + y = 0$ e $v: x - y - 2 = 0$. No outro, $u': x - y = 0$ e $v': x + y - 6 = 0$. **C.8** $x = 0$ ou $x = 4$. **C.9** $k = 6$. **C.10** $a = 2$ ou $a = -2$.

Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** a. **V.3** $2\sqrt{5}$. **V.4** e. **V.5** e.

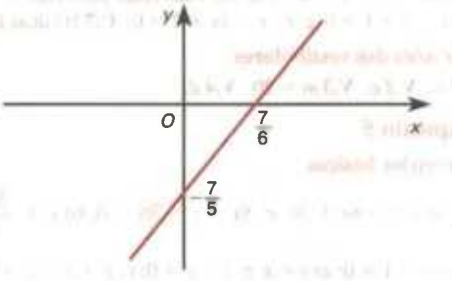
Capítulo 7

Exercícios básicos

B.1 a) $5x + 2y - 10 = 0$; b) $2x - y + 4 = 0$; c) $x - 3y - 3 = 0$; d) $x + y - 1 = 0$; e) $3x + 2y + 6 = 0$; f) $3x - y = 0$.

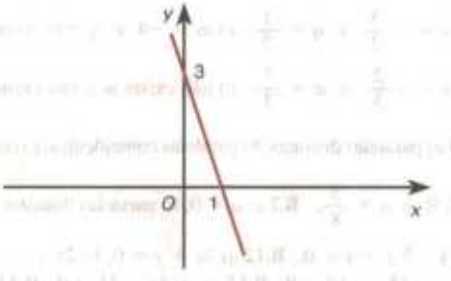
B.2 a)

$$\frac{x}{\frac{7}{6}} + \frac{y}{-\frac{7}{5}} = 1$$



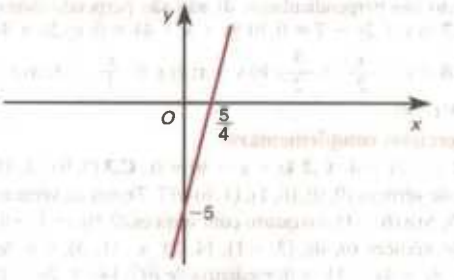
b)

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$$



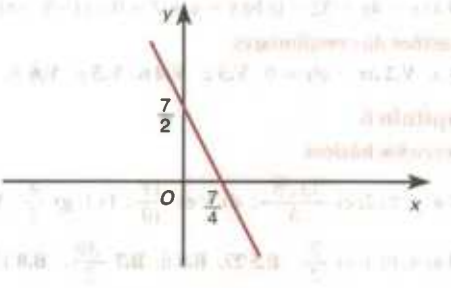
c)

$$\frac{x}{\frac{5}{4}} + \frac{y}{-5} = 1$$



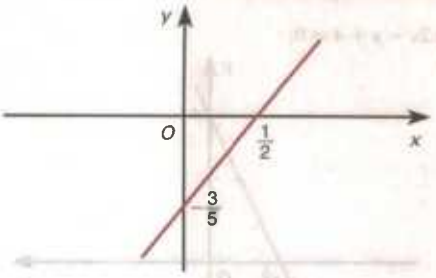
d)

$$\frac{x}{\frac{7}{4}} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$$



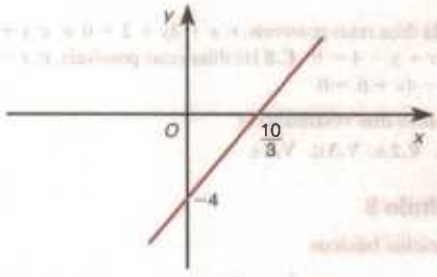
e)

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-\frac{3}{5}} = 1$$



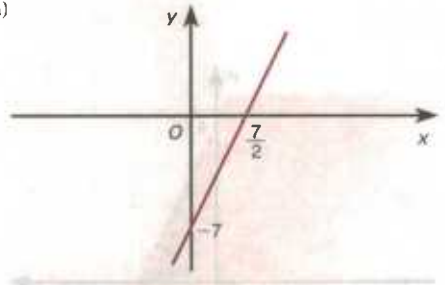
f)

$$\frac{x}{\frac{10}{3}} + \frac{y}{-4} = 1$$

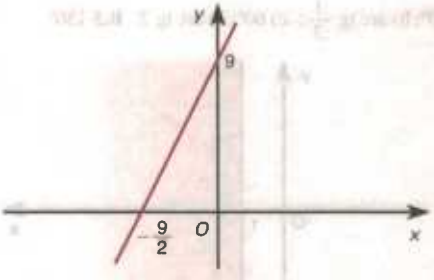


B.3 a) $3x - y + 17 = 0$; b) $2x - y - 6 = 0$; c) $x - 2y + 9 = 0$; d) $9x - 30y + 19 = 0$.

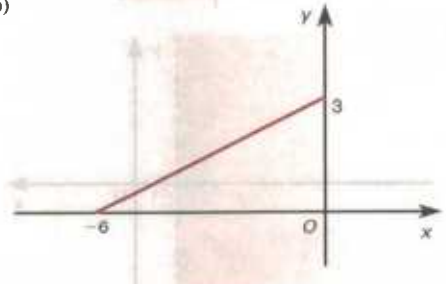
B.4 a)



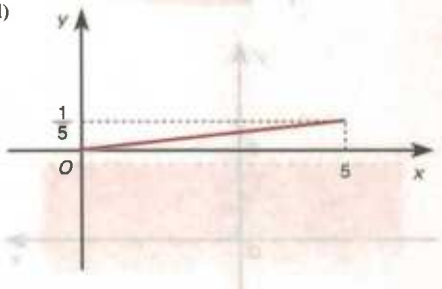
c)



b)



d)

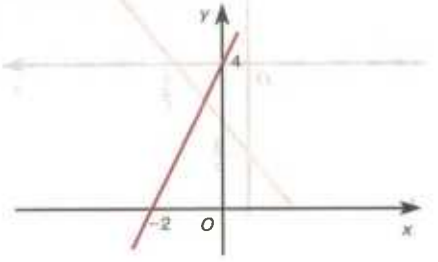


B.5 a) $5x - 12y + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$; b) $5x - 12y - 3 = 0$, $5x - 12y - 55 = 0$; c) $5x - 12y + 33 = 0$. **B.6** a) $3x - 4y + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$; b) $3x - 4y + 4 = 0$, $3x - 4y - 26 = 0$; c) $3x - 4y = 0$. **B.7** a) $\alpha(x - 8) + \beta(y - 1) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$; b) $\alpha(x + 3) + \beta(y - 4) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$; c) $\alpha x + \beta y = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$; d) $\alpha(x - 4) + \beta(y - 3) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$; e) $\alpha(x - 1) + \beta(y + 4) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$; f) $\alpha(x + 1) + \beta(y + 1) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. **B.8** a) $\alpha(x + 3y - 1) + \beta(2x - y + 5) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$; b) $\alpha(x - 4y) + \beta(x + y - 1) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$; c) $\alpha(2x - 3y) + \beta(3x + y - 2) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$; d) $\alpha(x - y - 1) + \beta(x + 4y + 1) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$; e) $\alpha(4x + 5y) + \beta(x - y) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$; f) $\alpha(6x - y - 1) + \beta(x + 3y) = 0$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. **B.9** a) $(1, -1)$; b) $(-2, 2)$; c) $(3, 1)$; d) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

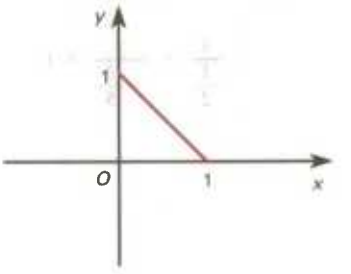
Exercícios complementares

C.1 a) $2x - y + 4 = 0$;

b)



C.2 $a = 6$. **C.3**



C.4 Há duas retas possíveis, r: $x + 2y + 2 = 0$ e s: $x + 2y - 2 = 0$. **C.5** $2x + y + 3 = 0$. **C.6** $x + 2y - 4 = 0$.
C.7 $2x + y - 4 = 0$. **C.8** Há duas retas possíveis, r: $x - 5 = 0$ e s: $3x + 4y - 15 = 0$. **C.9** Há duas retas possíveis, r: $y = 3$ e s: $3x - 4y + 6 = 0$.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** a. **V.3** d. **V.4** e.

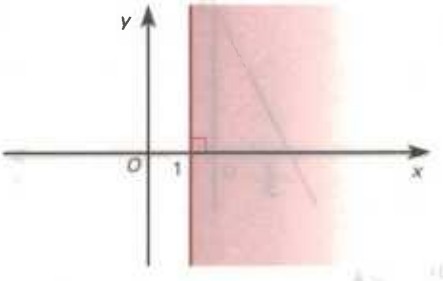
Capítulo 8

Exercícios básicos

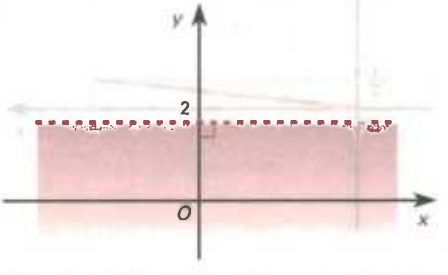
B.1 a) 45°; b) arc tg $\frac{5}{3}$; c) 60°; d) arc tg 7. **B.2** a) 135°; b) 180° − arc tg $\frac{5}{3}$; c) 150°; d) 180° − arc tg $\frac{2}{3}$. **B.3** arc tg $\frac{3}{4}$.

B.4 a) 30°; b) arc tg $\frac{1}{3}$; c) 60°; d) arc tg 2. **B.5** 150°.

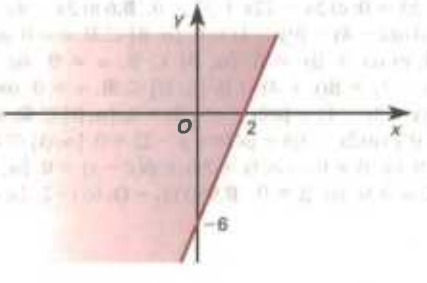
B.6 a)



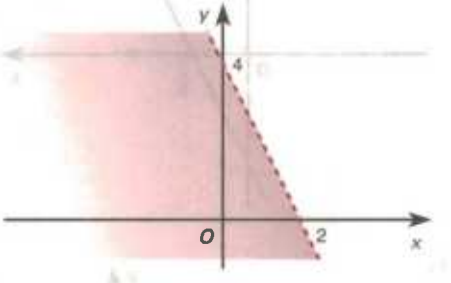
b)



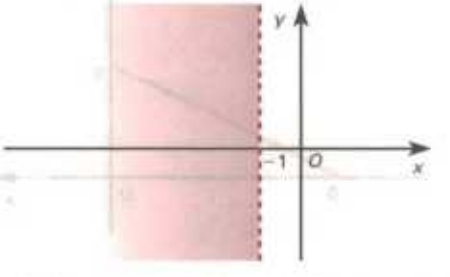
c)



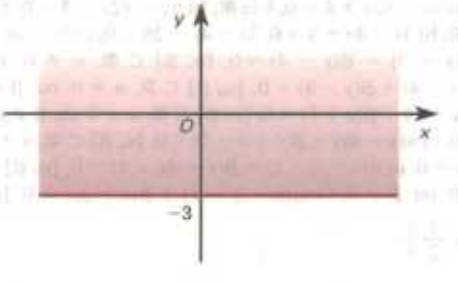
d)



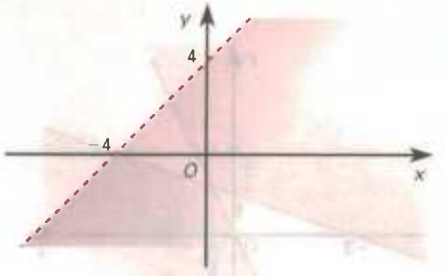
e)



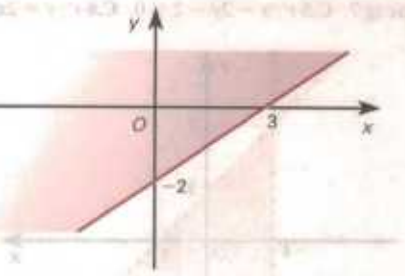
f)



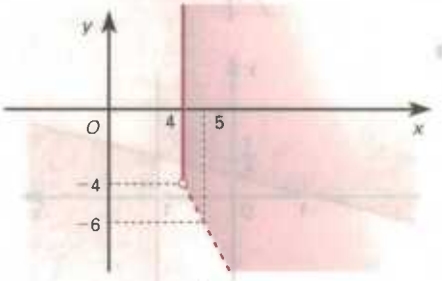
g)



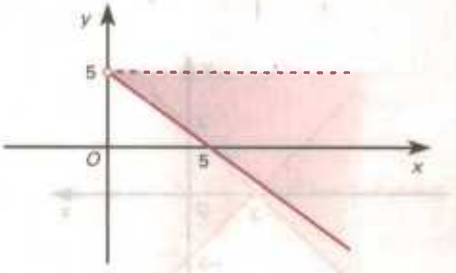
h)



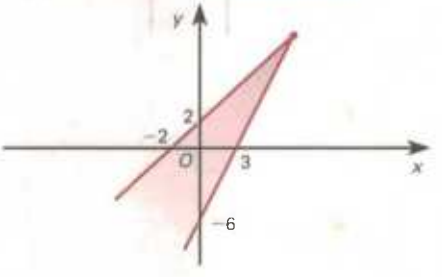
B.7 a)



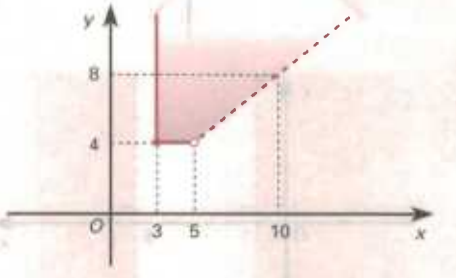
c)



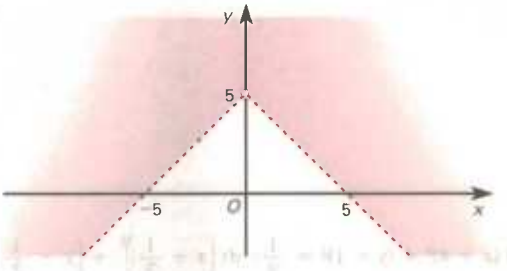
b)



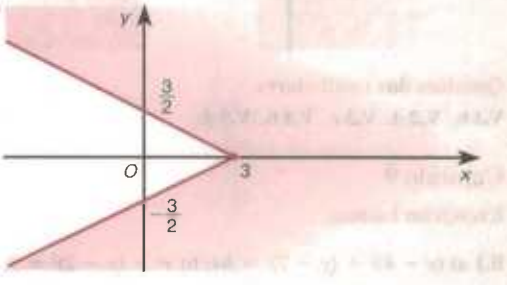
d)



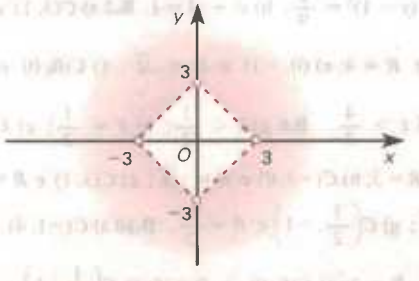
B.8 a)



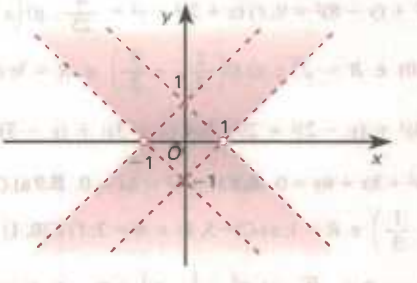
b)



B.9 a)



b)

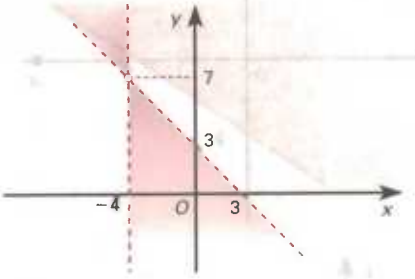


Exercícios complementares

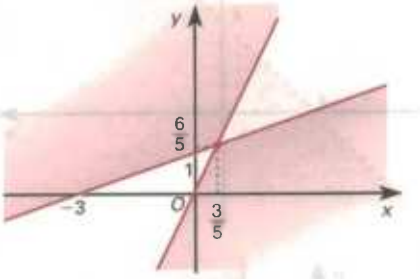
C.1 $x_p = 30$. **C.2** Há duas retas possíveis, s: $y = \frac{2\sqrt{3}\,x}{10} + \frac{20 - 2\sqrt{3}}{10}$ e t: $y = -\frac{\sqrt{3}\,x}{2} + \frac{4 + \sqrt{3}}{2}$. **C.3** 45°, 45° e 90°.

C.4 arc tg 7. **C.5** r': $x - 2y - 2 = 0$. **C.6** r': $y = 2x + 2$.

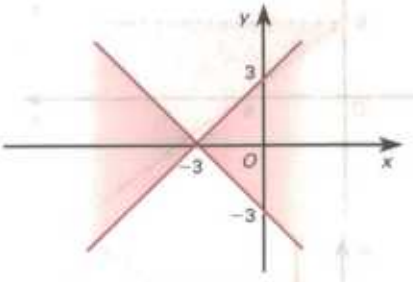
C.7



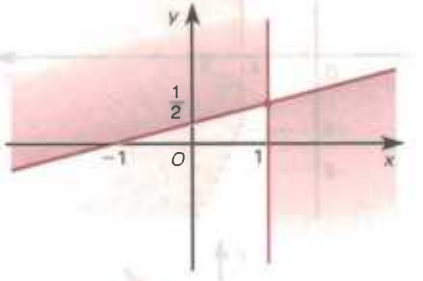
C.8



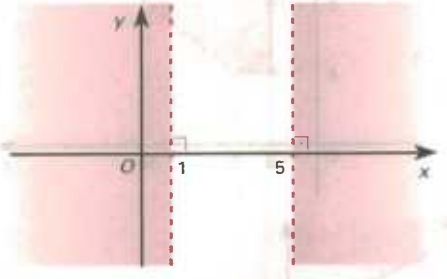
C.9



C.10



C.11



Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** d. **V.3** e. **V.4** b. **V.5** d.

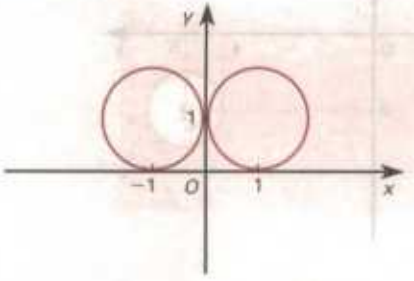
Capítulo 9

Exercícios básicos

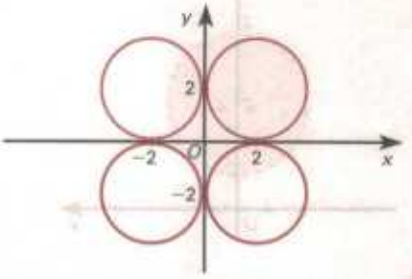
B.1 a) $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 64$; b) $x^2 + (y - 2)^2 = 7$; c) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{9}$; d) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$; e) $(x - 1)^2 + (y - 8)^2 = 9$; f) $(x + 2)^2 + y^2 = \frac{4}{25}$; g) $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{2}{9}$; h) $x^2 + y^2 = 1$. **B.2** a) $C(3, 1)$ e $R = 5$; b) $C(-5, 0)$ e $R = \sqrt{3}$; c) $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ e $R = 3$; d) $C(1, 3)$ e $R = 4$; e) $(0, -1)$ e $R = \sqrt{2}$; f) $C(0, 0)$ e $R = 2$. **B.3** $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 29$. **B.4** $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$. **B.5** $k > \frac{4}{3}$. **B.6** a) $k < \frac{1}{2}$; b) $k = \frac{1}{2}$; c) $k > \frac{1}{2}$. **B.7** $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$. **B.8** $x^2 + y^2 - 6x = 0$. **B.9** a) $C(1, -2)$ e $R = 3$; b) $C(-3, 0)$ e $R = \sqrt{3}$; c) $C(3, 1)$ e $R = \sqrt{10}$; d) $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ e $R = 1$; e) $C(-5, 1)$ e $R = 2$; f) $C(0, 1)$ e $R = \sqrt{6}$; g) $C\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e $R = \frac{1}{2}$. **B.10** a) $C(-1, 4)$ e $R = 3$; b) $C(0, 3)$ e $R = \sqrt{5}$; c) $C\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ e $R = 1$; d) $C(-5, 10)$ e $R = 2$; e) $C(6, 0)$ e $R = 6$; f) $C\left(\frac{1}{5}, 1\right)$ e $R = 1$. **B.11** $x^2 + (y - 2)^2 = 25$. **B.12** $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 13$. **B.13** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$. **B.14** $(x - 5)^2 + y^2 = 25$. **B.15** $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$. **B.16** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. **B.17** e. **B.18** $k > 1$. **B.19** $k = 1$ e $m > 3$. **B.20** $2x + 5y - 16 = 0$. **B.21** $y = -2x + 1$.

Exercícios complementares

C.1

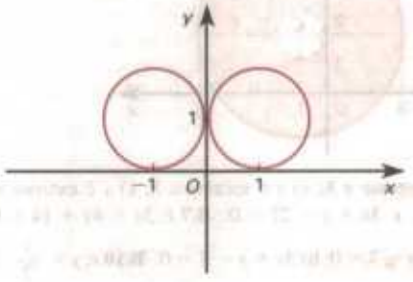


C.2



C.3 a) $C\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e $R = 3$; b) $C\left(\frac{1}{3}, -3\right)$ e $R = \frac{1}{3}$. **C.4** $k = 6$. **C.5** $k = 3$ ou $k = -3$. **C.6** $k < -3$ ou $k > 3$.

C.7

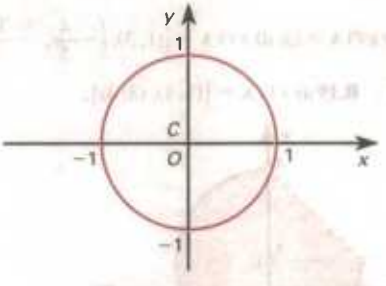


C.8 $m = 3$ e $k = 27$.

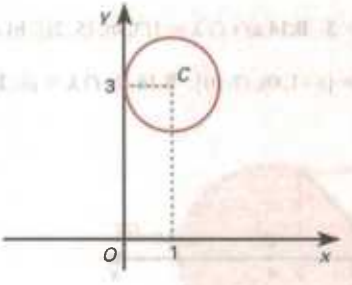
C.9 $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = \frac{17}{9}$.

C.10 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

C.11



C.12



Questões dos vestibulares

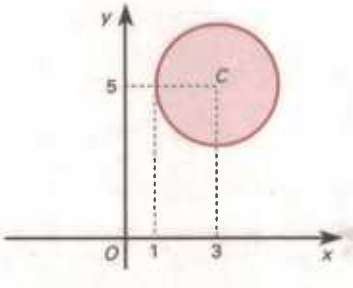
V.1 c. **V.2** b. **V.3** c. **V.4** a. **V.5** a.

Capítulo 10

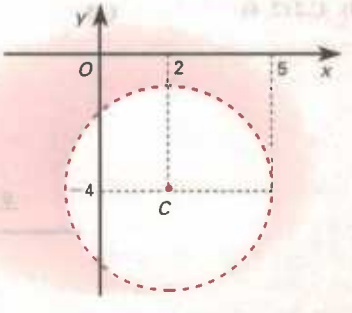
Exercícios básicos

B.1 a) P é interior a λ; b) P é exterior a λ; c) P pertence a λ; d) P é exterior a λ; e) P pertence a λ; f) P é interior a λ.

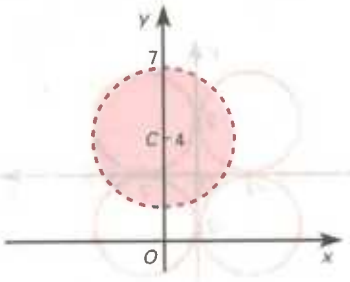
B.2 a)



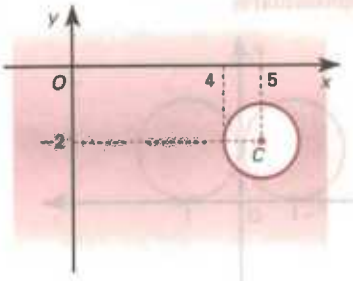
b)



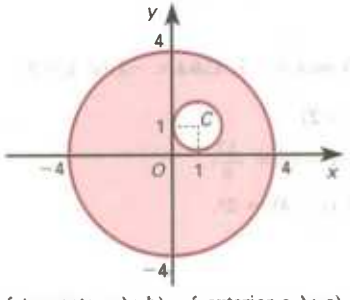
c)



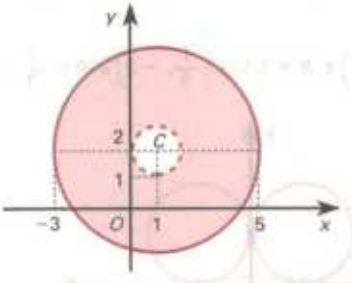
d)



B.3 a)



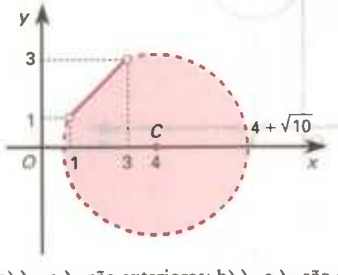
b)



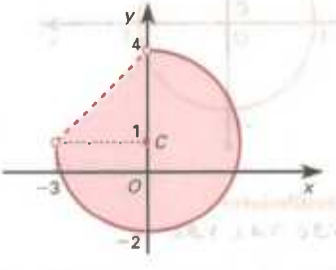
B.4 a) s é tangente a λ; b) s é exterior a λ; c) s é secante a λ; d) s é tangente a λ; e) s é secante a λ; f) s é exterior a λ. **B.5** $r: x + 2y - 2 = 0$ e $s: x + 2y - 12 = 0$. **B.6** $r: 3x + y + 13 = 0$ e $s: 3x + y - 27 = 0$. **B.7** $r: 3x + 4y + 14 = 0$ e $s: 3x + 4y - 16 = 0$. **B.8** $r: x + y - 1 = 0$ e $s: x + y - 9 = 0$. **B.9** a) $x + y - 7 = 0$; b) $3x + y - 5 = 0$. **B.10** $r: y = \frac{x}{2} + 4$ e $s: y = -2x + 4$. **B.11** $r: y = -\frac{x}{3} + 5$ e $s: y = 3x + 5$. **B.12** $r: y = \frac{x}{7} + 2$ e $s: y = -x + 2$. **B.13** $r: y = 2x + 1$ e $s: y = -2x - 3$. **B.14** a) $s \cap \lambda = \{(3, 0), (5, 2)\}$; b) $s \cap \lambda = \{(-1, 0)\}$; c) $s \cap \lambda = \varnothing$; d) $s \cap \lambda = \left\{(1, 3), \left(-\frac{4}{5}, -\frac{12}{5}\right)\right\}$.

B.15 $Ox \cap \lambda = \{(-1, 0), (7, 0)\}$. **B.16** $Oy \cap \lambda = \varnothing$. **B.17** $\sqrt{2}$. **B.18** $2\sqrt{5}$. **B.19** a) $s \cap \lambda = \{(1, 1), (3, 3)\}$;

b)



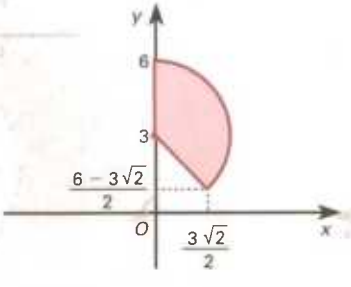
B.20



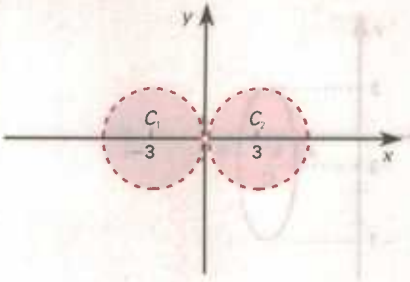
B.21 a) λ_1 e λ_2 são exteriores; b) λ_1 e λ_2 são secantes; c) λ_1 e λ_2 são tangentes exteriormente; d) λ_1 e λ_2 são exteriores; e) λ_1 e λ_2 são secantes; f) λ_2 é interior a λ_1. **B.22** $\lambda_1: x^2 + (y - 3)^2 = 9$ e $\lambda_2: x^2 + (y - 3)^2 = 529$. **B.23** $\lambda_1: x^2 + y^2 = 8$ e $\lambda_2: x^2 + y^2 = 32$. **B.24** $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{(2, 3)\}$. **B.25** $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \{(0, -2), (2, 2)\}$. **B.26** $\lambda_1 \cap \lambda_2 = \varnothing$.

Exercícios complementares

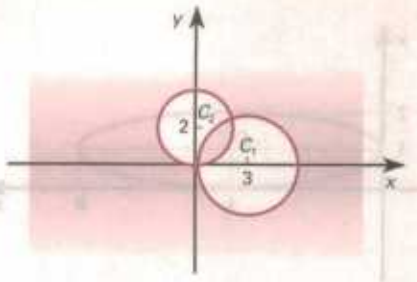
C.1 $(7, -3)$. **C.2** $(2, 4)$. **C.3**



C.4



C.5



C.6 $-26 < m < 4$. **C.7** Há duas circunferências possíveis, λ_1: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = \frac{121}{25}$ e λ_2: $\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1936}{225}$. **C.8** $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$. **C.9** $2 < R < 8$. **C.10** $-9 < k < 3$.

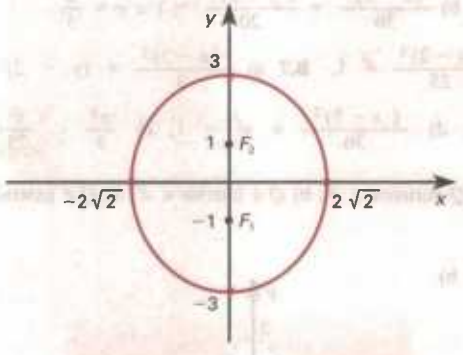
Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** a. **V.3** a. **V.4** b. **V.5** e. **V.6** c. **V.7** a. **V.8** c.

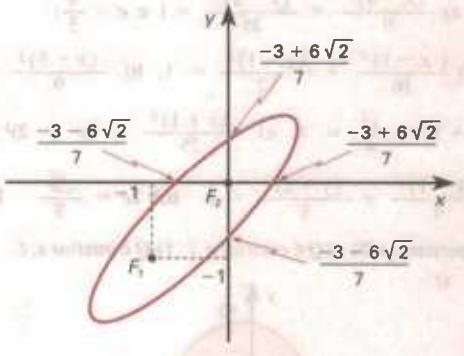
Capítulo 11

Exercícios básicos

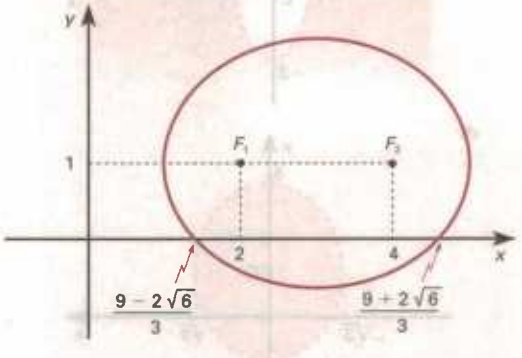
B.1 a) $9x^2 + 8y^2 - 72 = 0$



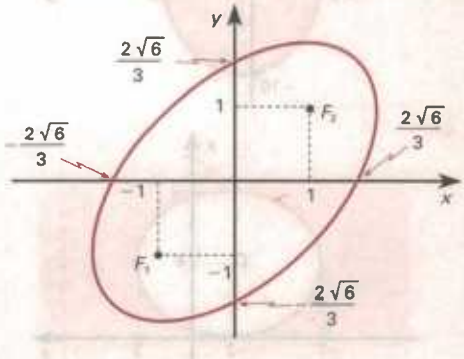
b) $7x^2 + 7y^2 - 2xy + 6x + 6y - 9 = 0$



c) $3x^2 + 4y^2 - 18x - 8y + 19 = 0$

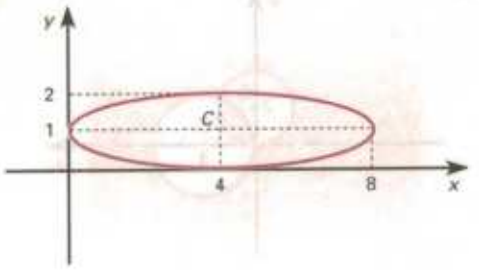


d) $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8 = 0$

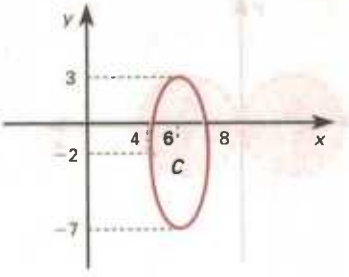


B.2 a) $F_1F_2 = 2c = 6$, $e = \frac{3}{5}$ e $2b = 8$; b) $F_1F_2 = 2c = 10$, $e = \frac{5}{13}$ e $2b = 24$. **B.3** a) $\frac{(x-9)^2}{25} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$; b) $\frac{(x+6)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{36} = 1$; c) $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; d) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$.

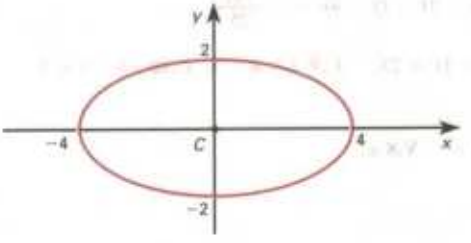
B.4 a)



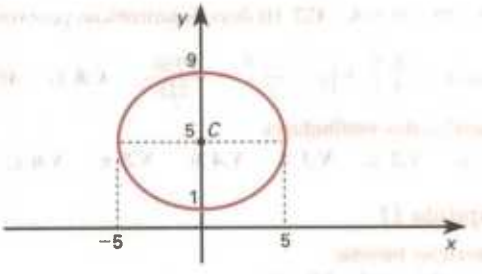
b)



c)



d)



B.5 a) $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ e $e = \frac{4}{5}$; b) $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$ e $e = \frac{2}{3}$.

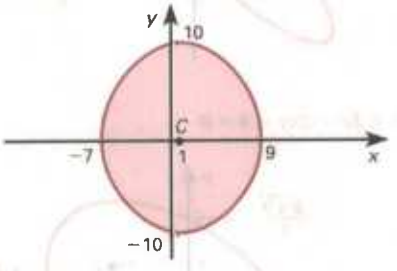
B.6 a) $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$; b) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$. **B.7** a) $\frac{(x-3)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$;

b) $(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; c) $\frac{(x+1)^2}{25} + (y-2)^2 = 1$; d) $\frac{(x-5)^2}{36} + y^2 = 1$; e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$;

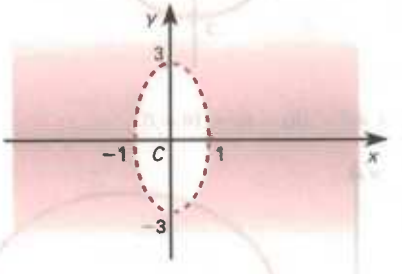
f) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{8} = 1$. **B.8** $2c = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.9** a) Q pertence a $\mathscr{E}$; b) Q é interior a $\mathscr{E}$; c) Q é exterior a $\mathscr{E}$;

d) Q pertence a $\mathscr{E}$; e) Q é exterior a $\mathscr{E}$; f) Q é interior a $\mathscr{E}$.

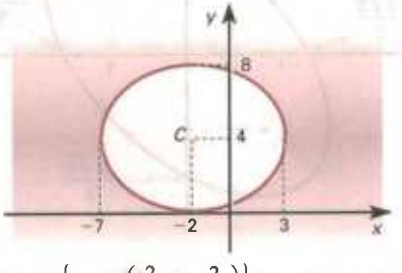
B.10 a)



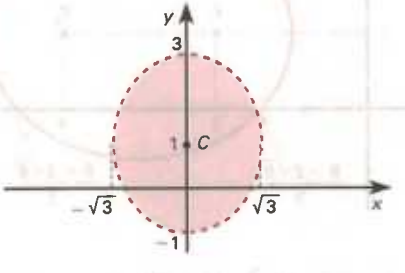
b)



c)



d)



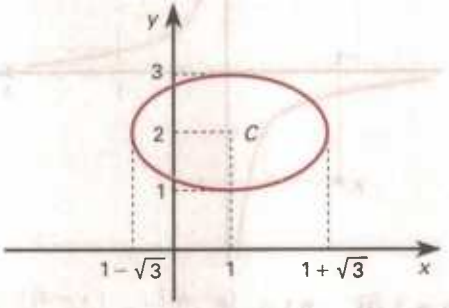
B.11 a) $r \cap \mathscr{E} = \left\{(1, 1), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$; b) $r \cap \mathscr{E} = \{(2, 1)\}$; c) $r \cap \mathscr{E} = \varnothing$; d) $r \cap \mathscr{E} = \varnothing$; e) $r \cap \mathscr{E} = \{(-2, 0), (0, 1)\}$;

f) $r \cap \mathscr{E} = \left\{\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

Exercícios complementares

C.1 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. **C.2** $\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$. **C.3** $\frac{(x-1)^2}{2} + (y+1)^2 = 1$, $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C.4 $\frac{(x-1)^2}{3} + (y-2)^2 = 1$.



C.5 $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-6)^2}{25} = 1$.

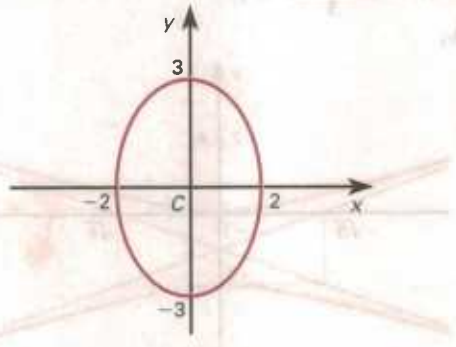
C.6 $m = 1$ ou $m = -1$.

C.7 $k > \sqrt{2}$ ou $k < -\sqrt{2}$.

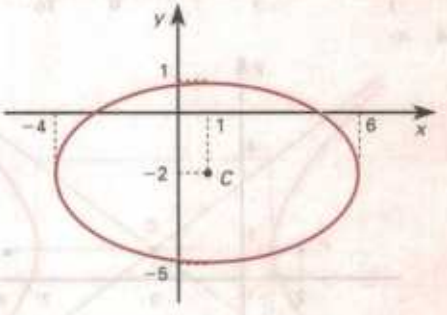
C.8 $n > \sqrt{6}$ ou $n < -\sqrt{6}$.

C.9 $s: x - y - 8 = 0$ e $t: x - y - 4 = 0$.

C.10



C.11



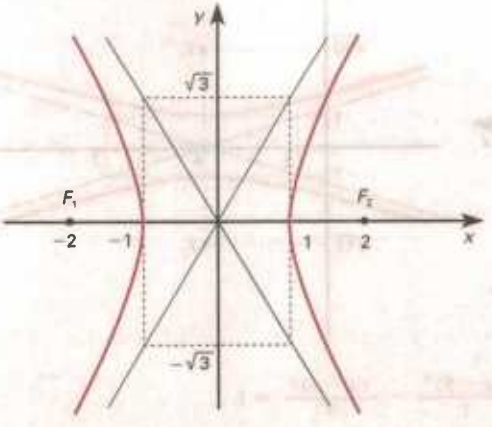
Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** d. **V.3** e. **V.4** $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$. **V.5** d.

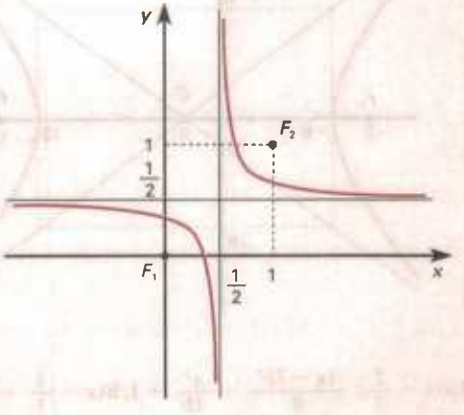
Capítulo 12

Exercícios básicos

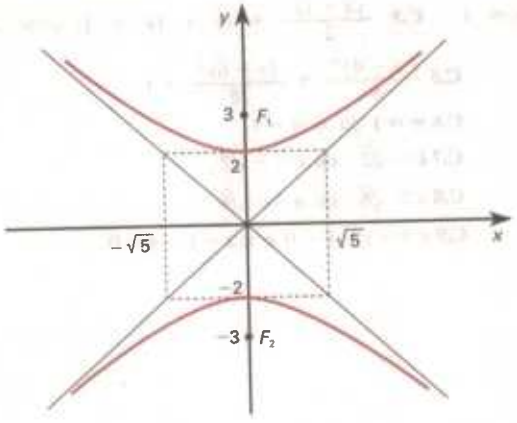
B.1 a) $3x^2 - y^2 - 3 = 0$



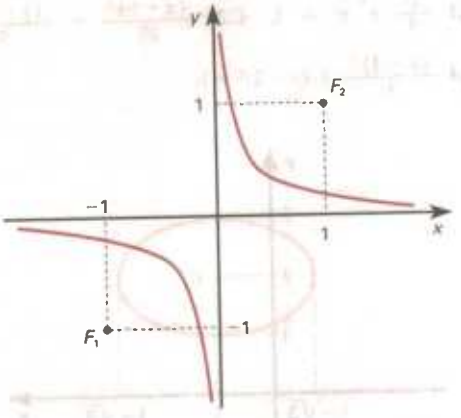
b) $8xy - 4x - 4y + 1 = 0$



c) $5y^2 - 4x^2 - 20 = 0$



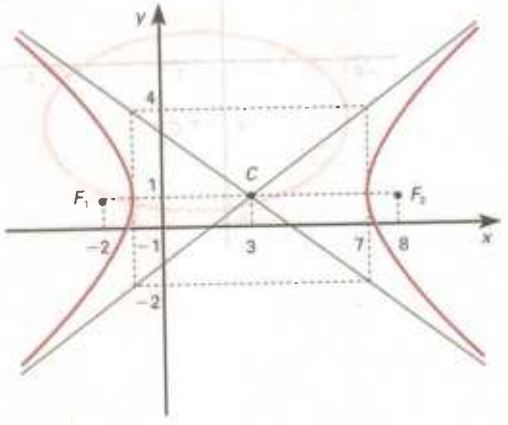
d) $2xy - 1 = 0$



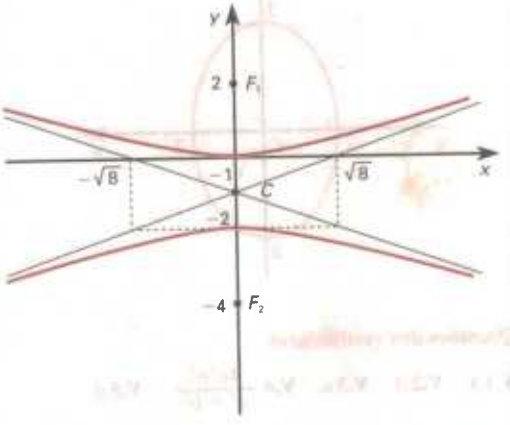
B.2 a) $2c = 10$, $e = \frac{5}{3}$, $2b = 8$; b) $2c = 12$, $e = \frac{6}{1} = 6$, $2b = 2\sqrt{35}$. **B.3** a) $\frac{(x-6)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{12} = 1$;

b) $\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{(x+3)^2}{3} = 1$; c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; d) $\frac{(y+4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{5} = 1$.

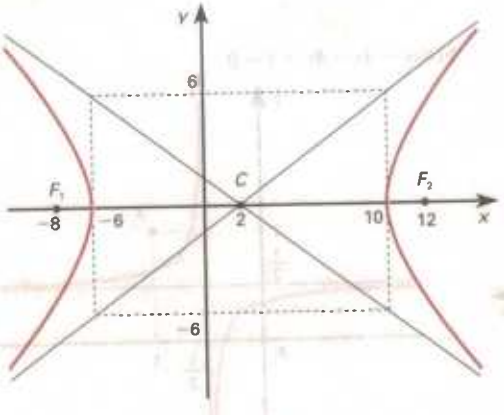
B.4 a)



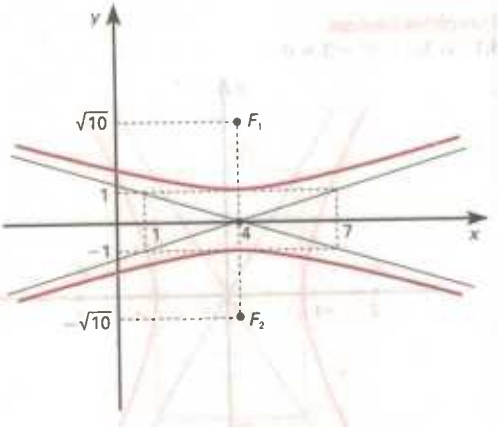
b)



c)



d)

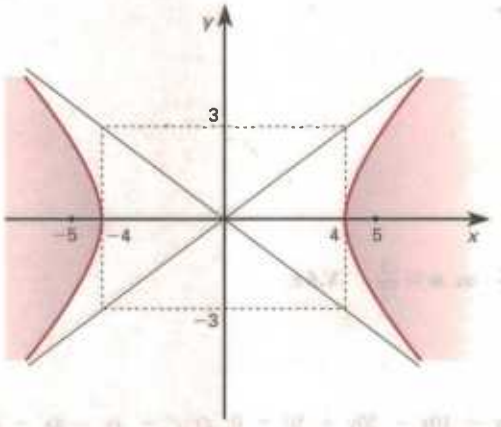


B.5 a) $e = \frac{5}{3}$, $\frac{(x-7)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; b) $e = \frac{3}{1} = 3$, $\frac{(y-5)^2}{1} - \frac{(x-3)^2}{8} = 1$.

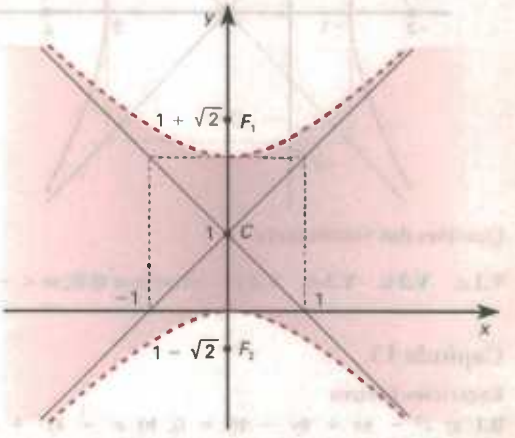
B.6 a) $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-6)^2}{12} = 1$; b) $\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$. **B.7** a) $\frac{(x-3)^2}{9} - (y-1)^2 = 1$; b) $\frac{(x+1)^2}{4} - y^2 = 1$; c) $\frac{(x+2)^2}{25} - (y-1)^2 = 1$; d) $(y-2)^2 - \frac{x^2}{36} = 1$; e) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$. **B.8** $2c = \frac{5}{6}$.

B.9 a) Q pertence à hipérbole $\mathscr{H}$; b) Q é interior à hipérbole $\mathscr{H}$; c) Q é exterior à hipérbole $\mathscr{H}$; d) Q pertence à hipérbole $\mathscr{H}$; e) Q é exterior à hipérbole $\mathscr{H}$; f) Q é interior à hipérbole $\mathscr{H}$.

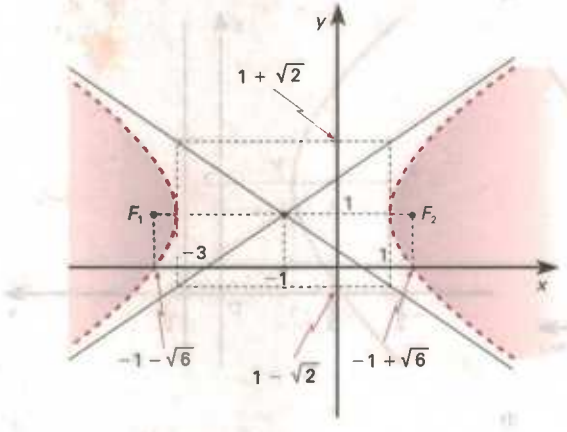
B.10 a)



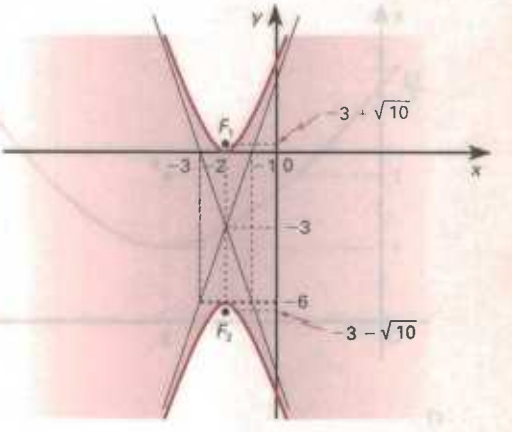
b)



c)



d)

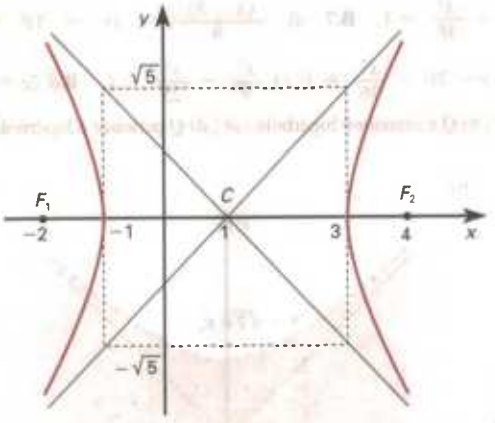


B.11 a) $r \cap \mathscr{H} = \left\{(0, 1), \left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}\right)\right\}$; b) $r \cap \mathscr{H} = \{(2, 1)\}$; c) $r \cap \mathscr{H} = \varnothing$; d) $r \cap \mathscr{H} = \left\{\left(-\frac{21}{10}, \frac{59}{10}\right)\right\}$; e) $r \cap \mathscr{H} = \varnothing$; f) $r \cap \mathscr{H} = \{(3, 3)\}$; g) $r \cap \mathscr{H} = \varnothing$; h) $r \cap \mathscr{H} = \left\{\left(\frac{23}{48}, \frac{55}{16}\right)\right\}$. **B.12** a) $3x + 2y - 3 = 0$ e $3x - 2y - 3 = 0$; b) $5x + 2y + 4 = 0$ e $5x - 2y - 4 = 0$; c) $x + 2y - 4 = 0$ e $x - 2y + 4 = 0$; d) $2x + y + 1 = 0$ e $2x - y + 11 = 0$.

Exercícios complementares

C.1 $\frac{(y-3)^2}{2} - x^2 = 1$. **C.2** $\frac{(x-4)^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. **C.3** $\frac{(x+1)^2}{2} - (y+1)^2 = 1$, $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

C.4



C.5 $\frac{(x-6)^2}{5} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

C.6 a) $m = \sqrt{5}$ ou $m = -\sqrt{5}$; b) $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$;
c) $m < -\sqrt{5}$ ou $m > \sqrt{5}$.

C.7 $k = 0$. **C.8** $k = 2$ ou $k = -2$.

C.9 $x - 2y + \sqrt{7} = 0$ e $x - 2y - \sqrt{7} = 0$.

Questões dos vestibulares

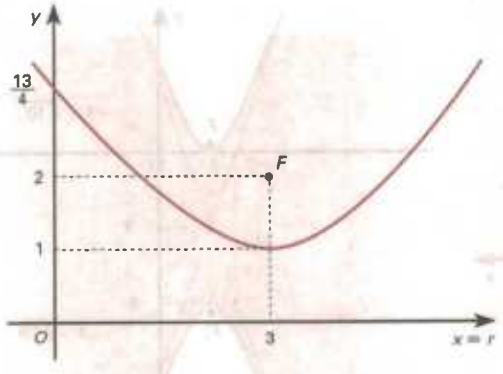
V.1 d. **V.2** b. **V.3** d. **V.4** $y = mx$, com $m \in \mathbb{R}$, $m < -\frac{3}{2}$ ou $m > \frac{3}{2}$. **V.5** e.

Capítulo 13

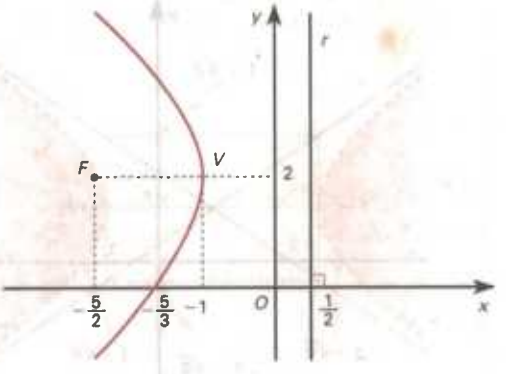
Exercícios básicos

B.1 a) $x^2 - 8x + 8y - 16 = 0$; b) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 10x - 30y + 50 = 0$; c) $y^2 - 4y + 8x - 4 = 0$; d) $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1 = 0$. **B.2** a) $p = 5$; b) $p = 2$; c) $p = 2$; d) $p = 6$. **B.3** a) $(x-5)^2 = 8(y-4)$; b) $(y-2)^2 = -6\left(x - \frac{5}{2}\right)$; c) $(x+3)^2 = -8(y-4)$; d) $y^2 = 8x$; e) $x^2 = 4y$; f) $(y-3)^2 = -4(x-1)$.

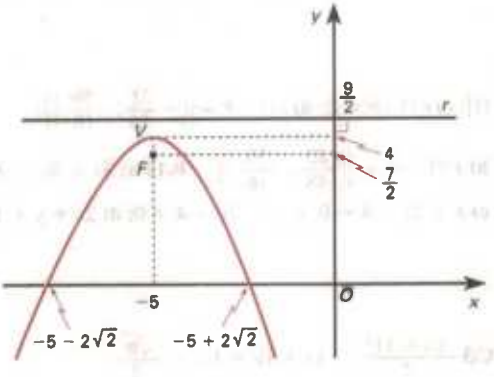
B.4 a)



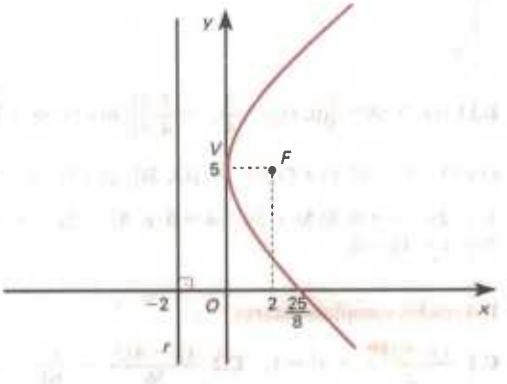
b)



c)

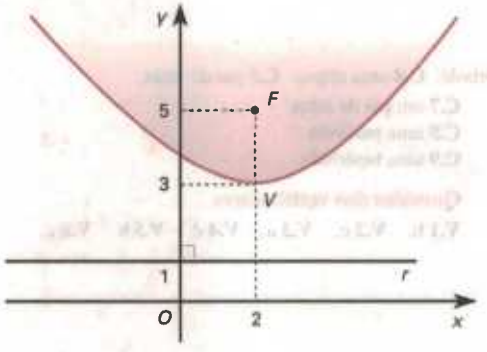


d)

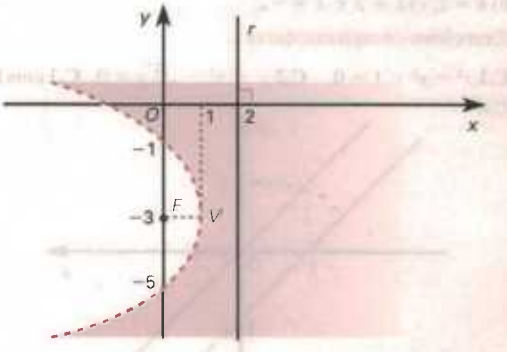


B.5 a) $(x-5)^2 = \frac{16}{5}(y-5)$; b) $(y-2)^2 = -6(x-4)$. **B.6** a) $F(4, 2)$ e $r: x + 2 = 0$; b) $F(-1, 3)$ e $r: y - 1 = 0$; c) $F(2, 2)$ e $r: y + 2 = 0$; d) $F\left(\frac{17}{4}, 3\right)$ e $r: x - \frac{15}{4} = 0$. **B.7** a) $(x-1)^2 = 4(y+2)$; b) $(y+4)^2 = 4(x+1)$; c) $(x+3)^2 = 3y$; d) $(y-6)^2 = 4(x+1)$. **B.8** a) Q pertence à parábola; b) Q é exterior à parábola; c) Q é interior à parábola; d) Q pertence à parábola; e) Q é interior à parábola; f) Q é exterior à parábola.

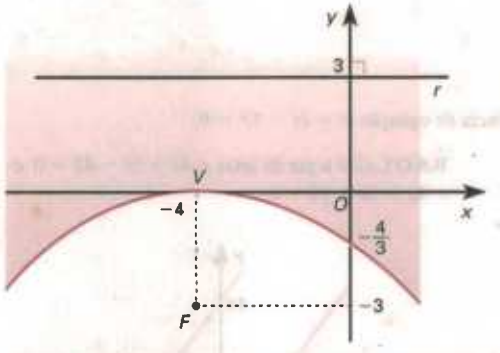
B.9 a)



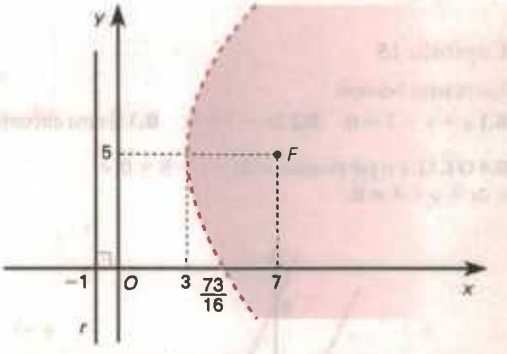
b)



c)



d)



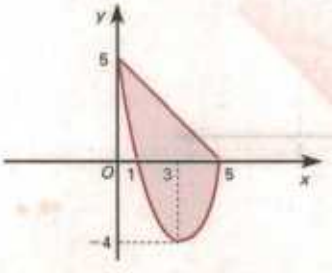
B.10 a) $s \cap \mathcal{P} = \{(2, 1), (0, 2)\}$; b) $s \cap \mathcal{P} = \{(0, 5)\}$; c) $s \cap \mathcal{P} = \{(2, -4)\}$; d) $s \cap \mathcal{P} = \emptyset$; e) $s \cap \mathcal{P} = \{(-3, 1), (0, 2)\}$; f) $s \cap \mathcal{P} = \emptyset$; g) $s \cap \mathcal{P} = \{(-3, 7)\}$; h) $s \cap \mathcal{P} = \{(2, 4)\}$. **B.11** $2\sqrt{2}$.

Exercícios complementares

C.1 $(x-3)^2 = \frac{4}{3}\left(y + \frac{3}{4}\right)$. **C.2** $x - 2 = 0$. **C.3** $k = \frac{1}{4}$. **C.4** $V(1, 2)$, $F\left(1, \frac{9}{4}\right)$ e $r: y - \frac{7}{4} = 0$. **C.5** $k = \frac{1}{2}$. **C.6** $m < -1$ ou $m > 1$. **C.7** $k > 2$. **C.8** $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$. **C.9** $2x - y - 6 = 0$. **C.10** Há duas retas possíveis, $s: y = \frac{x}{2} + 5$ e $t: y = -\frac{x}{2} + 5$.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** c. **V.3**



V.4 c. **V.5** a. **V.6** b.

Capítulo 14

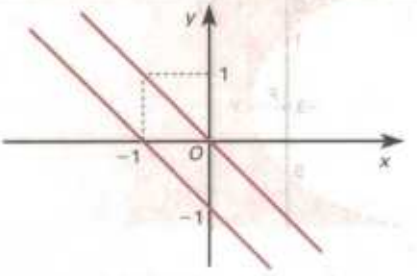
Exercícios básicos

B.1 a) uma circunferência; b) um ponto; c) o conjunto vazio; d) o conjunto vazio; e) um ponto; f) uma circunferência. **B.2** a) $k < 13$; b) $k = 13$; c) $k > 13$. **B.3** $m = 3$ e $k = 0$. **B.4** a) uma elipse; b) um ponto; c) o conjunto vazio; d) um ponto; e) uma elipse; f) um ponto. **B.5** $k < 1$. **B.6** a) $m > -2$; b) $m = -2$; c) $m < -2$. **B.7** a) uma hipérbole; b) um par de retas; c) uma hipérbole; d) um par de retas. **B.8** $k = 0$. **B.9** a) $k \neq 1$; b) $k = 1$. **B.10** a) uma parábola; b) um par de retas; c) o conjunto vazio; d) uma parábola; e) o conjunto vazio; f) um par de retas. **B.11** $k \neq 0$. **B.12** a) $m \neq 0$; b) $m = 0$. **B.13** a) $k = -2$; b) $k = 2$; c) $k \neq 2$ e $k \neq -2$.

Exercícios complementares

C.1 $x^2 - y^2 - 1 = 0$. **C.2** $y^2 - x^2 - \sqrt{2}\,y = 0$. **C.3** uma hipérbole. **C.4** uma elipse. **C.5** par de retas.

C.6



C.7 um par de retas.
C.8 uma parábola.
C.9 uma hipérbole.

Questões dos vestibulares

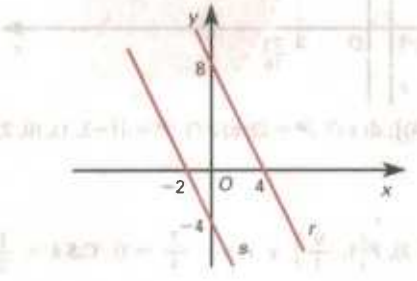
V.1 b. **V.2** c. **V.3** a. **V.4** d. **V.5** b. **V.6** c.

Capítulo 15

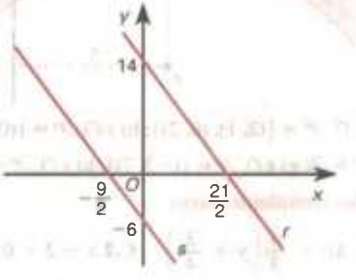
Exercícios básicos

B.1 $x + y - 3 = 0$. **B.2** $2x - 1 = 0$. **B.3** É uma circunferência de equação $x^2 + (y - 1)^2 = 9$.

B.4 O L.G. é o par de retas r: $2x + y - 8 = 0$ e s: $2x + y + 4 = 0$.

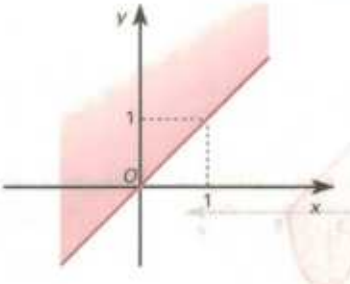


B.5 O L.G. é o par de retas r: $4x + 3y - 42 = 0$ e s: $4x + 3x + 18 = 0$.



B.6 O L.G. é o par de retas t: $2y - 3 = 0$ e u: $6x + 1 = 0$. **B.7** O L.G. é a reta t: $x + 2y - 3 = 0$. **B.8** O L.G. é a circunferência λ: $3x^2 + 3y^2 - 16x - 40y + 116 = 0$. **B.9** $3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$. **B.10** d.
B.11 (0, 1) e (0, −1). **B.12** $x^2 + y^2 - 14x - 18y + 94 = 0$. **B.13** $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 > 4$. **B.14** $y^2 + 4x - 8 \geqslant 0$.

B.15 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} < 1$. **B.16** $y^2 - \frac{x^2}{3} > 1$. **B.17**



Exercícios complementares

C.1 $x^2 + y^2 = 25$, com $0 \leq x \leq 5$ e $0 \leq y \leq 5$. **C.2** Um ramo da hipérbole de equação $RH = \frac{1}{\pi}$. **C.3** O L.G. é a parábola $\mathcal{P}$: $(y - 3)^2 = -8(x - 3)$. **C.4** O L.G. é formado pela reta r: $x = 0$. **C.5** O L.G. é o ramo da hipérbole $12x^2 - 4y^2 - 72x + 105 = 0$, cujo vértice é o ponto $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$. **C.6** $8x^2 + 9y^2 - 8x - 16 = 0$. **C.7** $x^2 - 12y + 24 = 0$.

C.8 $2x + y - 2 = 0$. **C.9** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 > 25$.

Questões dos vestibulares

V.1 O L.G. é a reta de equação $x - 1 = 0$. **V.2** $3x^2 + 3y^2 - 8x - 8y + 8 = 0$. **V.3** $x^2 - 6y + 3 = 0$. **V.4** $x^2 + y^2 = \frac{3r^2}{4}$.

V.5 a.

Capítulo 16

Exercícios básicos

B.1 $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{1}{3}$. **B.2** $x = 2$. **B.3** $x = 2$. **B.4** $\forall x, x \in \mathbb{R}, x \neq 3$ e $x \neq -3$. **B.5** a) $x = 5$ e $y = 3$; b) $x = 3$ e $y = 5$ ou $x = -3$ e $y = 17$; c) $x = 1$ e $y = 3$. **B.6** Seja $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$. Temos que: $a + bi \neq a - bi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b \neq -b \therefore a + bi \neq a - bi \Leftrightarrow b \neq 0$. Logo, $z \neq \bar{z}$ se, e somente se, $\text{Im}(z) \neq 0$ (c.q.d.). **B.7** a) V; b) F; c) V; d) V.
B.8 a) $4 + 8i$; b) $13 + 7i$; c) $12 + 4i$; d) $3 - 2i$; e) 16; f) $12i$; g) $-4 + i$; h) $21 - 3i$. **B.9** $z = 5 + 4i$. **B.10** $z = 8 + 3i$.
B.11 $z = 0 + 0i$. **B.12** a) $x = 2$ e $y = 3$; b) $x = 1$ e $y = 4$. **B.13** a) $18i$; b) $30 - 42i$; c) $21 + 15i$; d) $61 - 41i$; e) $-24 - 70i$; f) 38; g) 74; h) $34 + 33i$; i) $153 - 104i$; **B.14** a) $z = 2 + 5i$; b) $z = 0 + 0i$; c) $z = 0 + 0i$. **B.15** a) $\frac{2}{13} - \frac{3i}{13}$;

b) $\frac{4}{17} - \frac{i}{17}$; c) $\frac{3}{20} + \frac{i}{20}$; d) $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$; e) $-i$; f) i; g) $-\frac{i}{3}$. **B.16** $a = -\frac{2}{5}$. **B.17** Não existe x.

B.18 a) $\frac{10}{17} + \frac{11i}{17}$; b) $2 - 3i$; c) $\frac{15}{13} + \frac{10i}{13}$; d) $-\frac{1}{17} + \frac{4i}{17}$; e) $\frac{21}{17} + \frac{15i}{34}$; f) $-\frac{17}{13} - \frac{6i}{13}$;

g) $-\frac{23}{5} - \frac{4i}{5}$; h) $-\frac{29}{289} + \frac{235i}{289}$. **B.19** a) $2 + 2i$; b) $-\frac{3}{2} + \frac{i}{2}$. **B.20** $x = 1$. **B.21** $x = -\frac{1}{2}$. **B.22** Para nenhum valor de x. **B.23** a) -1; b) $-i$; c) 1; d) i. **B.24** a) 1; b) 1; c) -1; d) $-i$. **B.25** a) -64; b) $512i$.

Exercícios complementares

C.1 Não existe x, $x \in \mathbb{R}$. **C.2** Não existe x, $x \in \mathbb{R}$. **C.3** Não existe x, $x \in \mathbb{R}$. **C.4** Basta mostrar que o sistema $\begin{cases} x + y = 3y - 3 \\ x = 2x - 2y \end{cases}$ é impossível. **C.5** Basta mostrar que o sistema $\begin{cases} x + y = 3y - x \\ x = 2y - x \end{cases}$ é possível e indeterminado. **C.6** Basta mostrar que o sistema $\begin{cases} x^2 + 2x = x - 8 \\ y = 3 \end{cases}$ é impossível para x e y reais. **C.7** Sendo $u = 1 + 0i$, temos que $zu = uz = z$, $\forall z$, $z \in \mathbb{C}$. Suponha que exista um outro número complexo, $u' = a + bi$, e mostre que $zu' = u'z = z$, $\forall z$, $z \in \mathbb{C} \Rightarrow u' = 1 + 0i$. Conclua, então, que $u' = u$. **C.8** a) $z = \sqrt{3} + \sqrt{3}\,i$ ou $z = -\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i$; b) $z = 3 + 0i$.

C.9 $(z_1 + z_2)^2 = (\bar{z_1})^2 + (\bar{z_2})^2 \Leftrightarrow (\bar{z_1} + \bar{z_2})^2 = (\bar{z_1})^2 + (\bar{z_2})^2$; (I) $\Leftrightarrow \underbrace{(\bar{z_1})^2 + 2\bar{z_1}\bar{z_2} + (\bar{z_2})^2}_{\text{(I)}} = (\bar{z_1})^2 + (\bar{z_2})^2$;

(II) $\Leftrightarrow \underbrace{2\bar{z_1}\bar{z_2} = 0}_{\text{(III)}}$; (III) $\Leftrightarrow \underbrace{z_1 = 0 \text{ ou } \bar{z_2} = 0}_{\text{(IV)}}$; (IV) $\Leftrightarrow z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ (c.q.d.). **C.10** $z_1 = -2i$. **C.11** $z = 0 + 0i$.

C.12 Primeiro membro $= \left[\left(\frac{\bar{z_1}}{z_2}\right)^n\right] \cdot \left[\overline{(z_2\bar{z_1})}\right]^n = \left[\left(\frac{\bar{z_1}}{z_2}\right)\right]^n \cdot \left[\overline{(z_2\bar{z_1})}\right]^n = \left[\frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}\right]^n \cdot \left[\frac{\bar{z_2}}{z_1}\right]^n = \left[\frac{z_1}{\bar{z_2}}\right]^n \cdot \left[\bar{z_2}z_1\right]^n =$

$= \frac{(z_1)^n}{(\bar{z_2})^n} \cdot (\bar{z_2})^n (z_1)^n = (z_1)^{2n} =$ segundo membro (c.q.d.). **C.13** $\bar{z_1} = (3\bar{z_1} - 2)(1 + z_2) \Rightarrow \bar{z_1} = 3\bar{z_1} + 3\bar{z_1}z_2 - 2 - 2z_2$

$\therefore 2 + 2z_2 = 2\bar{z_1} + 3\bar{z_1}z_2 \therefore 2 + 2z_2 = \bar{z_1}(2 + 3z_2) \therefore \bar{z_1} = \frac{2 + 2z_2}{2 + 3z_2} \therefore \bar{z_1} = \left(\frac{2 + 2z_2}{2 + 3z_2}\right) \therefore z_1 = \frac{2 + 2\bar{z_2}}{2 + 3\bar{z_2}}$ (c.q.d.).

C.14 $(\overline{z_1})^n z_2 = iz_1 + iz_2 \Rightarrow (\overline{z_1})^n z_2 - iz_2 = iz_1 \therefore z_2[(\overline{z_1})^n - i] = iz_1 \therefore z_2 = \dfrac{iz_1}{(\overline{z_1})^n - i} \therefore \overline{z_2} = \left(\dfrac{iz_1}{(\overline{z_1})^n - i}\right) \therefore \overline{z_2} =$

$= \dfrac{-i \cdot \overline{z_1}}{(z_1)^n + i}$ (c.q.d.).

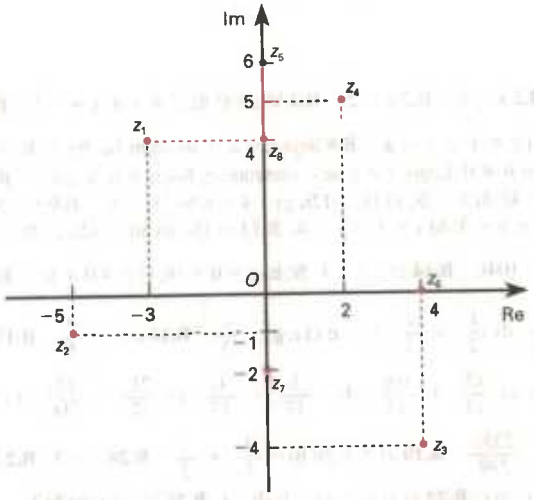
Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** d. **V.3** a. **V.4** $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$. **V.5** $x \in \mathbb{R}$, $-1 < x < 1$.

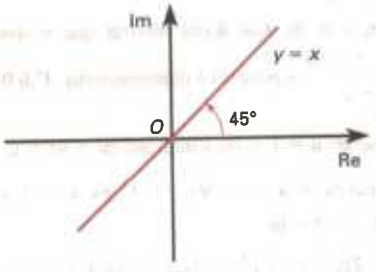
Capítulo 17

Exercícios básicos

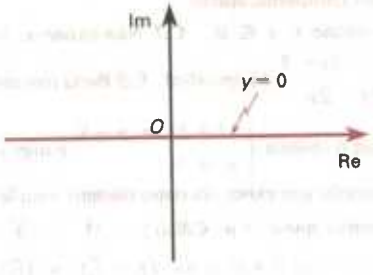
B.1



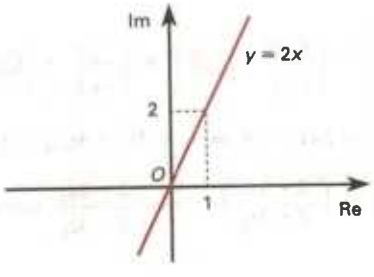
B.2 É a reta bissetriz dos quadrantes ímpares.



B.3 A representação geométrica é o eixo real (eixo das abscissas).

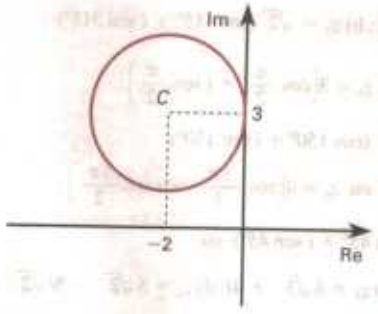


B.4 O lugar geométrico das imagens dos complexos $x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, é a reta de equação $y = 2x$.

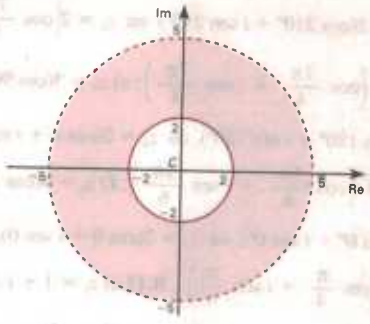


B.5 a) $|z_1| = 10$; b) $|z_2| = \sqrt{5}$; c) $|z_3| = 2$; d) $|z_4| = 4$; e) $|z_5| = 6$; f) $|z_6| = 3$; g) $|z_7| = \sqrt{2}$; h) $|z_8| = 1$; *i*) $|z_9| = 1$; j) $|z_{10}| = 9$.

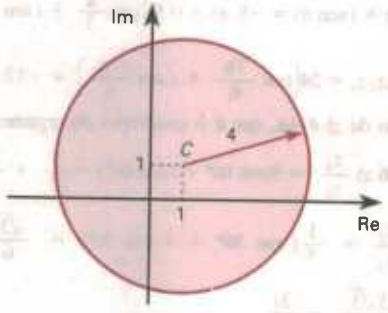
B.6 a)



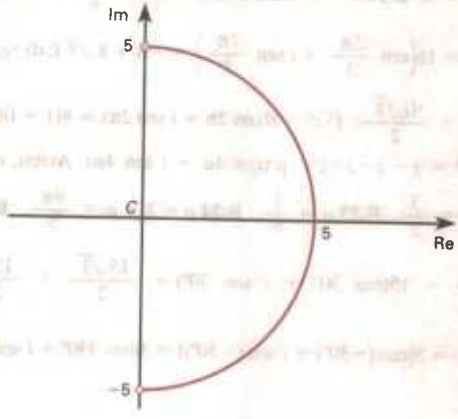
c)



b)



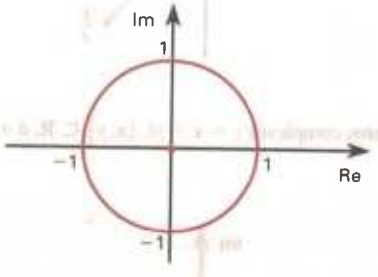
d)



B.7 a) $\sqrt{20}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; c) $\sqrt{2}$; d) 9; e) $\frac{1}{169}$; f) 16; g) $\sqrt{2}$.

B.8 Seja $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\bar{z}|$. **B.9** $|2z| = \left|\frac{3}{z}\right| \Rightarrow 2|z| = \frac{3}{|z|}$

$\therefore |z|^2 = \frac{3}{2} \therefore z \cdot \bar{z} = \frac{3}{2} \therefore \bar{z} = \frac{3}{2z}$. **B.10** A representação geométrica é a reunião do conjunto $\{(0, 0)\}$ com o conjunto dos pontos da circunferência que tem centro na origem e raio unitário:



B.11 a) 0° (0); b) 270° $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$; c) 180° ($\pi$); d) 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. **B.12** a) $\frac{11\pi}{6}$; b) $\frac{7\pi}{6}$; c) $\frac{5\pi}{6}$. **B.13** a) 140°; b) 40°; c) 320°.

B.14 a) $\rho = 2$ e $\varphi = 120° \left(\varphi = \frac{2\pi}{3}\right)$; b) $\rho = \sqrt{2}$ e $\varphi = 45° \left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$; c) $\rho = 3\sqrt{2}$ e $\varphi = 225° \left(\varphi = \frac{5\pi}{4}\right)$;

d) $\rho = 4$ e $\varphi = 330° \left(\varphi = \frac{11\pi}{6}\right)$; e) $\rho = 2$ e $\varphi = 135° \left(\varphi = \frac{3\pi}{4}\right)$; f) $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\varphi = 45° \left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$.

B.15 a) $\rho = 32$ e $\varphi = 90° \left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$; b) $\rho = \sqrt{2}$ e $\varphi = 45° \left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$.

B.16 a) $z_1 = 2(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$ ou $z_1 = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right)$; b) $z_2 = \sqrt{2}\ (\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$ ou $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$; c) $z_3 = 3(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$ ou $z_3 = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$; d) $z_4 = 2(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$ ou $z_4 = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$; e) $z_5 = 2\sqrt{3}\ (\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ ou $z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$; f) $z_6 = 4(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$ ou $z_6 = 4\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$; g) $z_7 = 2(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$ ou $z_7 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$; h) $z_8 = 5\sqrt{2}\ (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$ ou $z_8 = 5\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$. **B.17** a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; b) $z_2 = -i$; c) $z_3 = 4\sqrt{3} + 4i$; d) $z_4 = 5\sqrt{2} - 5i\sqrt{2}$; e) $z_5 = 5$.

B.18 $n = 3$. **B.19** $n = 4$. **B.20** a) $z_1 z_2 = 6\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3} + 3i$; b) $z_1 z_3 = 12\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = 12i$; c) $(z_3)^2 = 16\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) = -8 + 8\sqrt{3}\,i$; d) $z_2 z_3 = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -8$; e) $z_1^2 = 9\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2} + \frac{9i\sqrt{3}}{2}$; f) $z_2^3 = 8(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = 8(1 + 0i) = 8$; g) $z_1 z_2 z_3 = 24\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right) = -12\sqrt{3} - 12i$.

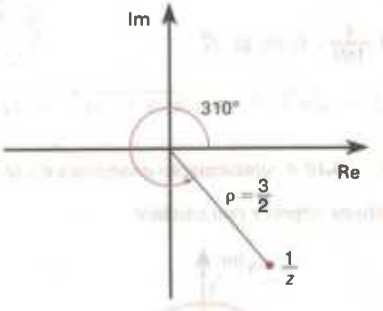
B.21 $z^4 = z \cdot z \cdot z \cdot z = \rho^4(\cos 4\varphi + i \operatorname{sen} 4\varphi)$. Assim, o argumento de z^4 é 4φ, que é o quádruplo do argumento φ de z.

B.22 $\alpha = \frac{3}{2}$. **B.23** $\alpha = \frac{1}{6}$. **B.24** $\rho = 2$ e $\varphi = \frac{9\pi}{5}$. **B.25** d. **B.26** a) $\frac{z_1}{z_2} = 5(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = \frac{5}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$;

b) $\frac{z_1}{z_3} = 15(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = \frac{15\sqrt{3}}{2} + \frac{15i}{2}$; c) $\frac{z_3}{z_2} = \frac{1}{3}(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6}$;

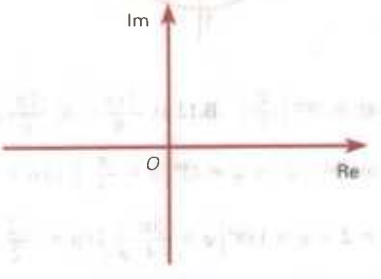
d) $\frac{z_2}{z_3} = 3[\cos(-30°) + i \operatorname{sen}(-30°)] = 3(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$.

B.27

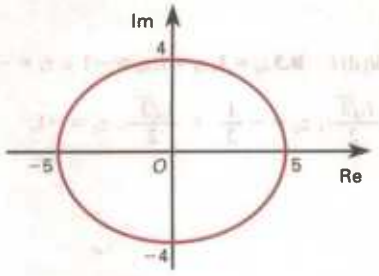


Exercícios complementares

C.1 A representação geométrica dos números complexos $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, é o par de retas de equações $y = 0$ e $x = 0$, isto é, o eixo real e o eixo imaginário:

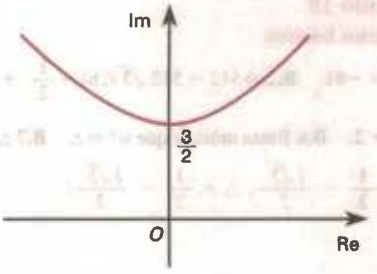


C.2



Elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

C.3

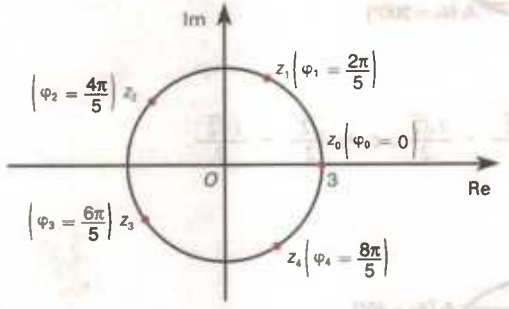


Parábola de equação $x^2 = 6\left(y - \frac{3}{2}\right)$.

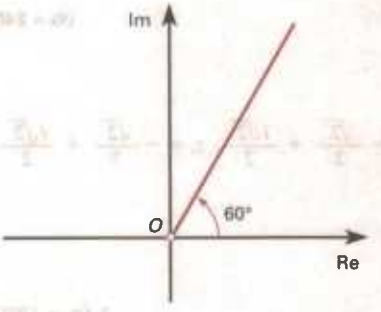
C.4 $|z| = 0$ ou $|z| = \sqrt{5}$. **C.5** $\left|\frac{\bar{z} \cdot |z|^n}{z}\right| = \frac{|\bar{z}| \cdot |z|^n}{|z|} = ||z|^n| = |z|^n = |z^n|$. **C.6** $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z+1}{z^2} =$

$= \frac{z+1}{z^2} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{z\bar{z} + \bar{z}}{z^2\bar{z}} = \frac{|z|^2 + \bar{z}}{z|z|^2} = \frac{2^2 + \bar{z}}{z \cdot 2^2} = \frac{4 + \bar{z}}{4z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{4\bar{z} + (\bar{z})^2}{4|z|^2} = \frac{4\bar{z} + (\bar{z})^2}{4 \cdot 2^2} = \frac{4\bar{z} + (\bar{z})^2}{16}$

C.7



C.8



C.9 $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$, $z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$.

C.10 $z_0 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$, $z_1 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)$,

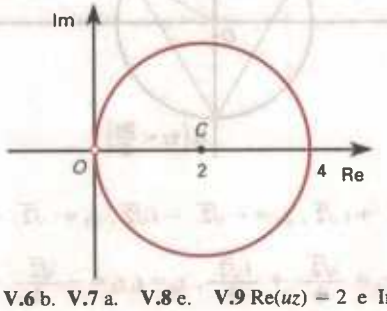
$z_3 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$. **C.11** $\alpha = \frac{5}{6}$. **C.12** $\frac{w}{z} = \frac{\rho^2}{\rho}[\cos(2\varphi - \varphi) + i\,\text{sen}\,(2\varphi - \varphi)] = \rho[\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi] = z$.

C.13 $\frac{z}{w} = \frac{w}{z} \Rightarrow \frac{\rho}{\beta}[\cos(\varphi - \alpha) + i\,\text{sen}\,(\varphi - \alpha)] = \frac{\beta}{\rho}[\cos(\alpha - \varphi) + i\,\text{sen}\,(\alpha - \varphi)]$

$\therefore \begin{cases} \frac{\rho}{\beta} = \frac{\beta}{\rho} \\ \varphi - \alpha = \alpha - \varphi + k2\pi \end{cases} \therefore \begin{cases} \rho = \beta \\ \varphi - \alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Questões dos vestibulares

V.1 Circunferência de centro $C(2, 0)$ e raio $R = 2$, exceto o ponto $(0, 0)$.



V.2 e. **V.3** $|z| = 2$. **V.4** a. **V.5** e. **V.6** b. **V.7** a. **V.8** e. **V.9** $\text{Re}(uz) = 2$ e $\text{Im}(uz) = 2\sqrt{3}$.

Capítulo 18

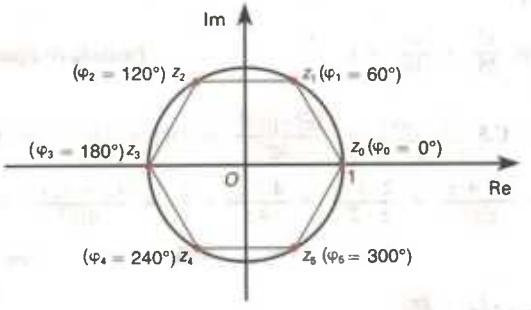
Exercícios básicos

B.1 $z^4 = -81$. **B.2** a) $512 - 512\sqrt{3}\,i$; b) $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; c) $16 + 16i$; d) i. **B.3** $z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1$ e $z_3 = -i$. **B.4** $n = 3$.

B.5 $n = 2$. **B.6** Basta mostrar que $w^5 = z$. **B.7** $z_0 = 1, z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, z_3 = -1,$

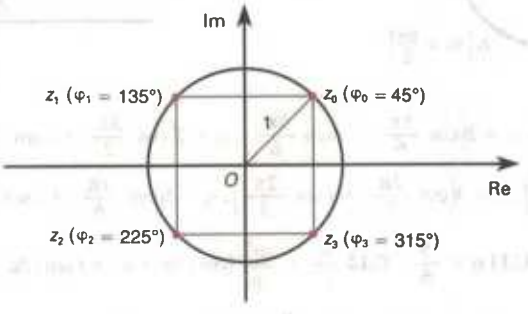
$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, z_5 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

B.8



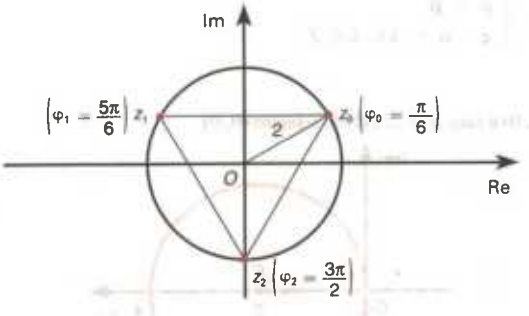
B.9 $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}, z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}, z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}, z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$.

B.10



B.11 $z_0 = \sqrt{3} + i, z_1 = -\sqrt{3} + i, z_2 = -2i$.

B.12



B.13 $z_0 = w = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$. **B.14** a) $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$,

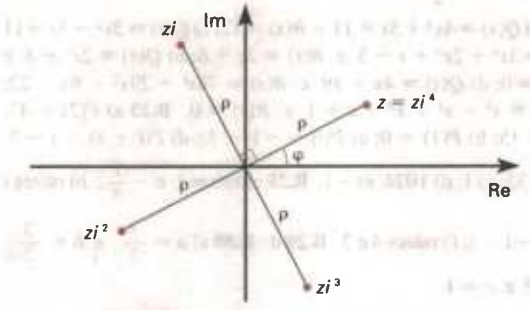
$z_1 = -1, z_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$; b) $z_0 = 1, z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}, z_2 = i, z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}, z_4 = -1,$

$z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$, $z_6 = -i$, $z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$; c) $z_0 = 5$, $z_1 = -5$; d) $z_0 = 4$, $z_1 = -4$; e) $z_0 = 2$, $z_1 = 2i$, $z_2 = -2$, $z_3 = -2i$; f) $z_0 = i$, $z_1 = -i$. **B.15** a) $S = \{3 + i, 3 - i\}$; b) $S = \{1 + i, 1 - i\}$; c) $S = \{2 + i, 2 - i\}$; d) $S = \{4 + i, 4 - i\}$.

Exercícios complementares

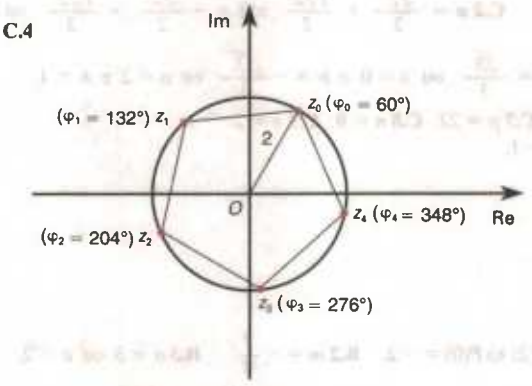
C.1 $z^n = w^{\frac{n}{2}} \Rightarrow \rho^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = 9^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{12}\right)$. Logo, $\rho = 3$ e $\varphi = \frac{\pi}{12} + q\pi$, onde $q = \frac{2k}{n}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

C.2



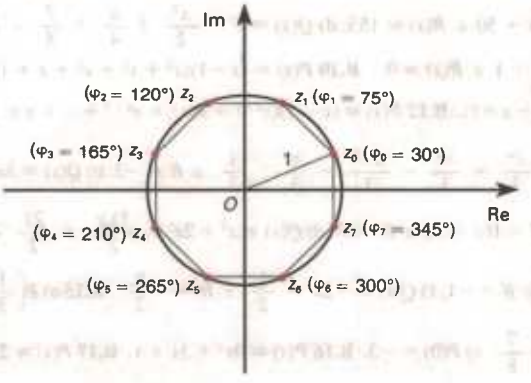
C.3 $z_0 = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$,
$z_1 = 2(\cos 132° + i \operatorname{sen} 132°)$,
$z_2 = 2(\cos 204° + i \operatorname{sen} 204°)$,
$z_3 = 2(\cos 276° + i \operatorname{sen} 276°)$,
$z_4 = 2(\cos 348° + i \operatorname{sen} 348°)$.

C.4



C.5 $z_0 = \cos 30° + i \operatorname{sen} 30°$, $z_1 = \cos 75° + i \operatorname{sen} 75°$,
$z_2 = \cos 120° + i \operatorname{sen} 120°$, $z_3 = \cos 165° + i \operatorname{sen} 165°$,
$z_4 = \cos 210° + i \operatorname{sen} 210°$, $z_5 = \cos 255° + i \operatorname{sen} 255°$,
$z_6 = \cos 300° + i \operatorname{sen} 300°$, $z_7 = \cos 345° + i \operatorname{sen} 345°$.

C.6



Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** d. **V.3** $y = 65$. **V.4** $n = 4$. **V.5** a. **V.6** d. **V.7** zero.

Capítulo 19

Exercícios básicos

B.1 e. **B.2** a) $\partial A = 3$; b) $\partial B = 2$; c) $\partial C = 0$; d) não se define ∂D. **B.3** $k \neq 3$ e $k \neq -3$. **B.4** $m = 2$ ou $m = -2$. **B.5** $k = -1$. **B.6** $k = 5$. **B.7** $m = 2$ e $n = 1$. **B.8** $a = 3$ e $b = 1$ ou $a = 1$ e $b = 3$. **B.9** a) $6x^3 + 6x^2 + 2x - 1$; b) $6x^3 - 2x^2 - 8x + 1$; c) $24x^3 + 8x^2 - 12x$; d) $36x^3 + 37x^2 - 19x + 2$; e) $81x^2 - 36x + 4$; f) $12x^3 - 8x^2 - 21x + 3$; g) $24x^5 + 38x^4 - 8x^3 - 17x^2 + 3x$; h) $54x^4 + 6x^3 - 27x^2 + 11x - 1$; i) $36x^6 + 24x^5 - 32x^4 - 12x^3 + 9x^2$. **B.10** $a = 3$ e $b = -1$. **B.11** $a = 2$ e $b = 3$ ou $a = -2$ e $b = -4$. **B.12** a) $(m^2 - 4)x^3 + (m - 2)x^2 + 2x + 11$; b) $m \neq 2$ e $m \neq -2 \Rightarrow \partial(P + Q) = 3$, $m = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \partial(P + Q) = 1$, $m = -2 \Rightarrow \partial(P + Q) = 2$. **B.13** c. **B.14** $\partial(P \cdot Q) = 11$. **B.15** $\partial P = 13$. **B.16** $\partial P = 15$.

B.17 $G(x) = 4x^2 - x + 1$. **B.18** $G(x) = 2x^5 + 2x^4 + 2x$. **B.19** a) $6x^2$; b) $\frac{5x}{2}$; c) $-2x^4$; d) -4. **B.20** a) $\partial Q = 3$; b) $\partial Q = 1$; c) $\partial Q = 5$; d) $\partial Q = 0$. **B.21** a) $Q(x) = 5x^2 - 1$ e $R(x) = 3x + 13$; b) $Q(x) = 4x^2 + 5x + 11$ e $R(x) = 12$; c) $Q(x) = 3x^2 - 3x + 11$ e $R(x) = -13x$; d) $Q(x) = 2x^2 + 7x$ e $R(x) = 0$. **B.22** a) $Q(x) = 3x^4 + 2x^3 + x - 3$ e $R(x) = 2x + 6$; b) $Q(x) = 2x^2 + 8$ e $R(x) = -27x^2 + 28x - 14$; c) $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e $R(x) = 0$; d) $Q(x) = 4x + 19$ e $R(x) = 78x^3 + 29x^2 + 6x - 22$; e) $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ e $R(x) = 8x^2 + 6x + 8$; f) $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ e $R(x) = 0$. **B.23** a) $P(2) = 47$; b) $P(-1) = 2$; c) $P(0) = 1$; d) $P(i) = -1 - i$. **B.24** a) $P(-2) = 15$; b) $P(1) = 0$; c) $P(i) = -1 - 3i$; d) $P(i + 1) = i - 2$.

B.25 $a = 1$ e $b = 4$. **B.26** $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$. **B.27** a) 12; b) 32; c) 1; d) 1024; e) -1. **B.28** a) raízes 1 e $-\frac{1}{3}$; b) raízes i e $-i$; c) raízes 3, -3, i e $-i$; d) raízes 0, 2 e 3; e) raízes $-1 + i$ e $-1 - i$; f) raízes 4 e 3. **B.29** d. **B.30** a) $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$; b) $a = 3$ e $b = 1$. **B.31** a) $a = 3$, $b = 1$ e $c = 4$; b) $a = 5$, $b = 3$ e $c = 1$.

Exercícios complementares

C.1 $m = 1$ ou $m = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ou $m = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. **C.2** $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$ e $b = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$ ou $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$ e $b = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$. **C.3** $a = 0$ e $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $a = 0$ e $b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $a = 2$ e $b = 1$.

C.4 $a = 3$ e $b = 2$. **C.5** $\partial(P - Q) = n + 1$. **C.6** $b^2 - 4ac = 0$. **C.7** $p = 27$. **C.8** $n = 9$. **C.9** $n = 2$.
C.10 $P(x) = 2x^3 - 16x^2 + 38x - 24$. **C.11** $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** b. **V.3** a. **V.4** d. **V.5** c. **V.6** e.

Capítulo 20

Exercícios básicos

B.1 a) $P(2) = 33$; b) $P(-1) = 0$; c) $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; d) $P(-1) = -2$; e) $P(0) = -2$. **B.2** $m = -\frac{7}{4}$. **B.3** $a = 3$ ou $a = 2$.

B.4 $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$. **B.5** $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$. **B.6** $a = -6$ e $b = 11$. **B.7** $P(x) = x^2 - \frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$.

B.8 Para qualquer n, $n \in \mathbb{N}^*$. **B.9** a) $Q(x) = 6x^3 + 11x^2 + 25x + 51$ e $R(x) = 100$; b) $Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x$ e $R(x) = 1$; c) $Q(x) = 5x^2 + 17x + 50$ e $R(x) = 153$; d) $Q(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + \frac{7}{8}$ e $R(x) = -\frac{23}{16}$; e) $Q(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ e $R(x) = 0$. **B.10** $P(x) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. **B.11** $P(x) =$ $= (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$. **B.12** $P(x) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1)$. **B.13** $Q_1(x) = 3x^2 + 4x - \frac{1}{2}$ e $R_1 = R = 5$. **B.14** a) $Q(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$ e $R = -2$; b) $Q(x) = 3x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}$ e $R = \frac{15}{4}$; c) $Q(x) = -x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32$ e $R = 63$; d) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + \frac{11x}{2} + \frac{21}{2}$ e $R = 44$; e) $Q(x) = 16x^4 - 8x^3 + 4x^2 - x$ e $R = -1$; f) $Q(x) = -2x^2 - \frac{1}{2}$ e $R = -\frac{9}{2}$. **B.15** a) $P\left(\frac{1}{3}\right) = 1$; b) $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$; c) $P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{43}{4}$; d) $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$; e) $P(0) = -3$. **B.16** $P(x) = 9x^2 + 3x + 1$. **B.17** $P(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

B.18 $a = \frac{13}{2}$. **B.19** $m = -\frac{5}{2}$ ou $m = 2$. **B.20** $m = -12$ e $n = -37$. **B.21** $a = 1$ e $b = 13$. **B.22** $a = -3$ e $b = -4$.
B.23 $a = 0$ e $b = 6$. **B.24** $a = -9$ e $b = -1$. **B.25** $m = 4$ e $n = 2$. **B.26** $a = 3$ e $b = 2$. **B.27** $a = 3$ e $b = 2$. **B.28** $a = 2$ e $b = 2$.

Exercícios complementares

C.1 $R(x) = 10x - 13$. **C.2** $R(x) \equiv 24x - 7$. **C.3** $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15$. **C.4** d. **C.5** Por hipótese, temos que: $P(x) = (k_1x + a_1)(k_2x + a_2)(k_3x + a_3) \cdot \ldots \cdot (k_jx + a_j) \cdot \ldots \cdot (k_nx + a_n) \cdot Q(x)$. Calculando $P\left(-\frac{a_j}{k_j}\right)$, temos que:

$$P\left(-\frac{a_j}{k_j}\right) = \left(-\frac{k_1a_j}{k_j} + a_1\right)\left(-\frac{k_2a_j}{k_j} + a_2\right)\left(-\frac{k_3a_j}{k_j} + a_3\right) \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(-\frac{k_ja_j}{k_j} + a_j\right)}_{\text{zero}} \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{k_na_j}{k_j} + a_n\right) \cdot Q\left(-\frac{a_j}{k_j}\right).$$

$\therefore P\left(-\frac{a_j}{k_j}\right) = 0$. Logo, $P(x)$ é divisível por $k_jx - a_j$, $\forall j, j \in \mathbb{N}$ e $1 \leq j \leq n$ (c.q.d.). **C.6** $a = -7$, $b = -4$ e $c = 7$. **C.7** $a = -3$, $b = 3$ e $c = 0$. **C.8** $R(x) = 8x - 19$. **C.9** $R = 15$.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** d. **V.3** c ($a = 3$ e $b = -4$). **V.4** b. **V.5** e.

Capítulo 21

Exercícios básicos

B.1 a) $S = \{5, -2, -1\}$; b) $S = \left\{\frac{1}{2}, i, -i\right\}$; c) $S = \{-3, \sqrt{2}\,i, -\sqrt{2}\,i\}$; d) $S = \left\{\frac{1}{3}, 1, -1\right\}$. **B.2** a) $S = \{2, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$; b) $S = \left\{-1, 4, 0, \frac{1}{3}, 2\right\}$; c) $S = \left\{-2, 3, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; d) $S = \{0, 2, i, -i\}$. **B.3** a) $P(x) = 3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right)$; b) $P(x) = x(x - 3)(x - 1)$; c) $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 4)$; d) $P(x) = 4(x - 1)\left(x + \frac{3}{4}\right)$; e) $P(x) = x(x - 2)(x - 6)$; f) $P(x) = 3(x - 2)(x + i)(x - i)$. **B.4** Grau 6. **B.5** Grau 10. **B.6** $(x - 3)^2(x - 7)(x - 2)^5 = 0$.
B.7 $7(x + 1)(x - 1)(x - 2)^2(x + 2)^3 = 0$. **B.8** As outras raízes são i e $-i$. **B.9** $S = \{3, 1\}$. **B.10** a) basta mostrar que o polinômio $P(x) = x^6 - 10x^5 + 25x^4 + x^2 - 10x + 25$ é divisível por $(x - 5)^2$ e **não** é divisível por $(x - 5)^3$; b) basta mostrar que o polinômio $P(x) \equiv x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8$ é divisível por $(x - 2)^3$ e **não** é divisível por $(x - 2)^4$.
B.11 a) grau 6; b) grau 7; c) grau 10; d) grau 13. **B.12** a) $4(x - 3)(x - 2 - i)(x - 2 + i)(x - 2i)(x + 2i) = 0$;
b) $(x + 6i)(x - 6i)(x - 3i)(x + 3i)(x - 1 - i) \cdot (x - 1 + i) = 0$; c) $6(x - 4)(x + 2)(x - i)(x + i)(x - 1 + i) \cdot (x - 1 - i) = 0$;
d) $(x - 4)(x - 3)(x - i)(x + i) = 0$. **B.13** $S = \{3i, -3i, 1\}$. **B.14** $S = \{-5i, 5i, 3, -1\}$. **B.15** a) suas raízes racionais são -1 e $\frac{1}{2}$;
b) sua única raiz racional é 2; c) suas raízes racionais são -1 e $\frac{1}{3}$; d) sua única raiz racional é -1; e) essa equação não possui raiz racional. **B.16** a) $S = \{-1, -2, i, -i\}$; b) $S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \sqrt{2}\,i, -\sqrt{2}\,i\right\}$; c) $S = \left\{-1, \frac{3 + \sqrt{39}\,i}{8}, \frac{3 - \sqrt{39}\,i}{8}\right\}$;
d) $S = \{2, -2, -3, i, -i\}$; e) $S = \left\{0, 1, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right\}$.

Exercícios complementares

C.1 $S = \{1, -4\}$. **C.2** $a = 8$ e $b = -6$. **C.3** d. **C.4** c. **C.5** d. **C.6** $S = \{3, 1 - 3i, 1 + 3i\}$. **C.7** a) $S = \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$;
b) $S = \left\{3, -1, \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2}\right\}$. **C.8** $b = -1$ e $c = 1$. **C.9** b. **C.10** $S = \{1, 2, i, -i\}$. **C.11** Grau 3.

Questões dos vestibulares

V.1 $a = 1$ e $b = -12$. **V.2** $S = \left\{1, \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2}\right\}$. **V.3** b. **V.4** d. **V.5** b.

Capítulo 22

Exercícios básicos

B.1 a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{3 - 4\sqrt{6}}{4}$; e) $\frac{3 - 4\sqrt{6}}{6}$. **B.2** a) $-\frac{b}{a}$; b) $\frac{c}{a}$; c) $-\frac{b}{c}$; d) $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$; e) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$. **B.3** a) 1; b) 2; c) $\frac{1}{3}$; d) 6; e) -3; f) $\frac{10}{3}$; g) 30. **B.4** a) 0; b) 1; c) 1; d) 1; e) -2; f) 1; g) 1.

B.5 $\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{2}{3} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = 2 \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = \frac{4}{3} \\ r_1r_2r_3r_4 = -\frac{5}{3}. \end{cases}$ **B.6** $\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = 3 \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = 1 \\ r_1r_2r_3r_4 = 0. \end{cases}$

B.7 4. **B.8** $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$. **B.9** $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 10\}$. **B.10** $S = \{6, 12, -4\}$. **B.11** $S = \{-4, -12, 16\}$.

B.12 $k = -8$ ou $k = -\frac{176}{27}$. **B.13** $k = -17$. **B.14** $k = 2$. **B.15** $S = \{10, 20, 30\}$. **B.16** $S = \left\{2, \frac{1}{3}\right\}$. **B.17** $S = \{2, -3\}$.

B.18 a) a equação possui uma ou três raízes no intervalo $]1, 2[$; b) a equação possui duas ou quatro raízes no intervalo $]0, 1[$ ou não possui raiz nesse intervalo; c) a equação possui uma ou três raízes no intervalo $]-1, 2[$; d) a equação possui duas ou quatro raízes no intervalo $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ ou não possui raiz nesse intervalo. **B.19** $k \in \mathbb{R}$, $-2 < k < 0$.

B.20 $\nexists\, k, k \in \mathbb{R}$. **B.21** e. **B.22** b.

Exercícios complementares

C.1 $\frac{5\sqrt{5} - 24\sqrt{10}}{8}$. **C.2** $k = 2$. **C.3** $b = 5$. **C.4** $k = 7$. **C.5** -4. **C.6** $m = 4$. **C.7** a) $k = 11$; b) $S = \{1, 2, 3\}$. **C.8** a) $k = 7$; b) $S = \left\{\frac{1}{2}, 2, 1\right\}$. **C.9** b. **C.10** Basta mostrar que $f(0)$ e $f(\sqrt{2})$ têm sinais contrários. **C.11** c. **C.12** $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Questões dos vestibulares

V.1 $b = 3, c = 0$ e $d = -4$ ou $b = 0, c = -3$ e $d = 2$. **V.2** $m \in \mathbb{R}, m \leq -6$ ou $m \geq 6$. **V.3** c. **V.4** c. **V.5** e. **V.6** c.

Capítulo 23

Exercícios básicos

B.1 e. **B.2** b. **B.3** c. **B.4** a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 9\}$; b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$; c) $D(f \cdot g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 9\}$; d) $(f \cdot g)(5) = 4$; e) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 9}$. **B.5** a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; b) $D(g) = \mathbb{R}$; c) $D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; d) $\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{2}{9}$; e) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\log_2 x}{(x-1)^2}$. **B.6** $\forall x, x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1$. **B.7** $\forall x, x \in \mathbb{R}, x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

B.8 a) $V(5) =]4, 7[$ e $\overline{V}(5) =]4, 7[- \{5\}$; b) $V(-1) =]-2, 3[$ e $\overline{V}(-1) =]-2, 3[- \{-1\}$; c) $V(4) =]0, 5[$ e $\overline{V}(4) =]0, 5[- \{4\}$; d) $V(0) =]-2, 1[$ e $\overline{V}(0) =]-2, 1[- \{0\}$. **B.9** a) $V(6, 1) =]5, 7[$ e $\overline{V}(6, 1) =]5, 7[- \{6\}$. b) $V(-3, 2) =]-5, -1[$ e $\overline{V}(-3, 2) =]-5, -1[- \{-3\}$. c) $V\left(4, \frac{1}{2}\right) = \left]\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right[$ e $\overline{V}\left(4, \frac{1}{2}\right) = \left]\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right[- \{4\}$. d) $V(0, 1) =]-1, 1[$ e $\overline{V}(0, 1) =]-1, 1[- \{0\}$.

B.10 a)

b)

c)

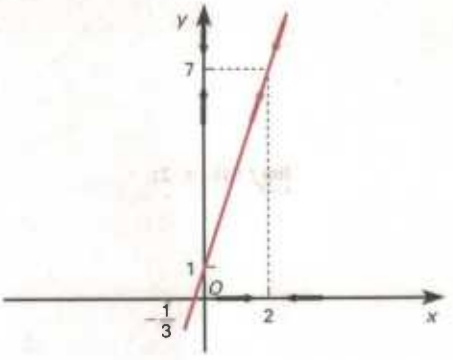
d)

e)

f)

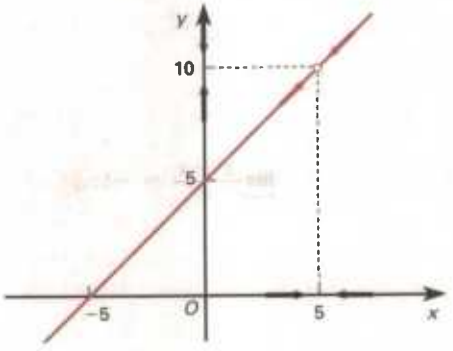
B.11 a) $|x| < 5$; b) $|x - 5| < 3$; c) $|x - 3| < 4$; d) $\left|x - \frac{7}{2}\right| < \frac{3}{2}$. **B.12** $x = 3$. **B.13** $x = 3$.

B.14 a)



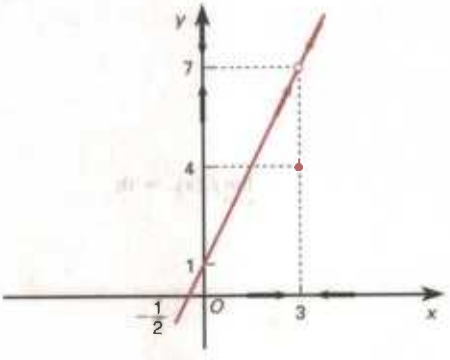
$\lim_{x \to 2} (3x + 1) = 7;$

b)



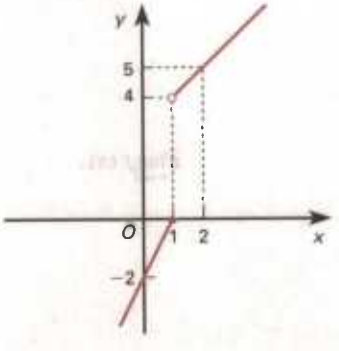
$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10;$

c)



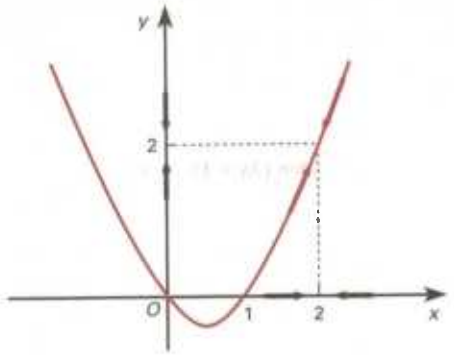
$\lim_{x \to 3} f(x) = 7;$

d)



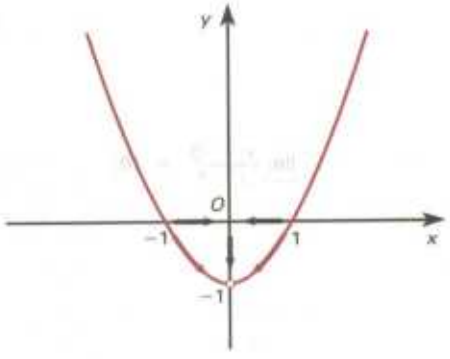
$\nexists \lim_{x \to 1} f(x);$

e)



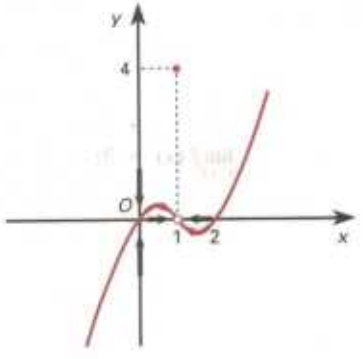
$\lim_{x \to 2} f(x) = 2;$

f)



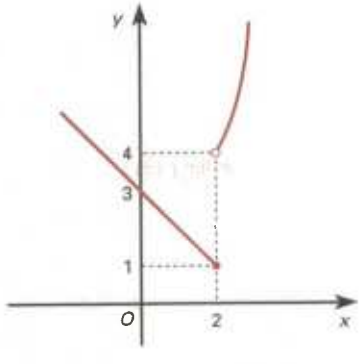
$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x}{x} = -1;$

g)



$\lim_{x \to 1} f(x) = 0;$

h)



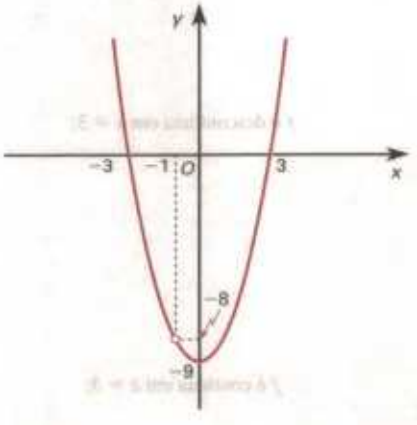
$\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$.

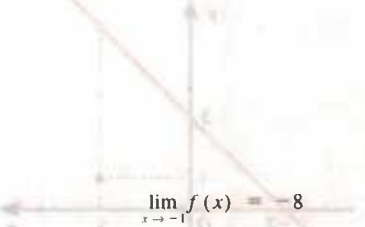
B.15 a) F; b) F; c) V; d) F; e) V. **B.16** Devemos mostrar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |(5x + 2) - 7| < \varepsilon$. **Fase 1 (análise para a escolha do δ):** observando que $|(5x + 2) - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow |5x - 5| < \varepsilon$ $\therefore 5|x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$, basta escolhermos $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** para qualquer real positivo ε, temos que: $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$; $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow 5|x - 1| < \varepsilon$; $5|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |5x - 5| < \varepsilon$; $|5x - 5| < \varepsilon \Rightarrow |(5x + 2) - 7| < \varepsilon$; logo, $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |(5x + 2) - 7| < \varepsilon$. Portanto $\lim_{x \to 1} (5x + 2) = 7$ (c.q.d.). **B.17** Demonstração análoga à anterior. **B.18** Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |6 - 6| < \varepsilon$. **Fase 1 (análise para a escolha do δ):** como a sentença $|6 - 6| < \varepsilon$ é verdadeira para qualquer real positivo ε, podemos escolher $\delta = \varepsilon$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** para qualquer real positivo ε existe o real positivo δ, $\delta = \varepsilon$, tal que $0 < |x - 4| < \varepsilon \Rightarrow |6 - 6| < \varepsilon$. Portanto $\lim_{x \to 4} 6 = 6$ (c.q.d.). **B.19** Demonstração análoga à anterior. **B.20** Devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que: $0 < |x - 5| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2 - 25}{x - 5} - 10\right| < \varepsilon$. **Fase 1 (análise para a escolha do δ):** observando que $\left|\frac{x^2 - 25}{x - 5} - 10\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5} - 10\right| < \varepsilon$ $\therefore \left|\frac{x^2 - 25}{x - 5} - 10\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x + 5) - 10| < \varepsilon$ e $x \neq 5$ $\therefore \left|\frac{x^2 - 25}{x - 5} - 10\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x - 5| < \varepsilon$, basta escolhermos $\delta = \varepsilon$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** para qualquer real positivo ε, existe o real positivo δ, $\delta = \varepsilon$, tal que: $0 < |x - 5| < \varepsilon \Rightarrow |x - 5| < \varepsilon$ $\therefore 0 < |x - 5| < \varepsilon \Rightarrow |(x + 5) - 10| < \varepsilon$ $\therefore 0 < |x - 5| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x + 5)(x - 5)}{x - 5} - 10\right| < \varepsilon$ $\therefore 0 < |x - 5| < \varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow \left|\frac{x^2 - 25}{x - 5} - 10\right| < \varepsilon$. Portanto, $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$ (c.q.d.). **B.21** Demonstração análoga à anterior.

Exercícios complementares

C.1 Sendo $V_1(a) =]c_1, d_1[$ e $V_2(a) =]c_2, d_2[$, temos que $c_1 < a < d_1$ e $c_2 < a < d_2$. Sendo $c = \text{mín}\{c_1, c_2\}$ e $d = \text{máx}\{d_1, d_2\}$, temos que: $c < a < d$ e $V_1(a) \cup V_2(a) =]c, d[$. Logo, $V_1(a) \cup V_2(a)$ é vizinhança completa de a (c.q.d.). **C.2** Demonstração análoga à anterior. **C.3** c. **C.4** c. **C.5** a) V; b) F; c) V; d) F; e) F; f) V; g) V; h) F; i) V; j) V. **C.6** Temos que $\lim_{x \to 4} f(x)$ não é 2, pois, para a vizinhança completa de 2 no eixo Oy, $]1, 3[$, qualquer vizinhança reduzida de 4 no eixo Ox, $\overline{V}(4)$, possui elementos com imagens $f(x)$ maiores que 3. Temos também que $\lim_{x \to 4} f(x)$ não é 5, pois, para a vizinhança completa de 5 no eixo Oy, $]3, 6[$, qualquer vizinhança reduzida de 4 no eixo Ox, $\overline{V}(4)$, possui elementos com imagens $f(x)$ menores do que 3. Analogamente, argumenta-se que $\lim_{x \to 4} f(x)$ não pode ser maior que 5, nem estar entre 2 e 5 e nem ser menor que 2. Logo, não existe $\lim_{x \to 4} f(x)$.

C.7





C.8 Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que: $\forall x, x \in \mathbb{R}$, $0 < |x - 5| <$ $< \delta \Rightarrow |(x^2 - 6x + 8) - 3| < \varepsilon$. **Fase 1 (análise para a escolha do δ):** o número δ depende de ε, por isso, para determinarmos um possível valor de δ, analisemos a desigualdade que envolve ε, ou seja, $|(x^2 - 6x + 8) - 3| < \varepsilon$; observe que

$|(x^2 - 6x + 8) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 6x + 5| < \varepsilon \therefore |(x^2 - 6x + 8) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x - 5)(x - 1)| < \varepsilon \therefore |(x^2 - 6x + 8) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x - 5| \cdot |x - 1| < \varepsilon$; o que nos interessa é a tendência dos valores $f(x)$ para x tendendo a 5; sem perda de generalidade, podemos analisar a tendência dos valores de x em uma vizinhança reduzida simétrica com raio 1 do número 5:

fixada essa vizinhança, temos $|x - 5| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 5 < 1 \therefore |x - 5| < 1 \Leftrightarrow 4 < x < 6 \therefore |x - 5| < 1 \Leftrightarrow 3 < x - 1 < 5$
$\therefore |x - 5| < 1 \Leftrightarrow |x - 1| < 5$; assim, se $\varepsilon \geq 5$, escolhemos $\delta = 1$, e se $\varepsilon < 5$, escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** se $\varepsilon \geq 5$, tomamos $\delta = 1$ e temos $0 < |x - 5| < 1 \Rightarrow \begin{cases} |x - 5| < 1 \\ |x - 1| < 5 \end{cases} \therefore$
$\therefore 0 < |x - 5| < 1 \Rightarrow |x - 5||x - 1| < 5 \therefore 0 < |x - 5| < 1 \Rightarrow |(x - 5)(x - 1)| < 5 \therefore 0 < |x - 5| < 1 \Rightarrow |x^2 - 6x + 5| < 5 \therefore$
$\therefore 0 < |x - 5| < 1 \Rightarrow |(x^2 - 6x + 8) - 3| < 5 \leq \varepsilon$. Se $\varepsilon < 5$, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ (note que $\delta < 1$) e temos $0 < |x - 5| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} |x - 5| < \frac{\varepsilon}{5} \\ |x - 1| < 5 \end{cases} \therefore 0 < |x - 5| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |x - 5||x - 1| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 \therefore 0 < |x - 5| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |(x - 5)(x - 1)| < \varepsilon \therefore$
$0 < |x - 5| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |x^2 - 6x + 5| < \varepsilon \therefore 0 < |x - 5| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |(x^2 - 6x + 8) - 3| < \varepsilon$ (c.q.d.). **C.9** Demonstração análoga à anterior.

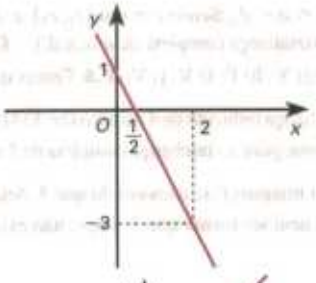
Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** d. **V.3** b. **V.4** d.

Capítulo 24

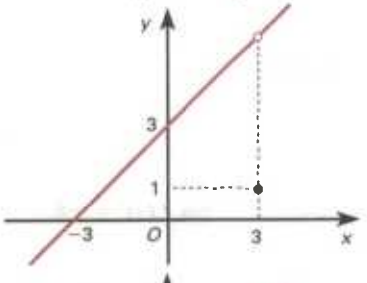
Exercícios básicos

B.1 a)



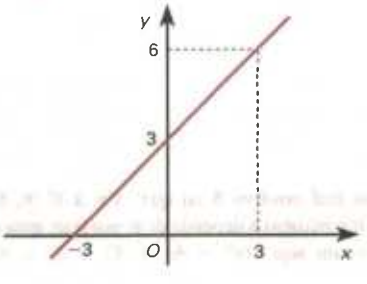
f é contínua em $a = 2$;

b)



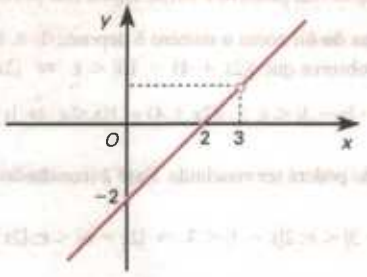
f é descontínua em $a = 3$;

c)



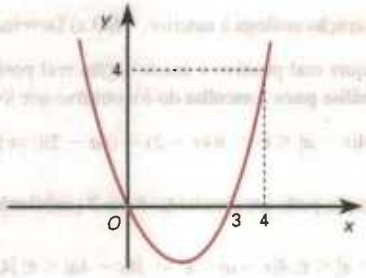
f é contínua em $a = 3$;

d)



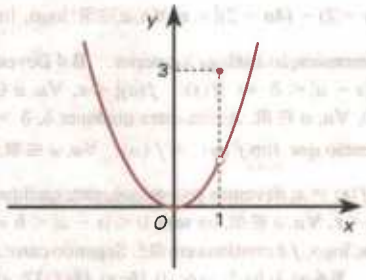
f não está definida para $x = 3$; por isso não podemos classificá-la como contínua ou descontínua nessa abscissa;

e)



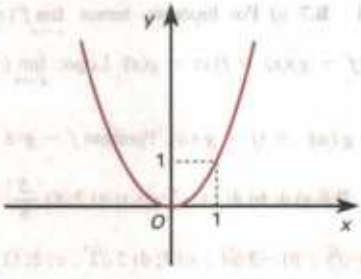
f é contínua em $a = 4$;

f)



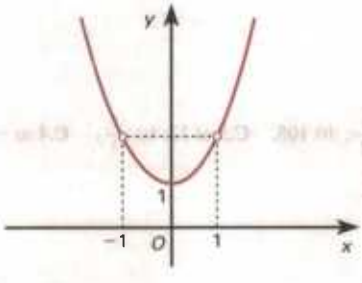
f é descontínua em $a = 1$;

g)



f é contínua em $a = 1$;

h)



f não está definida para $x = 1$, por isso não podemos classificá-la como contínua ou descontínua nessa abscissa.

B.2 a) Devemos provar que $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, ou seja, que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x + 4) - 10| < \varepsilon$. **Fase 1 (análise para a escolha do δ):** como o número δ depende de ε, façamos uma análise da desigualdade que envolve ε, ou seja, $|(2x + 4) - 10| < \varepsilon$; observe que $|(2x + 4) - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 6| < \varepsilon$ $\therefore |(2x + 4) - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |2(x - 3)| < \varepsilon \therefore |(2x + 4) - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |2| \cdot |x - 3| < \varepsilon \therefore |(2x + 4) - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$; assim, dado ε positivo e arbitrário, escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** $0 < |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2|x - 3| < \varepsilon$; $2|x - 3| < 3 \Rightarrow |2x - 6| < \varepsilon$; $|2x - 6| < \varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow |(2x + 4) - 10| < \varepsilon$; portanto temos $0 < |x - 3| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(2x + 4) - 10| < \varepsilon$; logo, $\lim_{x \to 3} (2x + 4) = 2 \cdot 3 + 4$, ou seja, $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$; assim, a função f é contínua em $x = 3$. b) Demonstração análoga à anterior. **B.3** a) Devemos provar que f é contínua em a, $\forall a, a \in \mathbb{R}$; ou seja, devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ, tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(4x - 2) - (4a - 2)| < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$. **Fase 1 (análise para a escolha do δ):** observe que $|(4x - 2) -$ $- (4a - 2)| < \varepsilon \Leftrightarrow |4x - 4a| < \varepsilon \therefore |(4x - 2) - (4a - 2)| < \varepsilon \Leftrightarrow 4|x - a| < \varepsilon \therefore |(4x - 2) - (4a - 2)| \Leftrightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{4}$; assim, dado ε positivo e arbitrário, escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, e a demonstração pode ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** $0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x - a| < \frac{\varepsilon}{4}$; $|x - a| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 4|x - a| < \varepsilon$; $4|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |4x - 4a| < \varepsilon$; $|4x - 4a| < \varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow |(4x - 2) - (4a - 2)| < \varepsilon$. Portanto, temos $0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |(4x - 2) - (4a - 2)| < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$; logo, $\lim_{x \to a} (4x - 2) =$ $= 4a - 2$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$; assim, a função f é contínua em $\mathbb{R}$ (c.q.d.). b) Demonstração análoga à anterior. **B.4** Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$. Como f é função constante, temos $f(x) = f(a) = k$ e, portanto, $|f(x) - f(a)| = 0$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$. Assim, para qualquer δ, $\delta > 0$, tem-se que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$. Concluímos então que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$, isto é, que f é contínua em $\mathbb{R}$ (c.q.d.). **B.5** Primeiro caso ($x > 0$): para $x > 0$, temos $f(x) = x$; devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$, ou seja, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \varepsilon$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$; ora, basta escolhermos $\delta = \varepsilon$, e essa implicação é verdadeira; logo, f é contínua em $\mathbb{R}_+^*$. Segundo caso: $x < 0$ (análogo ao primeiro caso). Terceiro caso: $x = 0$ (análogo aos casos anteriores). **B.6** a) 3; b) 2; c) 6; d) 16; e) 48; f)37; g) 6; h) 9; i) 17; j) 280; k) 0; l) 8; m) 15; n) $-\frac{35}{2}$; o) $-\frac{119}{4}$; p) 0; q) 1024. **B.7** a) Por hipótese, temos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Por definição de diferença de funções, temos $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$. Logo, $\lim_{x \to a} (f - g)(x) =$ $= \lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] \overset{\ell.4}{=} \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) \overset{\text{Hipótese}}{=} f(a) - g(a) = (f - g)(a)$. Portanto $f - g$ é contínua em a (c.q.d.). Os itens (b) e (c) têm demonstrações análogas à do item (a). **B.8** a) 4; b) 4; c) -3; d) 1; e) 2; f) $\frac{5}{8}$; g) $\frac{41}{9}$; h) 1. **B.9** $k = 2$. **B.10** $k = -1$. **B.11** a) 5; b) $\frac{1}{2}$; c) $\sqrt{5}$; d) 4. **B.12** a) $\sqrt{5}$; b) $-3\sqrt[3]{4}$; c) 7; d) $2\sqrt{2}$; e) 2; f) -1. **B.13** a) 6; b) $\frac{1}{8}$; c) 2; d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Exercícios complementares

C.1 a) 4; b) 4; c) 7; d) $\frac{1}{5}$; e) 8; f) 6; g) 2; h) 1; i) -1. **C.2** a) $-\frac{1}{2}$; b) 108. **C.3** a) 12; b) $\frac{1}{3}$. **C.4** a) $-\frac{1}{120}$; b) 12. **C.5** $2x$. **C.6** $-\frac{1}{x^2}$. **C.7** $3x^2$. **C.8** $\frac{3}{2}$. **C.9** -3. **C.10** $k = \frac{1}{4}$.

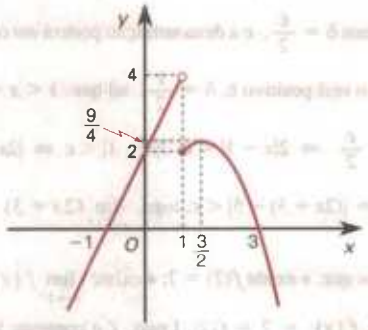
Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** b. **V.3** a. **V.4** c. **V.5** b.

Capítulo 25

Exercícios básicos

B.1 a)



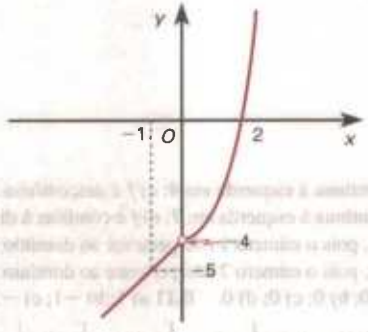
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$,

e

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$;

b) não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$, pois $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$.

B.2 a)



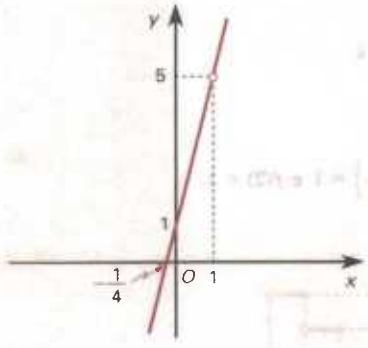
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -4$,

e

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -4$;

b) como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = -4$, temos que existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ e seu valor é -4.

B.3 a)



$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 5$,

e

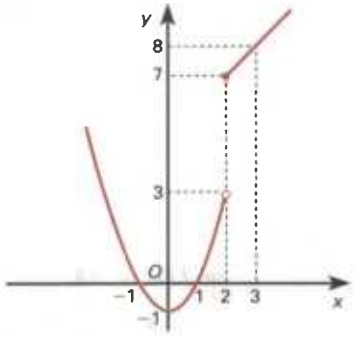
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 5$;

b) como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 5$, temos que existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ e seu valor é 5. **B.4** a) Para qualquer x à esquerda de 1, isto é, $x < 1$, temos que $f(x) = x + 2$. Assim, devemos provar que, para qualquer real positivo ε, existe algum real positivo δ tal que $1 - \delta < x < 1 \Rightarrow |(x + 2) - 3| < \varepsilon$. **Fase 1 (análise para a escolha de δ):** observe que $|(x + 2) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \varepsilon$ e que $1 - \delta < x < 1 \Leftrightarrow -\delta < x - 1 < 0 \therefore 1 - \delta < x < 1 \Leftrightarrow |x - 1| < \delta$. Assim, dado ε, $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $\delta = \varepsilon$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** para qualquer real positivo ε, existe o real positivo δ, $\delta = \varepsilon$, tal que: $1 - \varepsilon < x < 1 \Rightarrow -\varepsilon < x - 1 < 0$; $-\varepsilon < x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| < \varepsilon$; $|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |(x + 2) - 3| < \varepsilon$; portanto, temos: $1 - \varepsilon < x < 1 \Rightarrow |(x + 2) - 3| < \varepsilon$; logo, $\lim_{x \to 1^-} (x + 2) = 3$ (c.q.d.). b) Para qualquer x à direita de 1, isto é, $x > 1$,

temos que $f(x) = 2x + 3$. Assim, devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo δ tal que $1 < x < 1 + \delta \Rightarrow |(2x + 3) - 5| < \varepsilon$. **Fase 1 (análise para a escolha do δ):** observe que $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 2| < \varepsilon$ $\therefore$ $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 1| < \varepsilon$ $\therefore$ $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e que $1 < x < 1 + \delta \Rightarrow 0 < x - 1 < \delta$ $\therefore 1 < x < 1 + \delta \Rightarrow |x - 1| < \delta$. Assim, dado ε, $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** para qualquer real positivo ε, existe o real positivo δ, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, tal que: $1 < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2}$; $0 < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$; $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow 2|x - 1| < \varepsilon$; $2|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |2x - 2| < \varepsilon$; $|2x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |(2x + 3) - 5| < \varepsilon$; portanto temos $1 < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |(2x + 3) - 5| < \varepsilon$; logo, $\lim_{x \to 1^+} (2x + 3) = 5$ (c.q.d.).

B.5 Demonstrações análogas às do exercício B.4.

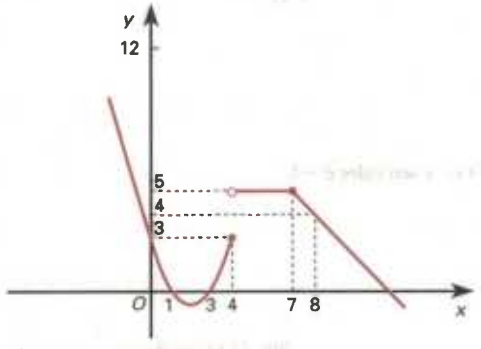
B.6 a)



b) Temos que: • existe $f(2) = 7$; • existe $\lim_{x \to 2^+} f(x)$; e • $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 7 = f(2)$. Logo, f é contínua à direita em 2.

c) Temos que: • existe $f(2) = 7$; • existe $\lim_{x \to 2^-} f(x)$; e • $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \neq f(2)$. Logo, f é descontínua à esquerda em 2.

B.6 a)



b) f é contínua à esquerda em 4; c) f é descontínua à direita em 4; d) f é contínua à esquerda em 7; e) f é contínua à direita em 7.

B.8 Não, pois o número 1 não pertence ao domínio de f.

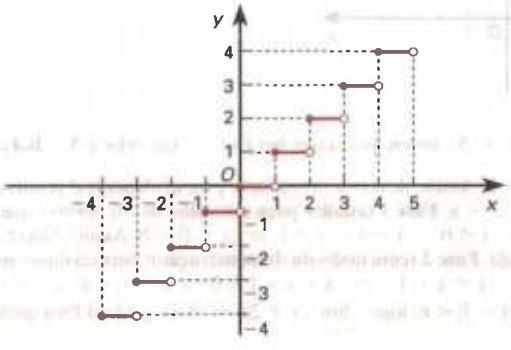
B.9 Não, pois o número 2 não pertence ao domínio de f.

B.10 a) 0; b) 0; c) 0; d) 0. **B.11** a) 1; b) −1; c) −2; d) 2; e) −3; f) 3; g) 1; h) −1; i) $\frac{1}{6}$; j) $-\frac{1}{6}$; k) $-\frac{1}{4}$; l) $\frac{1}{4}$.

Exercícios complementares

C.1 a) 3; b) −6. **C.2** a) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, $f\left(\frac{9}{5}\right) = 1$ e $f(2) = 2$.

b)



c) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$; d) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$; e) $\lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1$ e $\lim_{x \to n^+} f(x) = n$. **C.3** $m = 5$. **C.4** $m = -1$.

C.5 a) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$; b) 3.

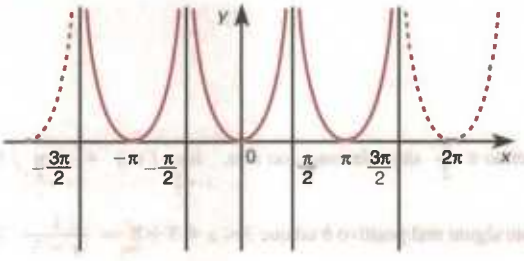
Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$. **V.3** b.

Capítulo 26

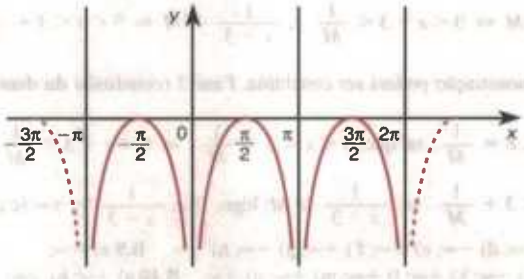
Exercícios básicos

B.1



$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$

B.2

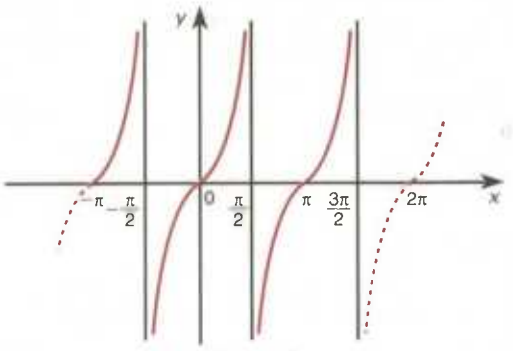


$\lim_{x \to \pi} f(x) = -\infty$

B.3 Devemos provar que, para qualquer real positivo M, existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^4} > M$.

Fase 1 (análise para a escolha do δ): observe que $\frac{1}{x^4} > M \Leftrightarrow 0 < x^4 < \frac{1}{M} \therefore \frac{1}{x^4} > M \Leftrightarrow 0 < |x|^4 < \frac{1}{M} \therefore \frac{1}{x^4} > M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}} \therefore \frac{1}{x^4} > M \Leftrightarrow 0 < |x - 0| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}}$; assim, dado M, $M > 0$, basta escolhermos $\delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}}$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** para qualquer real positivo M, existe o real positivo δ, $\delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}}$, tal que: $0 < |x - 0| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}} \Rightarrow 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}}$; $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}} \Rightarrow \frac{1}{|x|} > \sqrt[4]{M}$; $\frac{1}{|x|} > \sqrt[4]{M} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{x^4} > M$; portanto, temos $0 < |x - 0| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}} \Rightarrow \frac{1}{x^4} > M$. Logo, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$ (c.q.d.). **B.4** Devemos provar que, para qualquer real positivo M, existe algum real positivo δ tal que $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow -\frac{1}{|x - 3|} < -M$. **Fase 1 (análise para a escolha do δ):** observe que $-\frac{1}{|x - 3|} < -M \Leftrightarrow \frac{1}{|x - 3|} > M \Leftrightarrow 0 < |x - 3| < \frac{1}{M}$; assim, dado M, $M > 0$, basta escolhermos $\delta = \frac{1}{M}$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** para qualquer real positivo M, existe o real positivo δ, $\delta = \frac{1}{M}$ tal que $0 < |x - 3| < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{|x - 3|} > M$; $\frac{1}{|x - 3|} > M \Rightarrow -\frac{1}{|x - 3|} < -M$; portanto temos $0 < |x - 3| < \frac{1}{M} \Rightarrow -\frac{1}{|x - 3|} < -M$; logo, $\lim_{x \to 3}\left(-\frac{1}{|x - 3|}\right) = -\infty$ (c.q.d.). **B.5** a) $\lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$. b) Não existe $\lim_{x \to 5} f(x)$ pois os limites laterais para x tendendo a 5 são diferentes, ou seja, $\lim_{x \to 5^-} f(x) \neq$ $\neq \lim_{x \to 5^+} f(x)$.

B.6 a)



$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$

b) Não existe $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$, pois os limites laterais para x tendendo a $\frac{\pi}{2}$ são diferentes, ou seja, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$.

B.7 a) Devemos provar que, para qualquer real positivo M, existe algum real positivo δ tal que $3 < x < 3 + \delta \Rightarrow \frac{1}{x-3} > M$.

Fase 1 (análise para a escolha de δ): observe que $\frac{1}{x-3} > M \Leftrightarrow 0 < x - 3 < \frac{1}{M} \therefore \frac{1}{x-3} > M \Leftrightarrow 3 < x < 3 + \frac{1}{M}$; assim, dado M, $M > 0$, basta escolhermos $\delta = \frac{1}{M}$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** para qualquer real positivo M, existe o real positivo δ, $\delta = \frac{1}{M}$, tal que: $3 < x < 3 + \frac{1}{M} \Rightarrow 0 < x - 3 < \frac{1}{M}$, $0 < x - 3 < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x-3} > M$; portanto temos $3 < x < 3 + \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x-3} > M$; logo, $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ (c.q.d.).

b) Demonstração análoga à anterior. **B.8** a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $+\infty$; g) $+\infty$; h) $-\infty$. **B.9** a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$; e) $+\infty$, f) $-\infty$; g) $+\infty$; h) $-\infty$; i) $+\infty$, j) $-\infty$; k) $+\infty$; l) $+\infty$; m) $+\infty$; n) $+\infty$. **B.10** a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$. **B.11** a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$; e) $-\infty$; f) $+\infty$.

Exercícios complementares

C.1 a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$. **C.2** a) $+\infty$; b) $+\infty$. **C.3** a) $\lim_{x \to 3^-} \frac{x+5}{x^2-9} = -\infty$ e $\lim_{x \to 3^+} \frac{x+5}{x^2-9} = +\infty$. Como esses limites laterais são diferentes, concluímos que não existe $\lim_{x \to 3} \frac{x+5}{x^2-9}$. b) Análogo ao item (a).

Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** b. **V.3** e. **V.4** $-\infty$.

Capítulo 27

Exercícios básicos

B.1 a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$; b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$. **B.2** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. **B.3** a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$; b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$. **B.4** a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) 0; f) 0; g) 0; h) 0. **B.5** a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. **B.6** a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. **B.7** a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$; e) $+\infty$; f) $+\infty$; g) $-\infty$; h) $+\infty$. **B.8** a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$; e) $-\infty$; f) $+\infty$; g) $+\infty$; h) $+\infty$; i) $-\infty$; j) $+\infty$; k) $-\infty$. **B.9** a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $-\infty$; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $+\infty$; g) $-\infty$; h) $+\infty$; i) $+\infty$; j) $-\infty$; k) $-\infty$; l) $+\infty$; m) $+\infty$; n) $-\infty$. **B.10** a) $+\infty$; b) $\frac{4}{3}$; c) 0; d) $-\infty$; e) $+\infty$; f) $-\infty$; g) 0; h) $\frac{3}{2}$; i) 0; j) $+\infty$; k) $-\infty$; l) $+\infty$; m) 0; n) $+\infty$. **B.11** a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) 0; e) $+\infty$; f) $-\infty$; g) $+\infty$; h) 0.

Exercícios complementares

C.1 a) $-\infty$; b) 0; c) 0; d) 2; e) $\frac{9}{2}$. **C.2** Devemos provar que para qualquer real positivo ε existe algum real positivo M tal que

$x > M \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$. **Fase 1 (análise para a escolha do M):** observe que $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x^2|} < \varepsilon$ $\therefore \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \sqrt{\varepsilon}$ $\therefore \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$; para $x > 0$, temos $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$; assim, dado ε, $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** para qualquer real positivo ε, existe o real positivo M, $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, tal que $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$; $|x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow |x|^2 > \frac{1}{\varepsilon}$; $|x|^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{|x|^2} < \varepsilon$; $\frac{1}{|x|^2} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$; portanto temos $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$; logo, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ (c.q.d.). **C.3** Demonstração análoga à anterior. **C.4** a) 1; b) -1. **C.5** a) Devemos provar que, para qualquer real positivo N, existe algum real positivo M tal que $x > M \Rightarrow x^2 > N$. **Fase 1 (análise para a escolha do M):** se x tende a $+\infty$, então $x > 0$; logo, a desigualdade $x^2 > N$ pode ser escrita como $x > \sqrt{N}$; assim, dado N, $N > 0$, basta escolhermos $M = \sqrt{N}$, e a demonstração poderá ser concluída. **Fase 2 (conclusão da demonstração):** para qualquer real positivo N, existe o real positivo M, $M = \sqrt{N}$, tal que $x > \sqrt{N} \Rightarrow x^2 > N$, logo, $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ (c.q.d.). b) Demonstração análoga à anterior.

Questões dos vestibulares

V.1 c. **V.2** e. **V.3** b. **V.4** e.

Capítulo 28

Exercícios básicos

B.1 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) -1; d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; e) -1; f) 0; g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $\frac{1}{2}$; i) $\sqrt{2}$; j) 1; k) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; l) $\frac{1}{2}$; m) 1. **B.2** a) 1; b) 6; c) $\frac{4}{5}$; d) 1; e) $\frac{2}{7}$; f) $\frac{1}{3}$; g) 1; h) 2; i) 1; j) 8; k) $\frac{21}{2}$; l) $\frac{3}{2}$; m) $\frac{1}{2}$; n) $\frac{5}{4}$; o) 1; p) $\frac{1}{3}$. **B.3** a) 7; b) $\frac{4}{3}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) $\frac{1}{25}$; f) $\frac{1}{3}$; g) $\frac{1}{4}$; h) $\frac{1}{5}$; i) 0; j) 1; k) $\frac{1}{243}$; l) 2. **B.4** a) $\cos a$; b) $-\operatorname{sen} a$; c) $2 \cos 2a$; d) $-2 \operatorname{sen} 2a$.

Exercícios complementares

C.1 a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) -1; d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.2** a) $\frac{1}{2}$; b) 2; c) $10\sqrt{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) 2; g) 14; h) 4. **C.3** a) $\sec a \operatorname{tg} a$; b) $\sec^2 a$. **C.4** a) 0; b) 0.

Questões dos vestibulares

V.1 a. **V.2** c. **V.3** b. **V.4** b.

Capítulo 29

Exercícios básicos

B.1 a) 125; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{9}{4}$; d) 1. **B.2** a) 25; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{1}{4}$; d) 2; e) 4; f) $\frac{1}{8}$. **B.3** a) $+\infty$; b) 0; c) 0; d) $+\infty$; e) $+\infty$; f) 0; g) 0; h) $+\infty$. **B.4** a) $+\infty$; b) 0; c) $+\infty$; d) $+\infty$; e) 0; f) $+\infty$; g) $+\infty$; h) 0; i) $+\infty$; j) 0. **B.5** a) $+\infty$; b) 0; c) 0; d) $+\infty$; e) 0; f) $+\infty$; g) 0; h) 0; i) $+\infty$; j) $+\infty$. **B.6** a) 3; b) -2; c) 2; d) $-\frac{2}{5}$. **B.7** a) -1; b) 0; c) -1; d) $\frac{1}{2}$. **B.8** a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) $-\infty$; f) $+\infty$; g) $+\infty$; h) $-\infty$. **B.9** a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$; e) $+\infty$; f) $+\infty$; g) $+\infty$; h) $-\infty$; i) $-\infty$; j) $+\infty$; k) $+\infty$; l) $-\infty$.

Exercícios complementares

C.1 a) 9; b) 81; c) 512; d) 1. **C.2** a) 9; b) 1; c) 0; d) 0. **C.3** a) 1; b) $+\infty$; c) $-\infty$. **C.4** a) $-\infty$; b) $+\infty$.

Questões dos vestibulares

V.1 e. **V.2** a. **V.3** 0 (zero). **V.4** b.

Capítulo 30

Exercícios básicos

B.1 a) e^7; b) e^{-9}; c) e^5; d) e^{-6}. **B.2** a) e^8; b) e^{-6}; c) e^9; d) e^{-42}. **B.3** a) e^{12}; b) e^2; c) $e^{\frac{5}{3}}$; d) e^6. **B.4** a) $e^{\frac{5}{2}}$; b) $e^{\frac{5}{12}}$; c) e^{18};

d) $e^{\frac{35}{4}}$. **B.5** a) e^5; b) e^6; c) e^3; d) e^4. **B.6** a) -2; b) 5; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{7}$. **B.7** a) 7; b) -1; c) 1; d) $3e^4$. **B.8** a) 8; b) -2; c) -4; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $-\frac{1}{5}$. **B.9** a) 5; b) 2; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{3}{4}$.

Exercícios complementares

C.1 a) e^6; b) e^{-1}. **C.2** a) $e^{\frac{3}{10}}$; b) $e^{\frac{2}{21}}$. **C.3** a) e; b) e^{-18}. **C.4** a) 1; b) $-\ell n\ 5$. **C.5** a) 2; b) $\frac{3}{2}$.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** b. **V.3** d. **V.4** a.

Capítulo 31

Exercícios básicos

B.1 a) V; b) F; c) V; d) F; e) V; f) V; g) V. **B.2** a) $f'(1) = 8$; b) $y = 8x - 6$. **B.3** a) $f'(2) = 24$; b) $y = 24x - 32$. **B.4** a) $f'(a) = -\text{sen}\ a$; b) $y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.5** a) $f'(a) = \frac{\sqrt{a}}{2a}$; b) $y = \frac{x}{4} + 1$. **B.6** e, pois $1 \in]-2, 5[$ e $1 \notin D(f)$. **B.7** Basta provar que existe $f'(a)$, $\forall a, a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 2$. **B.8** Basta provar que existe $f'(a)$, $\forall a, a \in \mathbb{R}^*$. **B.9** a) $f'(5) = 1$; b) $f'(2) = -1$; c) $\nexists f'(3)$. **B.10** a) $f'(0) = -2$; b) $f'(3) = 2$; c) $\nexists f'\left(\frac{1}{2}\right)$. **B.11** a) $f(1) = 5$; b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$; c) não, porque f não é contínua no ponto de abscissa 1. **B.12** Observando que f não é contínua no ponto de abscissa 5, pois $\lim\limits_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$, concluímos que f não é derivável nesse ponto. **B.13** a) V; b) F; c) V; d) V; e) V. **B.14** c. **B.15** a) $f'(x) = 10x$; b) $g'(x) = 12x^2$; c) $h'(x) = \cos x$; d) $t'(x) = -\frac{1}{x^2}$; e) $u'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}$; f) $v'(x) = -\text{sen}\ x$.

Exercícios complementares

C.1 a) $f'(2) = 32$; b) $y = 32x - 48$. **C.2** a) $f'(1) = 3$; b) $y = 3x - 1$. **C.3** $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$. **C.4** $f'(x) = a^x\ \ell n\ a$. **C.5** $f'(x) = e^x$. **C.6** a) $f'(5) = 10$; b) $f'(0) = 0$; c) $\nexists f'(2)$.

Questões dos vestibulares

V.1 4. **V.2** b. **V.3** d.

Capítulo 32

Exercícios básicos

B.1 a) $f'(x) = 0$; b) $g'(x) = 5x^4$; c) $h'(x) = \cos x$; d) $t'(x) = -\text{sen}\ x$; e) $u'(x) = \frac{1}{x}$; f) $r'(x) = 5^x\ \ell n\ 5$; g) $v'(x) = e^x$. **B.2** a) $g'(2) = 80$; b) $y = 80x - 128$. **B.3** a) $u'(x) = \frac{1}{3}$; b) $y = \frac{x}{3} - 1 + \ell n\ 3$. **B.4** a) $a'(x) = 5x^4 + 4x^3$; b) $b'(x) = \cos x + \text{sen}\ x$; c) $c'(x) = 5x^4\ \ell n\ x + x^4$; d) $d'(x) = (3x^2 + 1)\ \text{sen}\ x + (x^3 + x)\cos x$; e) $e'(x) = 5x^4\ \text{sen}\ x \cos x + x^5 \cos^2 x - x^5\ \text{sen}^2 x$; f) $f'(x) = 36x^3$; g) $g'(x) = 60x^4 - 12x^3 + 2$; h) $h'(x) = \frac{1}{x\ \ell n\ 5}$; i) $i'(x) = \frac{6}{x\ \ell n\ 2}$; j) $j'(x) = -\frac{2x^6 + 16x^3}{x^8}$; k) $k'(x) = \frac{5\ \text{sen}\ x}{\cos^2 x}$; l) $l'(x) = \frac{x^3 \cos x - 3x^2\ \text{sen}\ x + 1}{(x^3 + \cos x)^2}$; m) $m'(x) = \frac{4x \cos x - 20\ \text{sen}\ x}{x^6}$; n) $n'(x) = -9x^{-10}$; o) $o'(x) = -10x^{-3}$; p) $p'(x) = -3x^{-4}\ \text{tg}\ x + x^{-3}\ \text{sec}^2 x$; q) $q'(x) = -\frac{x\ \text{cossec}^2 x + 2\ \text{cotg}\ x}{3x^3}$; r) $r'(x) = \frac{\text{sec}\ x\ (\text{tg}\ x - 1)}{(1 + \text{tg}\ x)^2}$ (**nota:** usamos a identidade $\text{sec}^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$); s) $s'(x) = 4\ \text{sec}\ x\ \text{tg}\ x - 3\ \text{cossec}\ x\ \text{cotg}\ x$; t) $t'(x) = 4^x(1 + x\ \ell n\ 4)$. **B.5** a) $a'(x) = 3x^2 + 1$; b) $b'(x) = \frac{1}{x} - \cos x$; c) $c'(x) = -\text{sen}\ x\ \ell n\ x + \frac{\cos x}{x}$; d) $d'(x) = 2x \cos x - (x^2 + 3)\ \text{sen}\ x$; e) $e'(x) = x^5 \cos x + x^4\ (5\ \text{sen}\ x + 2\ \text{sen}\ x \cos x) + 4x^3\ \text{sen}^2 x$; f) $f'(x) = 50x^4$; g) $g'(x) = 24x^3 - 6x + 7$; h) $h'(x) = \frac{1}{x\ \ell n\ 7}$; i) $i'(x) = \frac{18}{x\ \ell n\ 4}$; j) $j'(x) = \frac{x^3 - 2}{x^3}$; k) $k'(x) = -\frac{12\ \text{sen}\ x + 6}{(2 + \text{sen}\ x)^2}$; l) $l'(x) = -30x^{-6}$; m) $m'(x) = \frac{\text{tg}\ x}{x} + \ell n\ x\ \text{sec}^2 x$;

n) $n'(x) = \dfrac{\operatorname{cotg} x + (1+x)\operatorname{cossec}^2 x}{\operatorname{cotg}^2 x}$; o) $o'(x) = \sec x \operatorname{tg} x \ln x + \dfrac{\sec x}{x}$; p) $p'(x) = (1 - \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x)\ln x + \dfrac{x + \operatorname{cossec} x}{x}$; q) $q'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$. **B.6** $(f \circ g)'(x) = 20(x^3 + 2x)^4(3x^2 + 2)$. **B.7** $(f \circ g)'(x) = 4x^3 \cos x^4$.

B.8 a) $y' = 27x^8(x^9 + 4)^2$; b) $y' = -6x^5 \operatorname{sen} x^6$; c) $y' = -6(\operatorname{sen} x)(\cos x)^5$; d) $y' = \dfrac{8x^3 + 3}{2x^4 + 3}$; e) $y' = 5(4x^3 + 2)\cos(x^4 + 2x)$; f) $y' = 8^{x^3 + x}(3x^2 + 1)\ln 8$; g) $y' = 18x^2(\operatorname{sen} x^3)^5 \cos x^3$; h) $y' = \dfrac{40x^3 - 5}{2x^4 - x}[\ln(2x^4 - x)]^4$; i) $y' = x^{3x}(3\ln x + 3)$; j) $y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$; k) $y' = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left(-\operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\right)$; l) $y' = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$; m) $y' = 4\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}$; n) $y' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; o) $y' = \dfrac{1}{2}(x^2 - 3x)^{-\frac{1}{2}}(2x - 3)$. **B.9** a) $y' = 5(2x^3 - 3x + 2)^4(6x^2 - 3)$; b) $y' = 4x^3 \sec^2(x^4 + 3)$; c) $y' = 6(\sec x)^6 \operatorname{tg} x$; d) $y' = \operatorname{cotg} x$; e) $y' = -24x^2 \operatorname{sen}\left(2x^3 + \dfrac{\pi}{7}\right)$; f) $y' = 2^{2x+2}\ln 2$; g) $y' = 3^{x^2 + 2x}(2x + 2)\ln 3$; h) $y' = -20x^4(\cos x^5)^3 \operatorname{sen} x^5$; i) $y' = 3(\ln \operatorname{sen} x)^2 \operatorname{cotg} x$; j) $y' = (3x)^x(\ln 3x + 1)$; k) $y' = (\operatorname{sen} x)^x[\ln \operatorname{sen} x + x \operatorname{cotg} x]$; l) $y' = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$; m) $y' = \dfrac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}$; n) $y' = \dfrac{1}{3}(x + \operatorname{sen} x)^{-\frac{2}{3}}(1 + \cos x)$. **B.10** a) $f'(1) = 2$; b) $f'(0) = 1$; c) $f'(3) = \dfrac{15}{16}$; d) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$; e) $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{9}{2}$; f) $f'(0) = 1$; g) $f'(1) = -10$; h) $f'(2) = \dfrac{1}{3}$. **B.11** $x - 9y + 4 = 0$.

B.12 $12x - 9y + 3\sqrt{3} - 2\pi = 0$. **B.13** a) $f^{(1)}(x) = 12x^5 + 3x^2$; $f^{(2)}(x) = 60x^4 + 6x$; $f^{(3)}(x) = 240x^3 + 6$; $f^{(4)}(x) = 720x^2$.
b) $f^{(1)}(x) = -x^{-2}$; $f^{(2)}(x) = 2x^{-3}$; $f^{(3)}(x) = -6x^{-4}$; $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$; c) $f^{(1)}(x) = e^x$; $f^{(2)}(x) = e^x$; $f^{(3)}(x) = e^x$; $f^{(4)}(x) = e^x$.
d) $f^{(1)}(x) = x^{-1}$; $f^{(2)}(x) = -x^{-2}$; $f^{(3)}(x) = 2x^{-3}$; $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$; e) $f^{(1)}(x) = 2\cos 2x$; $f^{(2)}(x) = -4\operatorname{sen} 2x$; $f^{(3)}(x) = -8\cos 2x$; $f^{(4)}(x) = 16\operatorname{sen} 2x$. f) $f^{(1)}(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$; $f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x$; $f^{(3)}(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x$; $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.
B.14 a) $f^{(49)}(x) = -\operatorname{sen} x$; b) $f^{(82)}(x) = -\cos x$; c) $f^{(103)}(x) = \operatorname{sen} x$.

Exercícios complementares

C.1 a) $f'(x) = 2^x(x^4 \ln 2 + 4x^3)$; b) $g'(x) = \dfrac{2^{x^2+1}(2x\cos x \ln 2 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$; c) $h'(x) = 3^x(\operatorname{sen} x \ln 3 + \cos x)$; d) $t'(x) = \dfrac{4x \cdot 3^x \operatorname{sen} x \cos x^4 - (\operatorname{sen} x^4)(3^x \operatorname{sen} x \ln 3 + 3^x \cos x)}{3^{2x}\operatorname{sen}^2 x}$. **C.2** a) $y' = -3(\cos 2^x)^2(2^x \operatorname{sen} 2^x \ln 2)$;
b) $y' = e^{\operatorname{tg}(x^2 - 2x)}(2x - 2)(\sec^2 x)(x^2 - 2x)$; c) $y' = \dfrac{x^2 + 3}{x^2}\cos\left(\dfrac{x^2 - 3}{x}\right)$; d) $y' = -\dfrac{16x^3 + 4}{x^2}\left(\cos\dfrac{2x^3 - 1}{x}\right)^3 \cdot \left(\operatorname{sen}\dfrac{2x^3 - 1}{x}\right)$; e) $y' = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$. **C.3** Primeiro caso: $x > 0$; para $x > 0$, temos $|x| = x$; logo, $f(x) = \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{\ln a}\ln x \therefore f'(x) = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}$. Segundo caso: $x < 0$; análogo ao primeiro.

C.4 a) $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 3}$; b) $f'(x) = -\dfrac{1}{(3 - x)\ln 2}$. **C.5** a) $y' = 5x^4 e^{x^5}\cos e^{x^5}$; b) $y' = 5x^4 e^{\operatorname{sen} x^5}\cos x^5$.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** b. **V.3** e (−16). **V.4** d. **V.5** e.

Capítulo 33

Exercícios básicos

B.1 $g'(40) = \dfrac{1}{60}$. **B.2** $g'(9) = \dfrac{1}{5}$. **B.3** a) $y' = 12x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; b) $y' = 2x \arccos x - \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$; c) $y' = \dfrac{3x - 12(1 + x^2)\operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)x^5}$; d) $y' = \dfrac{3(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1 - x^2}}$; e) $y' = 0$; f) $y' = \dfrac{3x^2(\operatorname{arctg} x)(1 + x^2) + x^3}{1 + x^2}$; g) $y' = \dfrac{x - \sqrt{1 - x^2}\operatorname{arcsen} x}{x^2\sqrt{1 - x^2}}$; h) $y' = -\dfrac{2\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$. **B.4** a) $y' = \dfrac{7}{\sqrt{1 - 49x^2}}$; b) $y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$; c) $y' = -\dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$; d) $y' = \dfrac{15}{4\sqrt{1 - 25x^2}}$; e) $y' = -\dfrac{3x^2}{5\sqrt{1 - \dfrac{x^6}{25}}}$; f) $y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2x^2 + 2x + 1}$.

B.5 $f'(-1) = \frac{1-\pi}{2}$. **B.6** $f'(0) = -\pi$. **B.7** $2x - 4y - 2 + \pi = 0$. **B.8** $2x + 2y - \pi = 0$. **B.9** a) $y' = -\frac{2y}{5+2x}$;

b) $y' = -\frac{x}{4y}$; c) $y' = \frac{4x}{25y}$; d) $y' = \frac{2}{y-1}$; e) $y' = \frac{1}{3y^2+12y+12}$; f) $y' = \frac{4x+2}{3-2x}$; g) $y' = \frac{x}{1-y}$;

h) $y' = \frac{16x}{y}$; i) $y' = \frac{3}{3-y}$; j) $y' = \frac{1}{8y^2-8y+2}$. **B.10** As equações das retas tangentes são: $y - 8\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(x-3)$ e $y + 8\sqrt{2} = -3\sqrt{2}(x-3)$. **B.11** As equações das retas tangentes são $x + 4y - 8 = 0$ e $x - 4y + 16 = 0$.

Exercícios complementares

C.1 $g'(-3) = \frac{1}{2}$. **C.2** $g'(4) = \frac{1}{10}$. **C.3** $\frac{4}{3}$. **C.4** a) $y' = \frac{12x^2(\arcsen x^3)^3}{\sqrt{1-x^6}}$;

b) $y' = \frac{(48x-16)[2\arccos(3x^2-2x)]^{-5}}{\sqrt{1-(3x^2-2x)^2}}$; c) $y' = \frac{3(\arcsen \ell n\, x)^2}{x\sqrt{1-(\ell n\, x)^2}}$; d) $y' = \frac{2x(\arctg x^2)^{-\frac{2}{3}}}{3(1+x^4)}$.

C.5 $y' = -\frac{\sen(x+y)}{1+\sen(x+y)}$. **C.6** $y' = \frac{y^x \ell n\, y - yx^{y-1}}{x^y \ell n\, x - xy^{x-1}}$.

Questões dos vestibulares

V.1 d. **V.2** e. **V.3** a. **V.4** e.

Capítulo 34

Exercícios básicos

B.1 a) f é crescente nos intervalos $]-\infty, 2]$ e $\left[\frac{10}{3}, +\infty\right[$; e f é decrescente no intervalo $\left[2, \frac{10}{3}\right]$. b) f é crescente nos intervalos $[0, 2]$ e $[7, +\infty[$; e f é decrescente nos intervalos $]-\infty, 0]$ e $[2, 7]$. c) f é crescente nos intervalos $]-\infty, -3]$ e $[1, +\infty[$; e f é decrescente no intervalo $[-3, 1]$. d) f é crescente nos intervalos $]-\infty, 2]$ e $[0, +\infty[$; e f é decrescente em $\{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 0$ e $x \neq -1\}$. **B.2** a) -3 e 1 são pontos de máximo local; e -1 e 3 são pontos de mínimo local. Os valores máximos locais de f são $f(-3) = \frac{102}{5}$ e $f(1) = \frac{178}{15}$, e os valores mínimos locais de f são $f(-1) = \frac{2}{15}$ e $f(3) = -\frac{42}{5}$. b) 1 é ponto de mínimo local de g; e 2 é abscissa de um ponto de inflexão. O valor $g(1) = \frac{91}{12}$ é mínimo local de g; e o ponto $\left(2, \frac{23}{3}\right)$ é ponto de inflexão de g. c) 2 é ponto de máximo local de h; e 4 é ponto de mínimo local de h. O valor $h(2) = \frac{23}{3}$ é máximo local de h; e o valor $h(4) = \frac{19}{3}$ é mínimo local de h. d) -1 é ponto de máximo local de t; 1 é ponto de mínimo local de t; e 0 é abscissa de um ponto de inflexão de t. O valor $t(-1) = \frac{2}{15}$ é máximo local de t; e o valor $t(1) = -\frac{2}{15}$ é mínimo local de t. **B.3** 2 é ponto de mínimo local de f. O mínimo local para $x = 2$ é $f(2) = 3$. **B.4** 1 é ponto de máximo local de f. O máximo local para $x = 1$ é $f(1) = 5$. **B.5** a) $f''(2) > 0$; logo, a concavidade é positiva para $x = 2$. b) $f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0$; logo, a concavidade é negativa para $x = \frac{1}{2}$. **B.6** a) $f''(2) > 0$; logo, a concavidade é positiva para $x = 2$. b) $f''(-1) < 0$; logo, a concavidade é negativa para $x = -1$. **B.7** a) $\left(-2, -\frac{28}{3}\right)$ é ponto de inflexão oblíqua; e $\left(1, -\frac{31}{12}\right)$ é ponto de inflexão horizontal. b) $(\pi, 0)$ é ponto de inflexão oblíqua. c) (4, 1) é ponto de inflexão vertical. d) $\left(\frac{3}{2}, \frac{53}{4}\right)$ é ponto de inflexão oblíqua. e) $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$ são pontos de inflexão oblíqua. f) $(1, 0)$ é ponto de inflexão vertical. g) $(0, 0)$ é ponto de inflexão horizontal. **B.8** a) $f'(3) = 0$ e $f''(3) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ 3 é ponto de mínimo local de f. b) $f(3) = -2$. **B.9** a) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ e $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6}$ é ponto de máximo local de f. b) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{12}$. **B.10** Basta mostrar que a equação $f'(x) = 0$ não possui raízes. **B.11** A função não possui extremantes. **B.12** a) 1 é ponto de máximo local de f; e -1 é ponto de mínimo local de f. Temos como máximo local de f o valor $f(1) = \frac{1}{2}$; e como mínimo local de f o valor $f(-1) = -\frac{1}{2}$. b) $\frac{\pi}{3}$ é ponto de máximo local de f; e $-\frac{\pi}{3}$ é ponto de

mínimo local de f. O valor $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ é máximo local de f; e o valor $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$ é mínimo local de f. c) 1 é ponto de máximo local de f. O valor $f(1) = \frac{1}{2}$ é máximo local de f. d) -1 é ponto de mínimo local de f. O valor $f(-1) = -\frac{1}{e}$ é mínimo local de f. **B.13** 64π cm³. **B.14** O raio da base mede $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm; e a altura mede $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

Exercícios complementares

C.1 a) f é crescente nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$; b) f é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. **C.2** $\frac{1}{e}$ é ponto de mínimo local de f. O valor $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ é mínimo local. **C.3** Basta mostrar que $f''(x) > 0$, $\forall x, x \in \mathbb{R}$. **C.4** $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{2}, e^{\frac{3\pi}{2}}\right)$ são pontos de inflexão oblíqua. **C.5** $\frac{512\pi}{3}$ cm³. **C.6** 20 000. **C.7** $4\sqrt[3]{5}$ cm, $\sqrt[3]{5}$ cm e $\frac{8\sqrt[3]{5}}{5}$ cm. **C.8** $R = 2\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$ cm e $H = 4\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$ cm.

Questões dos vestibulares

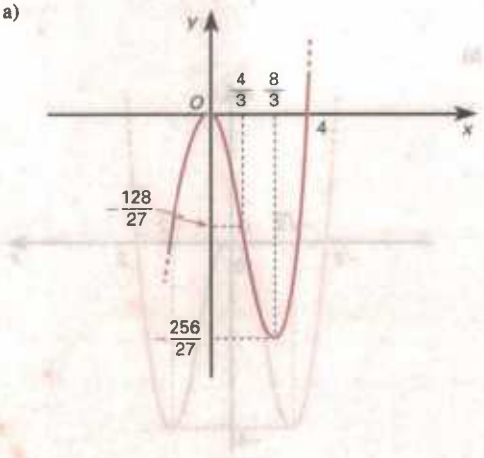
V.1 c. **V.2** d. **V.3** d. **V.4** a.

Capítulo 35

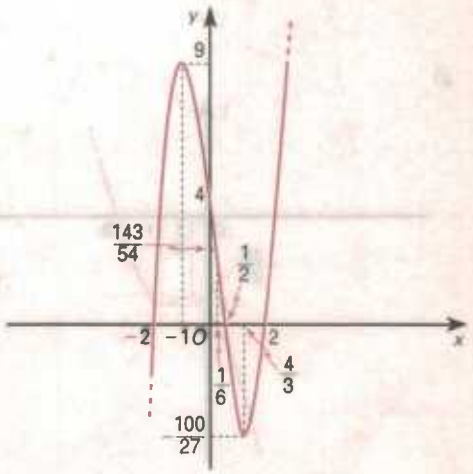
Exercícios básicos

B.1 a) $\lim\limits_{x \to 5^+} \frac{3}{x-5} = +\infty$; logo, a reta (r) $x = 5$ é assíntota vertical do gráfico de f (c.q.d.). As demonstrações de (b), (c) e (d) são análogas à de (a). **B.2** a) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\frac{3x-1}{x-2} - 3\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x-1-3x+6}{x-2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x-2} = 0$; logo, a reta (r) $g(x) = 3$ é assíntota horizontal de f. b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+1} - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2+1} - 2x)(\sqrt{4x^2+1} + 2x)}{\sqrt{4x^2+1} + 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1} + 2x} = 0$; logo, a reta r: $g(x) = 2x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f (c.q.d.). As demonstrações de (c) e (d) são análogas às de (a) e (b). **B.3** a) assíntota vertical r: $x = 4$; b) assíntotas verticais r: $x = 3$ e s: $x = -3$; c) assíntota vertical r: $x = 1$. d) assíntotas verticais r: $x = 2$ e s: $x = -2$. **B.4** a) assíntota horizontal r: $y = 2$. b) assíntota oblíqua r: $y = x$. c) assíntota horizontal r: $y = \frac{5}{2}$. d) assíntota oblíqua r: $y = x$. **B.5** d. **B.6** • A função f está definida para todo x, $x \in \mathbb{R}$; logo, não possui assíntota vertical. • Se o gráfico de f tiver assíntota não-vertical, então sua equação será da forma $g(x) = mx + q$, $\{m, q\} \subset \mathbb{R}$, com $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = q$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = q$. Temos que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^5+1}{x^3+x} = +\infty$ e que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^5+1}{x^3+x} = +\infty$. Como esses limites **não** são finitos, concluímos que o gráfico de f não possui assíntotas não-verticais.

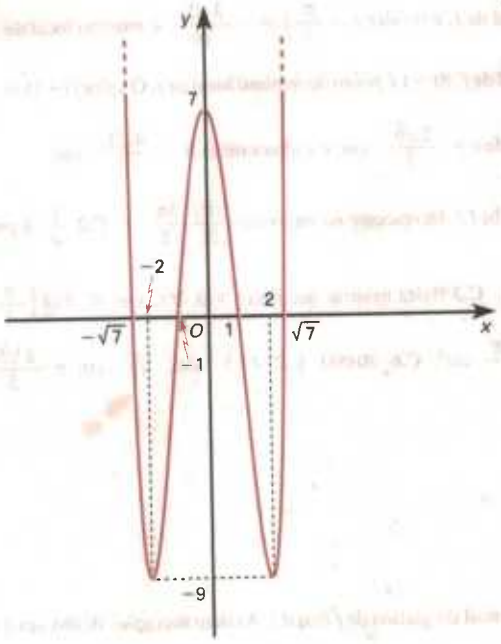
B.7 a)



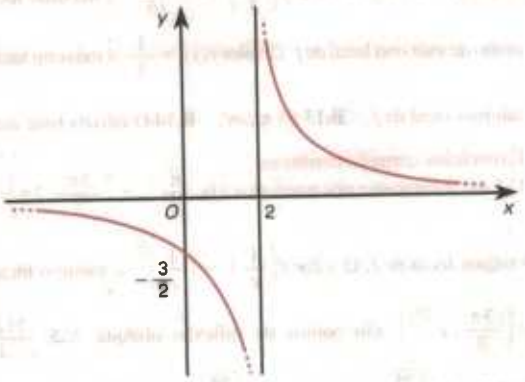
b)



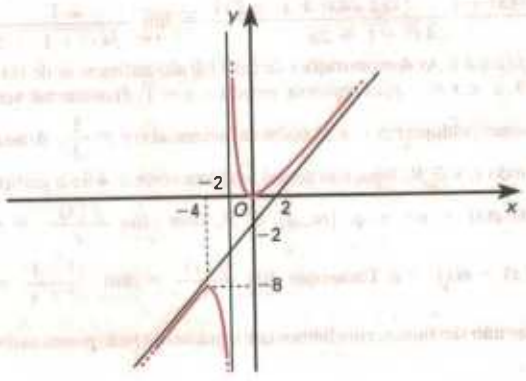
c)


y
7
−2
2
−√7
O
1
√7
x
−1
−9

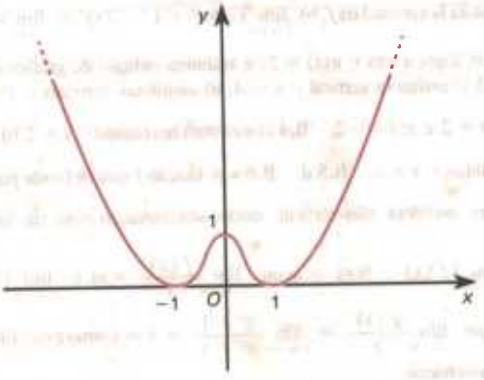
d)


y
O
2
x
−3/2

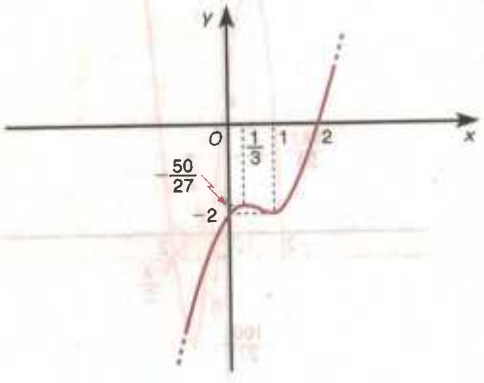
e)


y
−2
−4
O
2
x
−2
−8

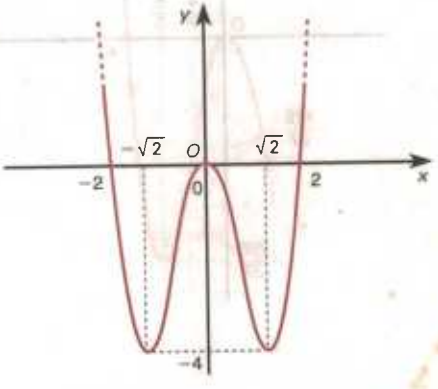
f)


y
1
−1
O
1
x

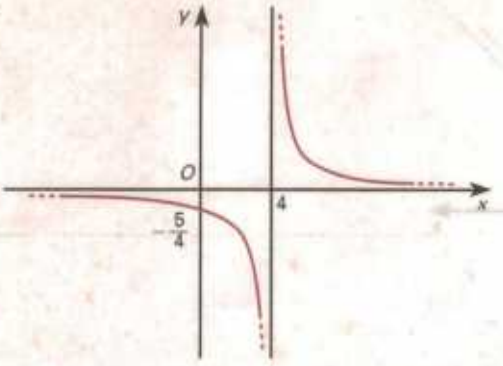
g)


y
O
1/3
1
2
x
−50/27
−2

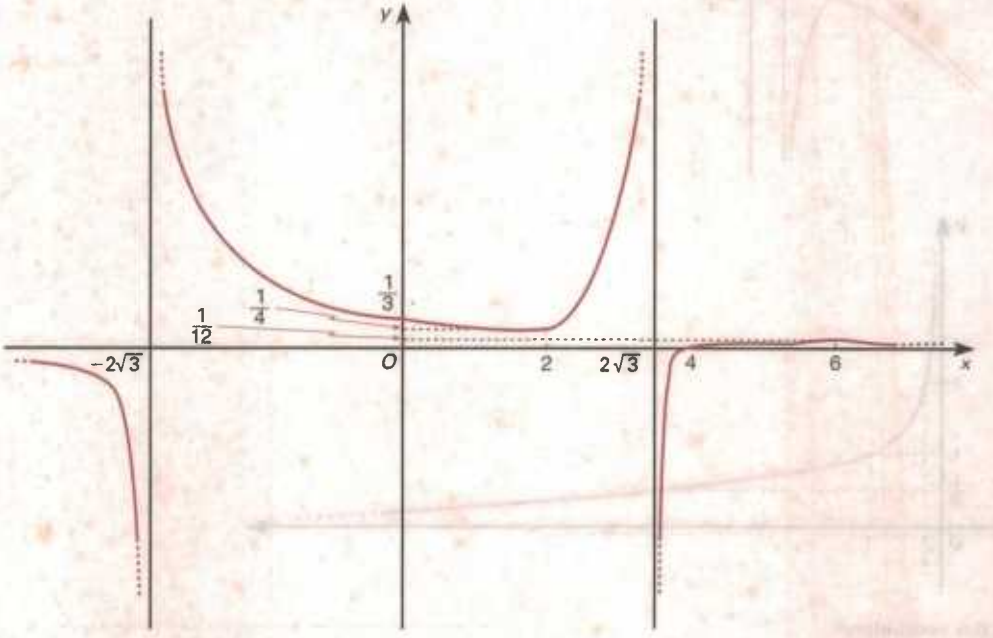
h)


y
−√2
O
√2
−2
0
2
x
−4

i)



j)

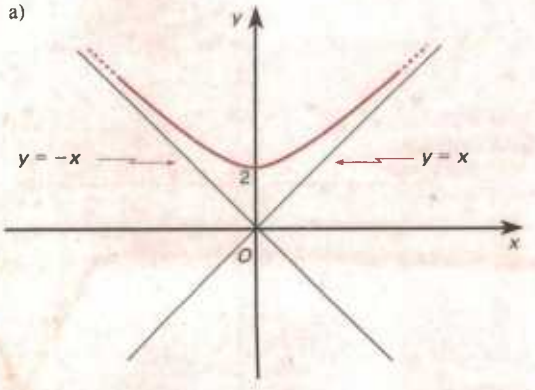


B.8 a) $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 4t + 1$; b) $v(3) = 16$ m/s; c) $a(t) = v'(t) = 6t - 4$; d) $a(2) = 8$ m/s². **B.9** a) $v(t) = s'(t) = 8t^3 + 3$; b) $v(1) = 11$ km/h; c) $a(t) = v'(t) = 24t^2$; d) $a(2) = 96$ km/h².

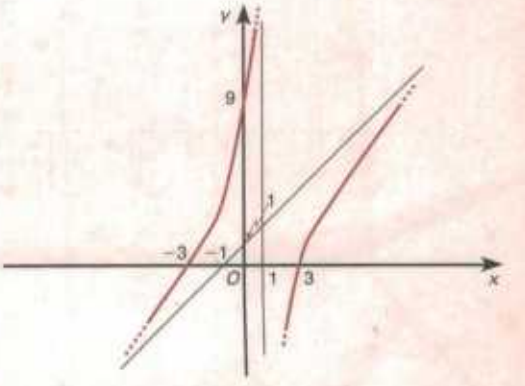
Exercícios complementares

C.1 a) assíntota vertical r: $x = 0$; assíntota horizontal s: $y = 0$. b) assíntotas verticais r: $x = 0$ e s: $x = -\frac{1}{e}$; assíntota horizontal t: $y = 1$.

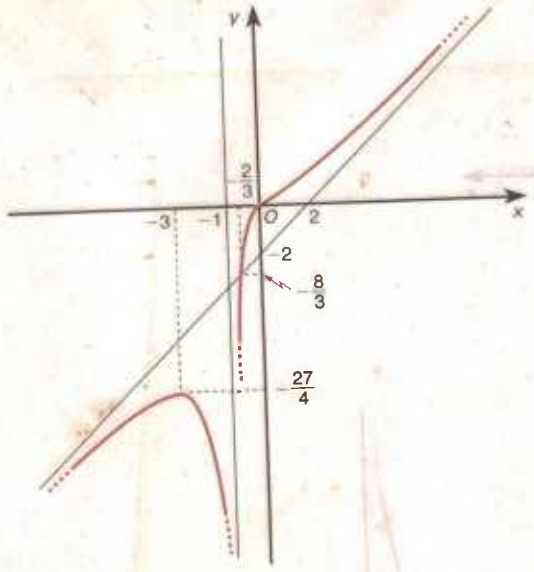
C.2 a)



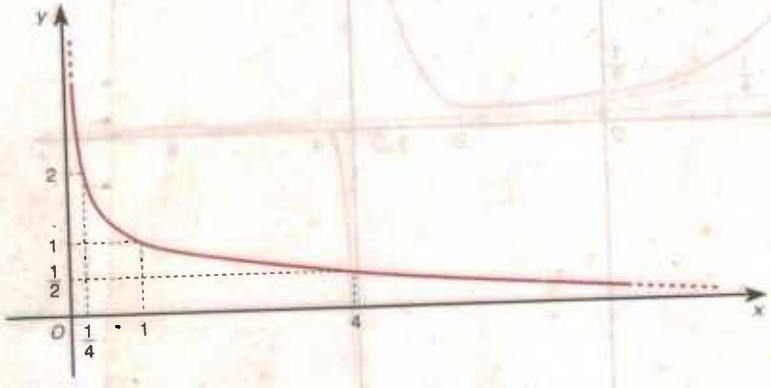
b)



c)



d)



Questões dos vestibulares

V.1 b. **V.2** a. **V.3** e.

Impressão e Acabamento: Gráfica Editora Hamburg